이론 해를 이용한 층간 분리된 적층판의 충격거동 해석

김성준[†] · 신정우[*] · 채동철[**]

Impact response analysis of delaminated composite laminates using analytical solution

Sung Joon Kim, Jeong Woo Shin, Dong-Chul Chae

Key Words : Analytical Solution(이론 해), Impact(충격), Linearized stiffness(선형화된 강성)

Abstract

An analytical solution has been developed for the impact response of delaminated composite plates. The analysis is based on an expansion of loads, displacements, and rotations in a Fourier series which satisfies the end boundary conditions of simply-supported. The analytical formulation adopts the Laplace transformation technique, requiring a linearization of contact deformation. In this paper, the nonlinear contact stiffness is replaced by a linearized stiffness, to provide an estimate of the additional compliance due to contact area deformation effects. It has been shown that defects such as delaminations may be modeled as spring stiffness. The change in the impact characteristics as this spring stiffness has been investigated theoretically. Predicted impact responses using analytical solution are compared with the numerical ones from the 3-D non-linear finite element model. From the results, it is shown that analytical solution was found to be reliable for predicting the impact response.

기호설명

K_e : 선형화된 접촉강성

K_e : 유효강성

$F(t)$: 충격하중 이력

1. 서 론

섬유강화 복합재료는 높은 비강성과 비강도 특성으로 인하여 항공우주 등 여러 공학분야에 사용된다. 대부분 적층판 구조로 사용되는 섬유강화 복합재료는 낮은 층간 강도로 인하여 저속충격 등의 면 외 방향의 하중에 취약하다. 저속충격에 의한 손상은 충격을 받은 쪽의 적층판 표면에는 거의 발생하지 않고 충격을 가한 반대쪽이나 내부에 층간분리나 기지균열의 형태로 발생한다. 이러한 적층판의 손상은 부재의 기계적 성질, 특히 압축강도 등의 강도를 저하시키며 이로 인하여 복합적층판으로 구성되는 구조물의 수명감소나 파손 등의 예기치 못한 문제를 야기시킨다. 그러므로 외부 충격 및 제작 중에 발생하는 층간분리(delamination) 손상을 식별할 수 있는 방안에 대한 연구가 시급하다. 복합재 구조물의 내부손상은 사람의 눈으로 탐지하기가 불가능하므로 비파괴 검사법을 이용하여 탐지한다. 전통적인 비파괴 검사법은 구조진동파를 이용하는 방법과 X-레이 촬영을 통한 방법 등을 들 수 있다. 하지만 이와 같은 방법은 번거롭고 많은 비용이 소요된다. 한편 숙련된 검사자 들은 동전이나 타격망치들을 이용하여 구조물의 내부손상을 파악한다. 타격 테스트를 이용해서 구조물을 검사할 때 손상의 유무를 알려주는 지표로 많이 사용하고 있는 것은 타격체(impactor)와

† 항공우주연구원
E-mail : yaelin@kare.re.kr
TEL : (042)860-2301 FAX : (042)860-2009
* 항공우주연구원
** 항공우주연구원

구조물간의 접촉력의 시간이력과 타격 시에 발생하는 타격음(impact sound) 등이다. 구조물이 타격을 받는 경우 충격특성은 구조물의 국부적인 강성에 좌우된다. 접착분리(adhesive)나 피로손상은 구조물의 강성저하를 야기시키므로 구조물의 충격거동 특성이 바뀐다[1]. Cawley[2]는 태핑(tapping) 중의 충격하중이력을 이용하여 구조물의 손상을 파악할 수 있음을 보였다. 본 논문에서는 충격하중이력을 기반으로 한 비파괴검사 방법을 제시하고자 한다. 즉 손상을 갖고 있는 구조물과 건전한 구조물의 충격거동의 차이를 이용하여 구조물의 손상여부를 평가하고자 한다. 그러므로 충격거동해석이 수반되어야 한다. 일반적으로 유한요소법(finite element method)을 이용한 복합적층 구조물의 충격거동해석은 많은 계산시간이 소요된다고 알려져 있다. Shivakumar 등[3]은 유한요소법을 사용하지 않고 스프링-질량모델을 이용하여 효과적으로 충격하중이력을 예측하였다. 이 연구에서는 접촉에 의한 국부적인 압입(indentation)과 횡 방향의 전단변형 에너지 및 굽힘 에너지를 고려하였으며, 두께가 얇은 적층판은 저속충격 시 접촉에너지를 무시할 수 있음을 보였다. 그러나 그들의 연구는 횡 방향으로 등방성(isotropic) 재료물성을 갖는 원형 적층판에 제한되었다. Choi[4]는 선형화된 접촉법칙을 이용한 스프링-질량모델을 이용하여 저속충격해석을 수행하였다. Christoforou 와 Swanson[5]은 라플라스 변환(Laplace transform)을 이용하여 충격거동에 대한 이론해석인 해를 구하였다. 층간분리에 의한 충격거동을 고찰하기 위해서는 층간분리된 상 하 면이 충격거동 시에 겹치는 현상을 막을 수 있도록 해석적인 기법을 고안하여야 한다. 3 차원 유한요소를 이용하고 층간분리 면에 인장과 압축 시 에 비선형강성을 갖는 즉 인장 시에는 강성을 갖지 않고 압축 시에만 강성을 갖는 1 차원요소를 사용하면 이 문제를 해석할 수 있으나 모델링 및 수치해석에 많은 시간이 소요된다. 본 논문에서는 이론 해를 기반으로 간단한 층간분리 모델을 제시하고자 한다.

2. 복합적층판의 변위장 및 구성방정식

본 연구에서는 Whitney 와 Pagano[6]에 의해 개발된 횡 방향의 전단변형을 고려한 적층판의 구성방정식을 사용하였다. 가정된 변위성분은 다음과 같다.

$$u = u^0(x,y,z) + z\psi_x(x,y,z)$$
$$v = v^0(x,y,z) + z\psi_y(x,y,z) \qquad (1)$$
$$w = w(x,y,z)$$

여기서 u, v, w 는 각 방향의 변위이며, u^0, v^0, w 는 각 방향의 중립면의 변위이다. 그리고 ψ_x, ψ_y 는 각각 x, y 축에 수직한 단면의 회전을 의미한다. Whitney 와 Pagano 가 개발한 운동방정식을 이용하여 직교이방성인 경우에 대하여 단순화시키면 $(B_{ij} = 0, A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0)$
횡 방향 변위에 대한 구성방정식은 다음과 같다.

$$D_{11}\psi_{x,xx} + D_{66}\psi_{x,yy} + (D_{12}+D_{66})\psi_{y,xy}$$
$$-kA_{55}\psi_x - kA_{55}w_{,x} = \frac{\rho h^3}{12}\psi_{x,tt}$$
$$(D_{12}+D_{66})\psi_{x,xy} + D_{66}\psi_{y,xx} + D_{22}\psi_{y,yy} \qquad (2)$$
$$-kA_{44}(\psi_y + w_{,y}) = \frac{\rho h^3}{12}\psi_{y,tt}$$
$$kA_{55}(\psi_{x,x} + w_{,xx}) + kA_{44}(\psi_{y,y} + w_{,yy})$$
$$+q(x,y,z) = \rho h\, w_{,tt}$$

여기서 h 는 적층판의 두께이고, t 는 시간, ρ 는 재료의 밀도 그리고 k 는 전단보정 계수이다. 본 논문에서는 균일한 두께를 갖고 길이가 a, b 인 사각형 적층판의 단순지지 경계조건에 대하여 고려하였다. 경계조건은 아래와 같다.

$$w = \psi_{x,x} = 0 \quad at \quad x = 0, a$$
$$w = \psi_{y,y} = 0 \quad at \quad y = 0, b \qquad (3)$$

3. 충격문제의 해석

해석은 경계조건을 만족시키는 하중, 변위 및 회전에 대한 푸리에 전개(Fourier series)를 이용하였다. 각 항은 시간과 위치의 함수로 분리된다고 가정하고 면내방향과 회전 관성을 무시하여 횡 변위에 대한 푸리에 계수를 갖는 상미분 방정식으로 문제를 단순화 시켰다. 충격하중은 충격체의 가속도로부터 계산하는데 충격체와 적층판 사이의 접촉 중의 평형방정식과 관련된다. 주어진 동 하중과 지배방정식 및 경계조건을 만족하는 하중과 변위의 해는 아래와 같이 가정할 수 있다.

$$q(x,y,t) = \sum_m \sum_m Q_{mn}(t) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (4)$$

$$\psi_x = \sum_m \sum_n A_{mn}(t) \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$
$$\psi_y = \sum_m \sum_n B_{mn}(t) \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \tag{5}$$
$$w = \sum_m \sum_n B_{mn}(t) \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b}$$

(4)와 (5)는 푸리에 전개를 이용한 하중, 회전 및 횡 방향 변위를 표현하는 식이다. 푸리에 전개를 이용한 집중하중은 작용하는 위치가 (ξ,η)인 경우 (6)식으로 표현된다.

$$Q_{mn}(t) = \frac{4F(t)}{ab} \sin\frac{m\pi\xi}{a} \sin\frac{n\pi\eta}{b} \tag{6}$$

여기서 $F(t)$는 충격하중이고 a, b 는 적층판의 폭과 길이이다. 본 연구에서는 회전관성 효과를 무시하였다. 그러므로 식(4)와 (5)를 (2)식에 대입하면 서로 독립적인 3 개의 식이 나온다.

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{mn}(t) \\ B_{mn}(t) \\ W_{mn}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \begin{pmatrix} Q_{mn}(t) - \\ \rho h W_{mn}(t) \end{pmatrix} \end{Bmatrix} \tag{7}$$

여기서 대칭행렬의 요소 C_{ij} 는 아래와 같다.

$$C_{11} = D_{11}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + D_{66}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + kA_{55}$$
$$C_{12} = (D_{12} + D_{66})\left(\frac{m\pi}{a}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)$$
$$C_{13} = kA_{55}\left(\frac{m\pi}{a}\right) \tag{8}$$
$$C_{22} = D_{66}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + D_{22}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + kA_{44}$$
$$C_{23} = kA_{44}\left(\frac{n\pi}{b}\right)$$
$$C_{33} = kA_{55}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + kA_{44}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

식(7)은 아래의 변환을 이용하여 1 개의 식으로 표현할 수 있다.

$$A_{mn}(t) = K_A W_{mn}(t) \quad ; \quad B_{mn}(t) = K_B W_{mn}(t) \tag{9}$$

여기서

$$K_A = \frac{C_{12}C_{23} - C_{13}C_{22}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}$$
$$K_B = \frac{C_{12}C_{13} - C_{11}C_{23}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} \tag{10}$$

(6)식을 변환하여 (7)식에 대입하면 아래의 식으로 단순화된다.

$$W_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 W_{mn}(t) = \frac{Q_{mn}(t)}{\rho h} \tag{11}$$

여기서

$$\omega_{mn}^2 = \frac{C_{13}K_A + C_{23}K_B + C_{33}}{\rho h} \tag{12}$$

초기변위와 속도가 0 인 경우 (11)식의 해는 아래의 콘볼루션(convolution integral)적분으로 주어진다.

$$W_{mn}(t) = \frac{1}{\rho h \omega_{mn}} \int_0^t Q_{mn}(\tau) \sin\omega_{mn}(t-\tau) d\tau \tag{13}$$

$W_{mn}(t)$ 와 $Q_{mn}(\tau)$ 를 각각 (4)식과 (6)식으로 대체하고 정리하면 횡 방향변위는 아래와 같다.

$$w(x,y,t) = \frac{4K_c}{\rho h} \sum_m \sum_n K_{mn} \frac{\sin\left(\frac{m\pi\xi}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi\eta}{b}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{\omega_{mn}} \int_0^t F(\tau)\sin\omega_{mn}(t-\tau)d\tau \tag{14}$$

여기서 K_c 와 K_{mn} 은 아래와 같다.

$$K_C = \frac{1}{ab} \quad K_{mn} = 1$$

3.1 충격하중이력 해석

외부 물체에 의한 적층판의 거동은 과도응답해석을 통하여 구해진다. 접촉 중의 충격체와 적층판의 평형 식에 대한 적분은 아래와 같다.

$$w\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},t\right) = V_0 t - \frac{1}{m_0}\int_0^t F(\tau)\sin\omega_{mn}(t-\tau) - \frac{F(t)}{K_e} \tag{15}$$

여기서 V_0 는 충격체 m_0 의 초기속도, $w(a/2,b/2,t)$ 는 충격에 가해진 위치에서의 횡 방

향변위 이력, $F(t)$는 충격하중이력이며 K_e는 선형화된 접촉강성이다. 해석적인 방법을 이용하여 충격문제를 풀기 위해선 비선형 접촉강성을 적절한 선형강성으로 변환하여야 한다. Choi 는 선형화된 접촉법칙을 이용하여 저속충격문제에 적용할 수 있음을 보였다. 이 연구에서 선형화된 접촉강성은 아래와 같이 주어진다.

$$F = K_e \alpha \tag{16}$$

$$K_e = F_m^{1/3} k^{2/3} \tag{17}$$

$$k = \frac{4}{3} \frac{R^{1/2}}{\dfrac{1-\nu_r^2}{E_r} + \dfrac{1}{E_p}} \tag{18}$$

(16)식에서 k_e는 선형화된 접촉 계수이고 α는 압입량이다. 그리고 (17)식에서 F_m은 예측되는 최대 접촉력이고 k 는 수정된 Hertz 접촉법칙의 상수이다. (18)식에서 R 은 충격체의 반지름, ν_r 은 충격체의 포아송비, E_r 과 E_p는 충격체와 적층판의 두께방향의 강성계수(young's modulus)이다. 식(14)와 (15)를 이용하여 충격하중이력에 대해 정리하면 아래와 같다.

$$\frac{F(\tau)}{K_e} = \upsilon_0 t - \frac{1}{m_0}\int_0^t F(\tau)(t-\tau)d\tau - \frac{4K_C}{\rho h}\sum_m\sum_n \frac{K_{mn}}{\omega_{mn}} \sin^2\left(\frac{m\pi}{2}\right)\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \int_0^t F(\tau)\sin\omega_{mn}(t-\tau)d\tau \tag{19}$$

(19)식은 라플라스변환(Laplace transform)을 이용하여 정리하면 아래와 같다.

$$F(s) = \frac{m_0 v_0}{\left(1 + \dfrac{m_0}{K_e}s^2 + 4K_c\dfrac{m_0}{\rho h} \sum_m\sum_n K_{mn}\sin^2\left(\dfrac{m\pi}{2}\right)\sin^2\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\dfrac{s^2}{s^2+\omega_{mn}^2}\right)} \tag{20}$$

라플라스 역변환(Inverse Laplace transform)을 이용하여 다시 정리하면 충격하중은 아래와 같다.

$$F(t) = \sum_j F_j \sin(\omega_j t) \tag{21}$$

여기서 ω_j 는 응답주파수로 (20)식의 극점(pole)이고 F_j는 아래의 식으로 주어진다.

$$F_j = \frac{m_0 v_0}{\omega_j\left(\dfrac{m_0}{K_e} + 4K_c\dfrac{m_0}{\rho h} \sum_m\sum_n K_{mn}\sin^2\left(\dfrac{m\pi}{2}\right)\sin^2\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\dfrac{\omega^2}{\left(\omega_{mn}^2-\omega_j^2\right)^2}\right)} \tag{22}$$

3.2 층간분리 모델링(delamination modeling)

참고문헌[1]에서 층간분리 등의 손상에 의한 강성저하 효과를 스프링 강성으로 표현 할 수 있음을 보였다. 4 변의 길이가 a 이고 분리 면의 두께가 h/2 인 사각형 모양의 층간분리의 스프링강성은 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$k_d = 1.5 \times \frac{D^*}{\alpha a^2} \tag{23}$$

여기서 D^* 는 층간분리 면의 유효강성이다. 적층판의 유효강성은 참고문헌[7]에서 아래와 같이 구하였다.

$$D^* = \sqrt{D_{11}D_{22}(A+1)/2}$$
$$A = (D_{12} + 2D_{66})/\sqrt{D_{11}D_{22}} \tag{24}$$

그러므로 Fig.1 에서 보듯이 층간분리된 부위의 유효강성은 접촉강성과 층간분리에 의한 강성을 고려해야 한다. 즉 식(25)식과 같이 표현된다.

$$K_{eff} = \left[\frac{1}{k_e} + \frac{1}{k_d}\right]^{-1} \tag{25}$$

여기서 k_d 는 층간분리에 의한 강성이고 K_e는 선형화된 접촉강성이다.

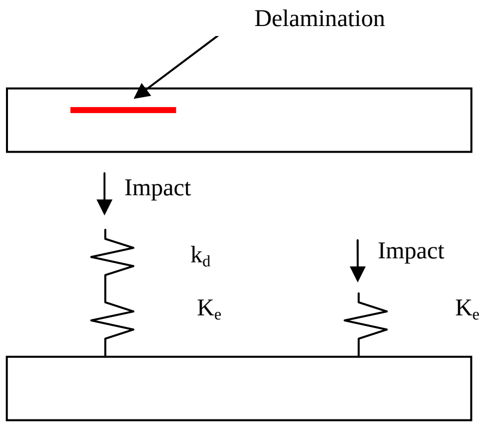


Fig. 1 Delamination model for impact analysis

3.3 충격문제 해석

이론 해의 타당성을 검토하기 위하여 상용 유한요소해석 결과와 비교하였다. Fig.2 는 NASTRAN 을 이용한 저속충격해석 모델이다. 접촉법칙은 앞에서 언급한 선형화된 접촉강성을 이용하여 1-D 스프링요소를 사용하였고 충격체는 스프링요소 끝단에 집중질량으로 모사하였다. 유한요소해석을 수행한 후에 스프링에 작용하는 압축하중에 대한 시간이력을 추출하여 충격 시의 접촉하중이력을 계산하였다. 충격해석은 초기조건을 충격 시의 속도로 사용한 과도응답해석을 통하여 수행된다.

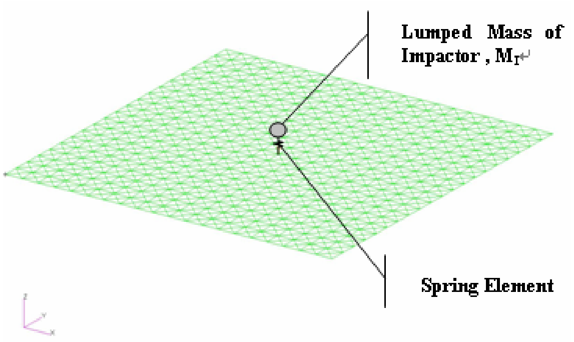


Fig. 2 Spring element model using general-purpose FEM software

3.4 층간분리 모델

Fig.3 은 3 차원 유한요소와 Gap 요소를 이용한 층간분리 모델이다. 충격 시 층간분리된 상하 면 적층판이 겹치는 현상을 방지하기 위하여 층간분리면에 비선형 물성을 갖는 Gap 요소를 사용하였다. 즉 압축 시에는 강성을 갖고 인장 시에는 강성이 없는 물성을 갖도록 하여 층간분리 면을 모사하였다.

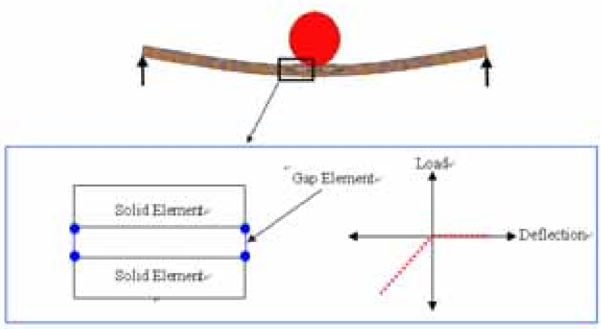
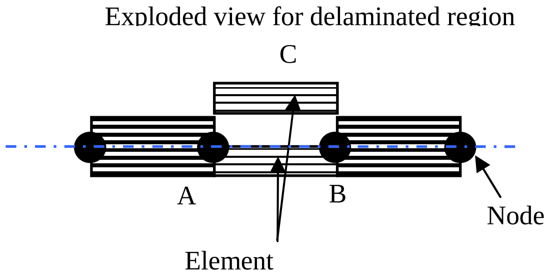


Fig. 3 Laminate with a delamination and gap element stiffness curve used to connect solid element

Fig.4 는 해석을 위한 복합적층판의 크기와 층간분리가 있는 영역의 치수이다. 적층판의 크기는 15 x 15 cm^2 이고, 층간분리 부위의 면적은 4.5 x 4.5cm^2 이다. 적층판 A 는$[0]_8$, 두께 = 1.0 mm 이고 적층판 B 는 $[0]_4$, 두께 = 0.5 mm, 적층판 C 는 $[0]_4$, 두께 = 0.5 mm 이다. 해석에 사용한 재료의 물성은 Table 1 과 같다.



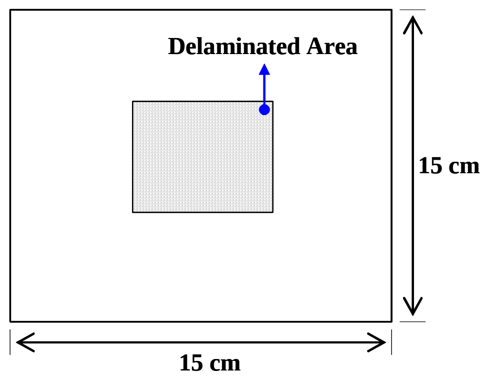


Fig. 4 Configuration of delaminated area

Table 1 Material properties

Material properties Of lamina	E_1 = 120 GPa, E_2= 7.9 GPa G_{12}=G_{13}=G_{23}= 5.5 Gpa ν_{12} = 0.3 ρ =1582 kg/m^3 Thickness = 0.125 mm
Material properties of impactor	E = 207 Gpa ν =0.3

4. 결과비교

Fig.5 는 층간분리가 Fig.4 과 같이 존재하는 경우 이론 해와 앞서 언급한 층간분리 모델을 이용한 수치 해를 비교한 결과이다. 충격체와 적층판의 질량 비(M_I/M_P)는 35.0 이고, 충격체의 초기속도는 0.5 m/sec 이다. 여기서 M_I 는 충격체의 질량이고 M_P 는 적층판의 질량이다. Fig.6 은 충격체와 적층판의 질량 비(M_I/M_P)는 10.0 이고, 충격체의 초기속도는 0.5 m/sec 인 경우의 해석결과이다. 두 경우 모두 이론적인 방법을 이용하여 구한결과와 수치해석을 이용한 결과가 잘 일치함을 보인다.

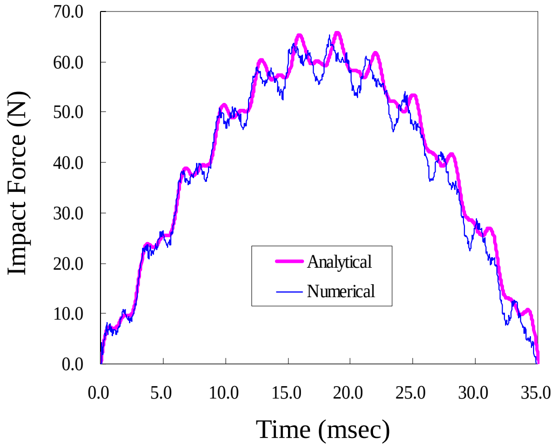


Fig. 5 Impact force histories analyzed using an analytical solution and the 3-D non-linear model when the mass ratio 35.0

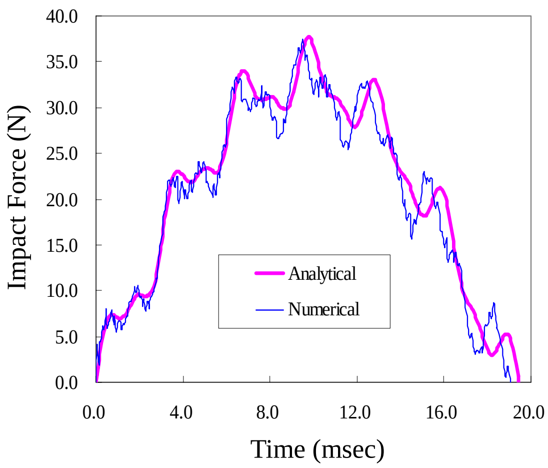


Fig. 6 Impact force histories analyzed using an analytical solution and the 3-D non-linear model when the mass ratio 10.0

5. 결 론

본 논문에서는 이론 해를 이용하여 층간분리가 된 적층판의 충격거동해석 방법을 제시하였다. 이론 해를 이용하여 충격거동해석을 하기 위하여 단순지지 경계조건에 대하여 푸리에 전개와 라플라스 변환을 이용하였으며, 비선형 접촉법칙을 선형화하여 사용하였다. 그리고 층간분리를 스프링강성으로 모사하였다. 해석결과로부터 최대 충격하중은 층간분리된 적층판의 강성저하로 인하여 감소함을 알 수 있었다. 제시된 이론 해는 층간분리된 적층판의 충격거동을 잘 모사함을 알 수 있었었다.

참고문헌

(1) Cawley, P. and Adams, R. D., “ The mechanics of the coin-tap method of non-destructive testing,” Journal of Sound and Vibration, 1988, Vol. 122, pp. 299-316

(2) Cawley, P., “The impedance method of non-destructive inspection,” NDT International, 1984, Vol. 17, pp. 59-65

(3) Shivakumar, K. N., and Elber, W., “Prediction of impact force and duration due to low-Velocity impact on circular composite laminates,” ASME Journal of Applied Mechanics, Sept. 1985, Vol. 52, pp. 674-680.

(4) Choi, I. H., and Lim, C. H., “Low-velocity impact analysis of composite laminates using linearized contact law,” Composite Structures, 2004, Vol. 66, pp. 125-132

(5) Christoforou, A. P., and Swanson, S. R., “ANALYSIS OF IMPACT RESPONSE IN COMPOSITE PLATES,” Int. J. Solids Structures, 1990, Vol. 27, No. 2, pp.161-170

(6) Whitney, J. M., and Pagano, N. J., “Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates,” Journal of Applied Mechanics, 1970, Vol. 37, pp.1031-1036

(7) Olsson, R., “Analytical prediction of large mass impact damage in composite laminates,” Composites, 2001, Part A 32, pp. 1207-1215