내부 요소 연결 매개법을 활용한 3 차원 냉각핀의 위상 최적설계

유성민† · 김윤영*

The Topology Optimization of Three-dimensional Cooling Fins by the Internal Element Connectivity Parameterization Method

Sungmin Yoo and Yoon Young Kim

Key Words : Cooling Fin(냉각핀), Internal element connectivity parameterization(I-ECP, 내부 요소 연결 매개법), Heat Transfer problem(열 전달 문제), Heat sink(히트 싱크), Side convection(측면 대류), Topology optimization(위상 최적 설계)

Abstract

This work is concerned with the topology optimization of three-dimensional cooling fins or heat sinks. Motivated by earlier success of the Internal Element Connectivity Method (I-ECP) method in two-dimensional problems, the extension of I-ECP to three-dimensional problems is carried out. The main efforts were made to maintain the numerical trouble-free characteristics of I-ECP for full three-dimensional problems; a serious numerical problem appearing in thermal topology optimization is erroneous temperature undershooting. The effectiveness of the present implementation was checked through the design optimization of three-dimensional fins.

1. 서 론

위상 최적설계 기법은 다양한 분야의 최적 설계 문제에서 활용되고 있다.[1] 본 연구는 그 중에서도 대표적인 열기기인 냉각핀(방열핀, 히트싱크)을 설계함으로써 열문제에 있어서 위상최적설계 기법의 가능성을 살펴보고자 한다.

위상최적설계는 설계 영역을 이산화한 유한요소로 나누고, 각 요소의 밀도를 설계 변수로 하여 최적화된 형상을 찾는 기법이다. 설계 영역의 이산화된 요소의 물성치(강성, 열전도도 등)를 요소의 설계변수인 밀도에 연속인 함수관계로 가정하여 최적화를 하게 된다.[1]

위성최적화 기법의 유용성에도 불구하고, 열전달에 있어서의 위상최적화 기법에는 중요한 문제들이 산적해 있다. 대표적으로 물리적으로 일어날 수가 없는 온도 분포를 갖는 언더슈트(undershoot) 현상이 발생하며 대류열전달 효과를 적용하기가 매우 까다롭다.[5]

언더슈트를 해결하기 위해서 몇가지 방법이 제안되었다.[3,5] 한가지는 요소연결매개법(ECP)라고 불리는 요소간의 연결정도를 매개변수화함으로써, 온도의 밀도 값에 따라 달라지는 요소 사이의 열 대류, 전도현상을 잘 모델링 할 수 있는 방법이다.[2,3] 지금까지의 연구는 주로 2 차원 문제에 국한하여 실용적인 문제에 대한 적용이 많지 않았다.[3,4,5] 본 논문에서는 ECP 를 활용하여 기존에 2 차원 형상의 위상최적설계를 한 단계 끌어올려 3 차원 위상최적설계를 수행하고자 한다.

2. 내부 요소 연결 매개법

2.1 내부 요소 연결 매개법

요소 연결 매개법(Element Connectivity Parameterization, 이하 ECP)는 외부 요소 연결 매개법(External ECP, 이하 E-ECP)와 내부 요소 연결

† 서울대학교 대학원 기계항공공학부
E-mail : novalisg@idealab.snu.ac.kr
TEL : (02)880-1688 FAX : (02)872-5431

* 서울대학교 기계항공공학부 교수
E-mail : yykim@snu.ac.kr
TEL : (02)880-7154 FAX : (02)872-5431

매개법(Internal ECP, 이하 I-ECP)로 나뉜다.[2] 기존의 SIMP[1]법이 요소의 물성치를 밀도에 따라 변화시킴으로써 구조물의 위상을 표현했다면, ECP에서는 요소들 간의 연결성(Connectivity)으로 위상을 표현한다. ECP 는 각 요소를 이산화시켜 독립적인 절점(node)을 사용한다. 이 독립된 절점들을 길이가 0 이며, 밀도에 따라 물성치가 바뀌는 스프링을 이용해서 연결해 준다. 이를 통해 큰 왜곡없이 위상을 표현하며, 유한요소해석을 수행 할 수가 있다.

Fig. 1 은 2 차원에서 SIMP, E-ECP 와 I-ECP 의 차이를 설명해 주고 있다. Fig. 1 에서 알 수 있듯이 ECP 는 이산화 과정에서 전체 시스템의 자유도가 늘어나게 하며, 그에 따라 풀어야 할 행렬의 크기도 증가하게 된다. 하지만 I-ECP 의 경우에 있어 정축약 기법[2](static condensation)을 활용 하면, ECP 의 장점을 그대로 유지하면서 전통적인 유한요소해석법과 동일한 자유도의 시스템을 얻을 수 있다. 이 때문에 E-ECP 대신 I-ECP 를 사용하면 계산비용을 줄일 수 있다. 정축약 기법에 대해서는 2.3 의 정축약 기법에서 소개하고자 한다.

2.2 열전달 문제로의 적용

I-ECP 를 열문제에 활용하기 위해서는 중요한 3 가지 가정이 있다.[4]

첫째, 외부 절점과 내부 절점을 연결하는 링크는 열전도율(thermal conductivity)만을 갖는다. 따라서 링크에서는 대류에 의한 열전달이 일어나지 않는다.

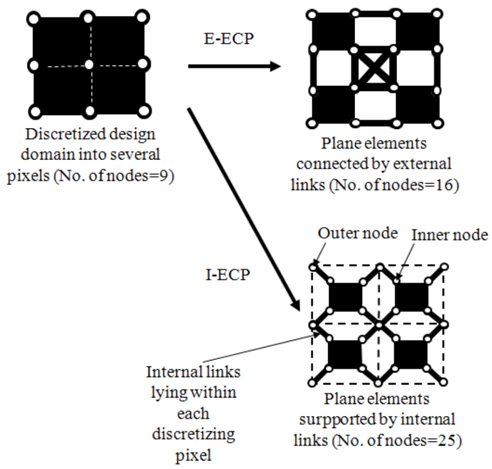

Fig. 1 Comparison between E-ECP and I-ECP

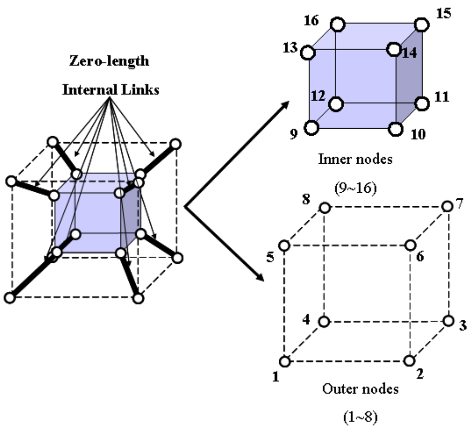

Fig. 2 Three-dimensional voxel element.

둘째, 설계영역(design domain)으로 유입되는 열유입(heat flux)는 외부 절점을 통해서만 가능 하다. 이는 구조문제에서 외력을 외부 절점에만 가해주는 것과 동일한 논리이다.

셋째, 대류에 의한 열전달은 내부 요소에서만 발생한다. 이 가정은 정축약 기법을 적용할 수 있는 근거가 된다.

Fig. 2 의 복셀(voxel) 단위의 행렬 방정식은 다음과 같다.[6]

$$\begin{bmatrix} k_I^e & -k_I^e \\ -k_I^e & k_I^e + k_{ele}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{out}^e \\ u_{in}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{out}^e \\ f_{in}^e \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서 아래첨자 out 은 외부절점, in 은 내부 절점을 의미하며, k_I^e 는 링크의 연결성을 나타내는 행렬로써 밀도 값에 의해 변화한다.

$$k_I^e = l_e \mathrm{I}_{nxn} \quad (2)$$

I_{nxn} 은 $n \times n$ 의 단위행렬이며, l_e 값은 요소의 밀도에 따라 보간(interpolation)한다. 보간식은 일반적인 경우 아래의 식을 사용한다.[2]

$$l_e = \alpha \frac{\gamma_e^{penal}}{1 + (1 - \gamma_e^{penal}) \times \dfrac{\alpha}{k_{diagonal}^{structure}}} + \beta \quad (3)$$

$$\alpha = l_{\max} - l_{\min}, \beta = l_{\min} \quad (4)$$

여기서 $penal$ 은 벌칙(penalty) 상수이며, $k_{diagonal}^{structure}$ 는 k^e 의 대각선 성분의 평균이다. 식 (3)의 l_e 값이 l_{max} 에 가까운 요소는 밀도가 1 에, l_{min} 에 가까운 요소는 밀도가 0 에 가깝다는 것을 의미한다.[2]

식 (1)에서 얻은 행렬 방정식을 전개하면 아래와 같은 결과는 얻는다.

$$k_I^e u_{out}^e - k_I^e u_{in}^e = f_{out}^e \tag{5}$$

$$-k_I^e u_{out}^e + k_I^e u_{in}^e + k_{ele}^e u_{in}^e = f_{in}^e \tag{6}$$

그리고 두 번째 가정에 의해 다음의 두 식을 얻을 수 있다.

$$f_{out}^e = f^e_{\substack{outer\\heat}} \quad \left(\because f^e_{\substack{outer\\conv}} = 0\right) \tag{7}$$

$$f_{in}^e = f^e_{\substack{inner\\conv}} \quad \left(\because f^e_{\substack{inner\\heat}} = 0\right)\gamma_2 \tag{8}$$

Fig. 3 와 같은 1 차원 예제를 통해 I-ECP 의 거동을 살펴 보았다. 기존 SIMP 과 비교하기 위해, 동일한 요소로 풀었으며, I-ECP 의 유용성을 살펴보기 위해 γ_2 부분의 요소를 10 개로 나누어 SIMP 법으로도 풀어보았다. Fig. 4 는 밀도에 따라 변하는 U_2^2 의 결과 값을 도식화한 것이다. 한 개의 요소를 사용한 SIMP 법의 결과를 보면, 저밀도 부분에서 대기온도 0 보다 낮은 음의 온도 값을 갖는다는 것을 알 수 있다. 물론 저밀도 부분의 요소를 여러 개의 요소로 잘게 쪼개면 물리적으로 타당한 결과를 얻을 수 있으나 과도한 수치계산을 요구하므로 효율적이지 못하다고 할 수 있다.

Fig. 4 의 결과에서 볼 수 있듯이, I-ECP 를 사용하면 최소한의 요소로도 언더슈트 현상을 피할 수 있다.

2.3 정축약 기법

I-ECP 를 그대로 사용하면, 급격한 자유도 증가로 해를 구하는데 비효율적이다. 이 문제를 해결하기 위해서 정축약(static condensation) 기법을 활용한다. 정축약을 하면, 전통적인 유한요소법과 같은 수의 자유도를 갖는 다음의 축약된 시스템을 얻는다.[2]

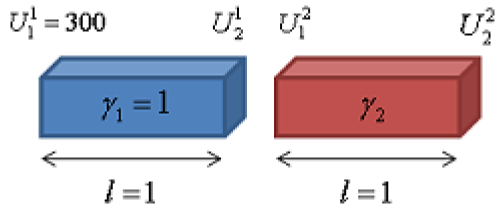

Fig. 3 Two-element model problem.

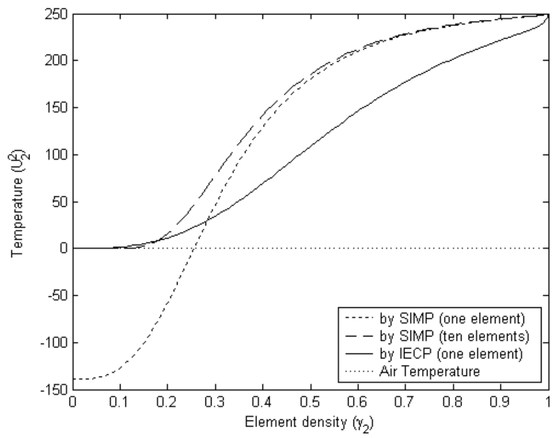

Fig. 4 The temperature variation of the model in Fig. 3

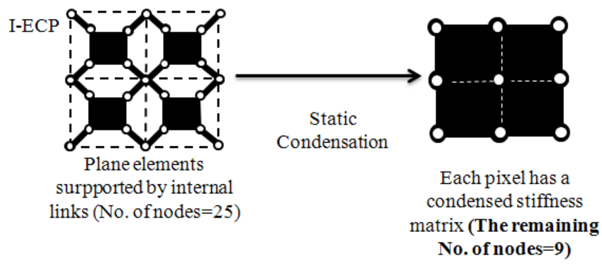

Fig. 5 Static condensation.

$$\begin{aligned} &\left(k_I^e - k_I^e\left(k_I^e + k_{ele}^e\right)^{-1} k_I^e\right) u_{out}^e \\ &= k_I^e\left(k_I^e + k_{ele}^e\right)^{-1} f_{in}^e + f_{out}^e \end{aligned} \tag{9}$$

식 (9)에서 알 수 있듯이 I-ECP 를 사용하면 u_{out}^e 만으로 식을 기술할 수 있다. 식(9)에서 나타나는 항을 다음과 같이 정리하면,[4]

$$k_{voxel}^e = k_I^e - k_I^e\left(k_I^e + k_{ele}^e\right)^{-1} k_I^e \tag{10}$$

$$f_{voxel}^e = k_I^e\left(k_I^e + k_{ele}^e\right)^{-1} f_{in}^e + f_{out}^e \tag{11}$$

다음의 식을 얻는다.

$$k_{voxel}^{e} u_{outer}^{e} = f_{voxel}^{e} \tag{12}$$

위와 같은 요소 행렬식을 구할 수 있다. 이를 전체 시스템으로 확장하면,

$$\left[\sum_{e=1}^{NE} k_{voxel}^{e}\right]\left\{U_{outer}\right\} = \left\{\sum_{e=1}^{NE} f_{voxel}^{e}\right\} \tag{13}$$

식 (13)를 이용하여 U_{outer} 를 구할 수 있으며, 식 (6)를 이용하여 추가로 연산하면 u_{in}^{e} 도 구할 수가 있다. [4]

3. 3차원 열전달 문제의 정식화

3.1 측면대류 효과 모델링

설계 변수의 밀도 변화에 따른 대류효과를 고려하기 위해 측면 대류 효과는 중심요소를 둘러싸고 있는 인접요소의 밀도에 의해서 결정된다는 가정을 하였다. 이는 대류에 의한 열전달이 요소의 면적에 비례한다는 것에서 출발하였다. 물론 중심요소의 밀도에 의한 면적을 고려해야 하지만, 이는 I-ECP 의 링크를 통해 이미 고려되었다고 볼 수 있다.

$$k_{conv}^{e} = \sum_{i=1}^{NS} wf(\gamma_e, \gamma_e^i) \iint_{\Gamma_s} h[N]^T [N] d\Gamma_s \tag{14}$$

$$f_{conv}^{e} = \sum_{i=1}^{NS} wf(\gamma_e, \gamma_e^i) \int_{\Gamma_s} h[N]^T u_T^{\infty} d\Gamma \tag{15}$$

$$wf(\gamma_e, \gamma_e^i) = (1-\gamma_e^i)^{penalty} 1\text{pW}/\mu\text{m}^2 \tag{16}$$

식 (16)에서 함수 wf 는 weighting function 을 나타내며, γ_e, γ_e^i 는 각각 중심요소, i 번째 이웃요소의 밀도를 의미한다. 3 차원 육면체 요소의 경우 6 개의 이웃한 요소를 갖게 되므로, NS 는 6 이 된다.

4. 3차원 정식화의 검증

본 절에서 3 차원 정식화를 검증하기 위해서 잘 알려진 2 차원 문제[5](Fig. 6 참고)를 해석해보았다.

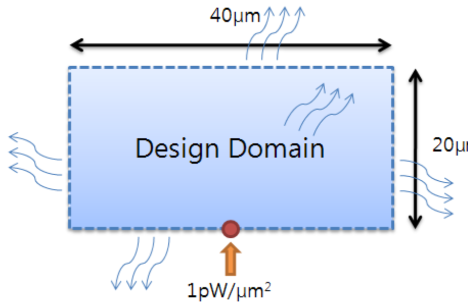

Fig. 6 A two-dimensional test problem with convection boundary conditions

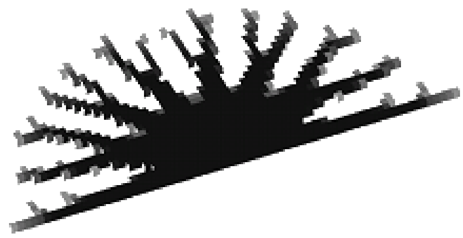

Fig. 7 Optimal heat dissipating structure for Bi=0.0005 (filter size = 1.5, mass constraint = 30%)

방열핀의 최적화 문제로, 유입되는 열량에 대한 구조물의 열 방출을 최대화 하는 문제를 다루었다. 여기서 사용된 목적함수와 구속조건은 다음과 같다.

$$\text{minimize: } \Pi = \mathrm{F}^{\mathrm{T}} U \tag{17}$$

$$\text{subject to: } \sum_{e=1}^{NE} \gamma_e v_e - M_0 \leq 0 \tag{18}$$

γ_e, v_e, M_0 는 각각 요소의 밀도, 부피, 질량의 상한값을 나타낸다. 최적화 알고리즘은 MMA 기법을 활용하였으며, 민감도 필터를 사용하였다.

최적화된 결과는 Fig. 7 에 나타나 있는데, 기존의 연구결과[5]와 유사한 결과를 얻을 수 있었다.

5. 3차원 방열 핀의 위상 최적화

Fig. 8 에서 정의된 3 차원 방열구조 위상최적설계를 수행해 보았다. 바닥의 짙은색 영역은 1pW/μm² 을 갖는 열원이 놓여 있으며, 나머지 면은 대류조건을 부가하였다.

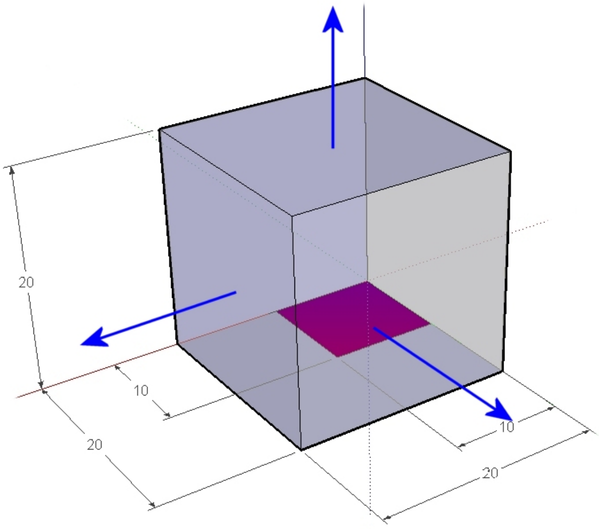

Fig. 8 3D Model Problem to design an optimal heat dissipating plate(unit: μm)

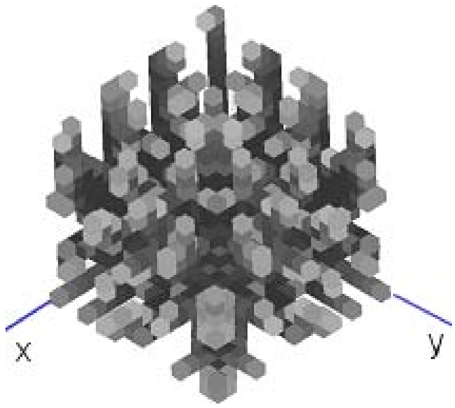

Fig. 9 Optimized three dimensional heat dissipating structure for Bi=0.0005 (filter size = 1.5, mass constraint = 30%)

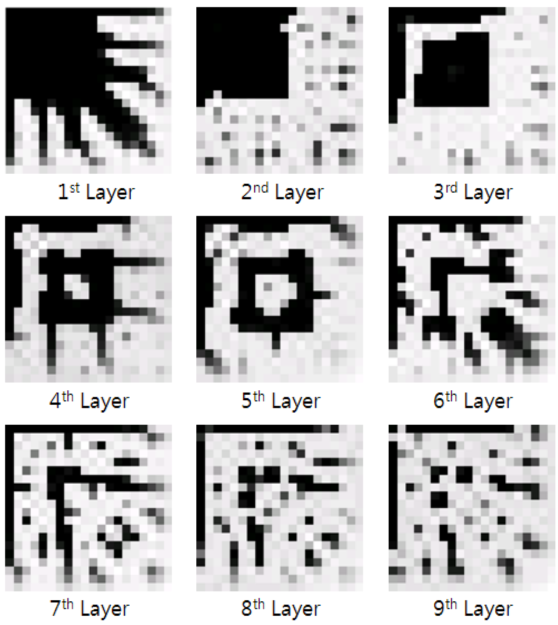

Fig. 10 Layer images of Fig. 10 (1st through 9th layer)

Fig. 9 에는 3 차원 최적화 형상이 나타나 있으며 맨 아래층부터 차례대로 제 9 층까지의 단면 형상을 Fig.10 에 표시하였다.

Fig. 10 의 결과를 보면, 첫 번째 층의 결과는 2 차원 결과와 유사하다는 것을 확인 할 수 있다. 그리고 두 번째 층은 열원의 영역과 유사한 형상을 가짐으로써 대류보다는 전도를 우선하였다고 할 수 있다. 세 번째 층에서부터 열원 영역 안에 대류를 위한 형상이 나타남을 파악할 수 있다.

6. 결론

본 논문에서는 지금까지 주로 2 차원 열문제에 국한하였던 I-ECP 기법을 3 차원으로 확장하여 위상최적설계를 수행하였다. 그런데 Fig. 9 로 얻어진 형상은 제작이 어려운 형상이므로, 위상최적설계 시 방열핀의 제작성도 함께 고려할 수 있는 연구를 수행할 필요가 있다. 이에 대한 후속 연구가 진행 중에 있다.

또한 본 연구로 얻은 위상최적설계 형상을 검증하기 위해서 실제 제작하여 CPU 와 같은 발열체에 실험을 해야 할 것이다.

후 기

본 연구는 서울대학교 정밀기계설계연구소와 계약된 창의적 연구 진흥 사업(한국 과학기술부 승인번호 2006-033)에 의해 지원되었습니다.

참고문헌

(1) Bendsøe, M.P. and Sigmund, O., 2003, "Topology Optimization, Springer," New York.

(2) Yoon, G.H. and Kim, Y.Y., 2005, "Element connectivity parameterization for topology optimization of geometrically nonlinear structures," *International Journal of Solid and Structures*, Vol. 42(7), pp. 1983~2009.

(3) Yoon, G.H. and Kim, Y.Y., 2005, "The element connectivity parameterization formulation for the topology design optimization of multiphysics systems," *Int. J. Numer. Meth. Engng*, V.64(12), p.1649-1677.

(4) Joung, Y.S. and Kim, Y.Y., 2005, "The topology design optimization of cooling fins using the internal element connectivity parameterization method," Trans. of *KSME, autumn conference*, 2005, Yungpyong, Korea, pp.2023~2028

(5) Ryu, J.C., 2006, "Density-dependent shape function

approach for the topology optimization: focused on heat-dissipating structure," MS Thesis, Seoul National Univ., Seoul, Korea
(6) Yoon, GH. and Joung, Y.S. and Kim, Y.Y, 2007, "Optimal layout design of three-dimensional geometrically non-linear structures using the element connectivity parameterization method," *Int. J. Numer. Meth. Engng*, V.69(6), p.1278-1304.