

T-스플라인 국부세분화를 고려한 스플라인 기반 유한요소해석

서유덕[†] · 김기승^{*} · 윤성기^{**}

Spline-Based Finite Element Analysis with T-Spline Local Refinement

Yu-Deok Seo, Ki-Seung Kim and Sung-Kie Youn

Key Words : T-spline(T-스플라인), NURBS(비균일 유리 B-스플라인), B-spline(B-스플라인), Finite Element Method(유한요소법), Finite Element Analysis(유한요소해석), Local Refinement(국부세분화)

Abstract

In many CAD systems, NURBS has been employed to construct exact geometries. Recently, NURBS finite element analysis methods were proposed by some authors for convenient connection between CAD and finite element analysis. Additional advantages of NURBS FEA, such as exact geometry and no mesh generation, are obtained. However, NURBS is inefficient in local refinement and merging patches. For refinement of local region in interest, additional control points should be inserted into the entire row or column which contains the local region. There is another inefficiency of NURBS during merging patches into a large structure due to propagation of control points. In order to overcome these inefficiencies of NURBS, T-spline was proposed by Sederberg. In this work, T-spline based finite element method is proposed for efficient local refinement and merging patches. At first, accuracy and efficiency of NURBS FEA is verified and efficiency of T-spline FEA is verified by comparing with NURBS FEA.

1. 서 론

일반적으로 유한요소해석은 CAD 로 모델링한 형상(geometry)을 이용하여 유한요소 모델을 생성하고 그를 이용하여 해석을 수행하게 된다. CAD 와 유한요소해석을 매우 밀접한 관계를 가지고 있으나 CAD 에서 작업한 형상의 정보를 직접적으로 사용하여 유한요소모델을 생성하지 않기 때문에 형상 모델링과 유한요소해석 절차가 자동적으로 연동될 수 없다. 따라서 형상이 복잡한 실질적인 3 차원 문제에 대해 성능이 우수한 유한요소모델을 구성하기 위해서는

엄청나게 많은 시간과 인위적인 노력이 요구된다.

이러한 문제점을 해결하기 최근에 스플라인을 이용한 유한요소해석 방법이 제안되었다.^(1,2) 스플라인 기반 유한요소해석에서는 CAD 에서 형상을 표현하기 위해 사용되는 NURBS (Non-Uniform Rational B-spline)의 정보를 이용하여 유한요소해석을 수행하는 방법을 제안하였다.

그러나 NURBS 는 형상 모델링 과정에서 국부세분화(local refinement) 과정과 대형 구조물의 부구조물간의 패치(patch)를 결합(merging) 하는 과정이 비효율적으로 진행되는 단점을 가지고 있다. 이러한 NURBS 의 단점을 개선하고자 T-스플라인(T-spline)이 제안되었다.^(3,4)

본 논문에서는 기존의 스플라인 유한요소해석에 국부세분화와 패치 결합에 장점이 있는 T-스플라인을 도입하여 효율성을 극대화시키는 연구를 수행한다.

[†] 한국과학기술원 기계공학과

E-mail : imop@kaist.ac.kr

TEL : (042) 869-3074

^{*} 넥스원퓨처

^{**} 한국과학기술원 기계공학과

2. B-스플라인과 NURBS

B-스플라인은 형상을 표현하기 위해 사용되는 매개변수 방정식으로 B-스플라인의 곡선방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i N_{i,k}(u) \quad (1)$$

식 (1)에서 \mathbf{p}_i 는 조정점(control point)의 좌표이고 $N_{i,k}$ 는 k 차 스플라인 기저함수(basis function)이다. 스플라인의 기저함수는 다음과 같은 귀납적 수식을 통해 결정된다.

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

$$N_{i,k}(u) = \frac{(u-u_i)N_{i,k-1}(u)}{u_{i+k-1}-u_i} + \frac{(u_{i+k-1}-u)N_{i+1,k-1}(u)}{u_{i+k-1}-u_{i+1}}$$

식 (2)에서 u_i 는 매개변수영역(parametric domain)에서의 값으로 매듭값(knot value)이라 한다. 매듭값들은 각 조정점이 영향을 미치는 범위를 결정하게 되며, 식 (2)를 통해서 기저함수를 생성하게 된다. 매듭값 u_i 의 집합을 매듭벡터(knot vector)라 한다. B-스플라인 기저함수(basis function)는 단위분할(partition of unity)을 만족하며 compact support 를 가지며 기저함수가 음의 값을 가지지 않는다. $\{000111\}$ 의 매듭벡터로 구성되는 B-스플라인 기저함수는 Fig. 1 과 같다.

B-스플라인 곡면은 조정점과 두 방향의 기저함수들의 텐서곱으로 표현되며 식 (3)과 같다.

$$\mathbf{C}(u,t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathbf{p}_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,l}(t) \quad (3)$$

NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline)는 현재 CAD 시스템에서 표준으로 사용되고 있는 스플라인 형태로 기존의 B-스플라인에 가중치를 주고

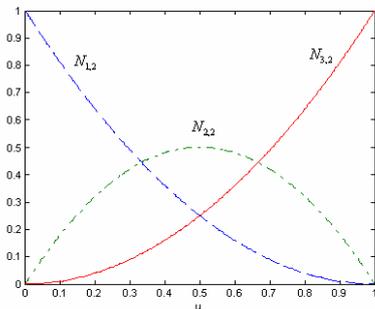


Fig. 1 B-spline basis function with knot vector $\{000111\}$

분수함수 형태를 취함으로써 보다 다양한 형상을 잘 표현할 수 있다.

$$\mathbf{C}(u,t) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{i,j} \mathbf{p}_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,l}(t)}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,l}(t)} \quad (4)$$

3. 스플라인 기반 유한요소해석

3.1 기본 이론 및 해석 절차

스플라인 기반 유한요소해석에서는 형상을 결정하는 조정점과 스플라인 기저함수를 사용하여 해석을 수행한다. 즉, 조정점이 기존 유한요소해석에서의 절점(node)의 역할을 하게 되고 스플라인 기저함수를 형상함수(shape function)로 사용한다.

CAD 시스템에서 형상을 모델링한 후 형상의 정보를 담고 있는 조정점과 매듭벡터, 가중치와 같은 NURBS 정보를 얻을 수 있다. 이러한 정보를 바탕으로 가장 간단한 형태의 메쉬를 얻을 수 있다. 다음으로 세분화 과정을 통해 유한요소해석에 충분한 수만큼의 요소를 구성하고 스플라인 기저함수를 이용하여 해석을 수행하게 된다.

스플라인 기반 유한요소해석에서는 해석 모델에 직접적으로 메쉬를 구성하지 않고 매듭값들에 의해 결정되는 파라미터영역(parametric domain)에서 메쉬를 구성하게 된다. 메쉬의 세분화 역시 파라미터 영역에서 진행되며 해석 모델은 파라미터 영역에 대응되어 각각의 부영역(subdomain)들로 영역이 나뉘게 된다. 이러한 부영역은 수치적분 영역으로 사용된다. Fig.3 에 파라미터 영역과 해석 모델 간의 관계를 나타내었다.

3.2 세분화(refinement) 과정

스플라인 기반 유한요소해석에서 세분화 과정은 매듭값 추가(knot insertion)를 통한 세분화와 기저함수 차수의 증가(order elevation)를 통한 세분화가 있으며 두 가지 방법을 조합한 세분화 방법도 구성할 수 있다.

매듭값 추가(knot insertion)를 통한 세분화의 경우는 기존 유한요소법의 h -세분화와 같은 개념으로 중간 값의 매듭을 추가하고 조정점을 추가함으로써 요소의 증가를 얻을 수 있다. 기저함수의 차수 증가를 통한 세분화는 p -세분화와 유사한 개념으로 조정점을 추가하고 매듭값의 양 끝에 최대, 최소 매듭값을 추가함으로써 기저함수의 차수를 증가시킬 수 있다. 이러한 세분화 방법을 Fig. 3 과 4 에 나타내었다.

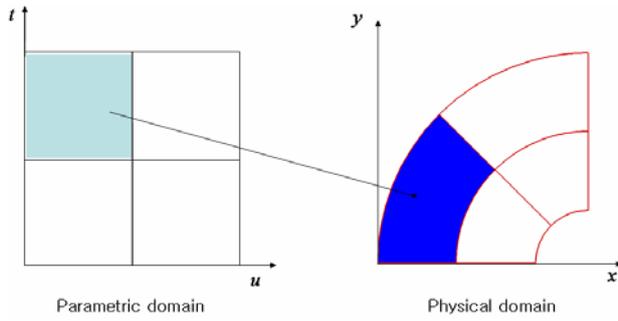


Fig. 2 The relation between the element of parametric domain and the element of physical domain

3.3 경계조건 부여

경계조건 적용에서 디리클레(Dirichlet) 경계조건인 경우 조정점에 그 값을 직접 주는 경우가 가장 간단한 형태이다. 그러나 불균일한 디리클레 경계조건을 줄 경우에는 NURBS 를 구성하는 수식을 통해서 근사 값을 계산하여 각 조정점에 계산된 값을 부여하여야 한다. 경계곡선이 유지되는 형태로 경계조건이 부여되는 경우는 기존의 유한요소법과 같은 방법으로 디리클레 경계조건을 부여할 수 있다.

노이만(Neumann) 경계조건의 경우에는 기존의 유한요소법에서 적용하는 방식을 사용하여 조정점에 값을 부여하면 된다.

3.4 수치적분(numerical integration)

수치적분법은 기존의 유한요소해석 방법과 마찬가지로 가우스 구적법(Gauss quadrature rule)을

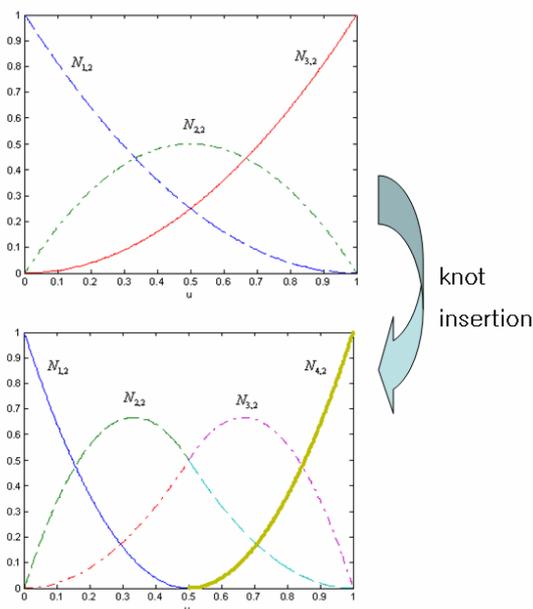


Fig. 3 Knot insertion : h-refinement

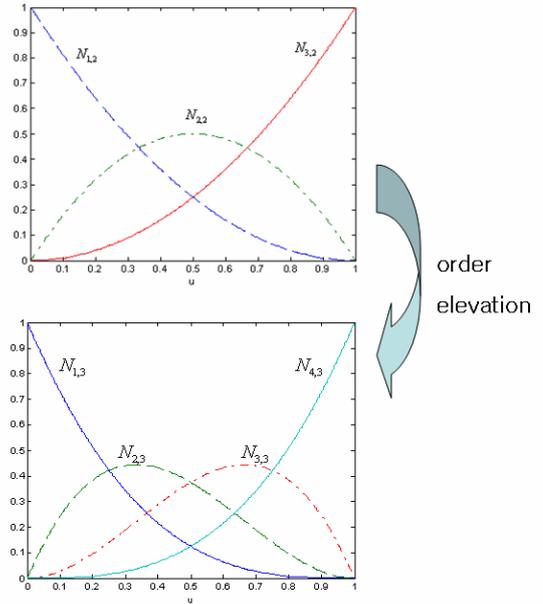


Fig. 4 Order elevation : p-refinement

사용한다. 매개변수 영역에서 가우스 구적법을 사용하게 되면 각 요소마다 적분점의 위치가 달라지므로 가우스 구적법 사용이 용이하지 못하다. 이러한 불편함을 없애기 위해서 기존의 유한요소해석 방법에서의 마스터 요소(master element) 개념을 도입한다. 매개변수 영역에서의 요소는 간단한 선형 사상(mapping)을 통해 마스터 요소로 표현이 가능하다. 매개변수 영역과 물리적 영역, 그리고 마스터 요소의 영역은 서로 사상이 가능하므로 물리적 영역은 마스터 요소를 이용하여 적분을 수행할 수 있다. Fig. 5 에 수치적분 시 사상 관계를 나타내었다.

NURBS 기저함수의 가중치가 1 로 균일한 경우는 기저함수가 다항식 형태이므로 가우스 구적법을 이용하여 정확한 적분을 수행할 수 있으나 가중치가 불균일한 경우 기저함수가 분수함수형태를 취하게 되므로 가우스 구적법으로 정확하게 적분을 수행할 수 없다. 따라서 적분의 정확성 향상을 위한 추가적인 연구가 필요할 것으로 판단된다.

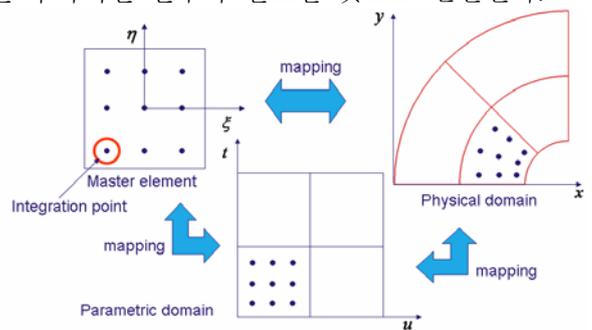


Fig. 5 Numerical integration : mapping

3.5 수치 예제 (numerical example)

스플라인 기반 유한요소 해석의 정확성과 수렴 특성을 확인하기 위해 해석해가 있는 예제에 적용하였다. 내압이 작용하는 무한히 긴 원통 문제를 선택하였고 대칭성을 고려하여 1/4 모델의 해석을 수행하였다. 문제 정의는 Fig. 6 과 같고 사용된 재료의 탄성계수는 $73.1GPa$, 포와송 비는 0.35 이다.

CAD 로부터 얻은 형상 정보를 이용하여 최소의 메쉬를 구성하고 3.2 에서 기술한 매듭값 추가를 통한 세분화를 수행하여 해석에 충분한 메쉬를 얻게 되는 과정을 Fig. 7 에 나타내었다.

Fig. 8(a)에 스플라인 기반 유한요소해석의 수렴율을 나타내었다. 결과에서 볼 수 있듯이 기존 유한요소법의 수렴율과 같은 수치를 나타내었다. Fig. 8(b)의 결과에서 스플라인 기반 유한요소법이 적은 수의 자유도로 더욱 정확한 결과를 얻을 수 있음을 확인할 수 있다.

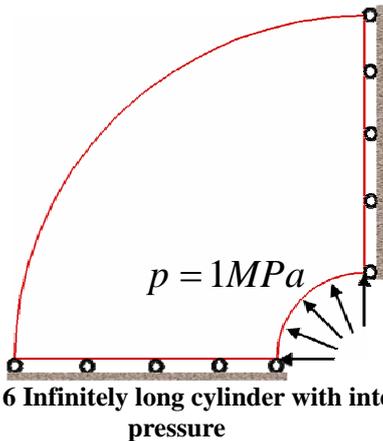


Fig. 6 Infinitely long cylinder with internal pressure

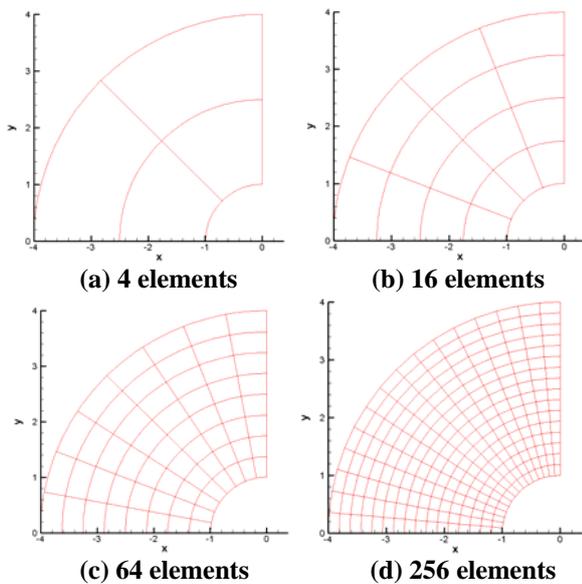
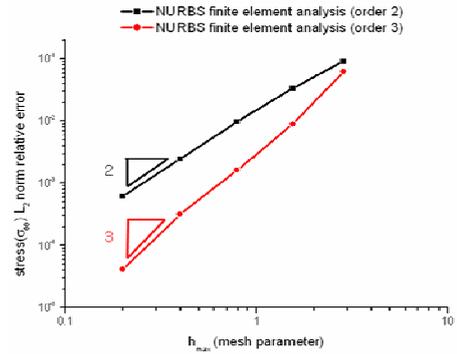
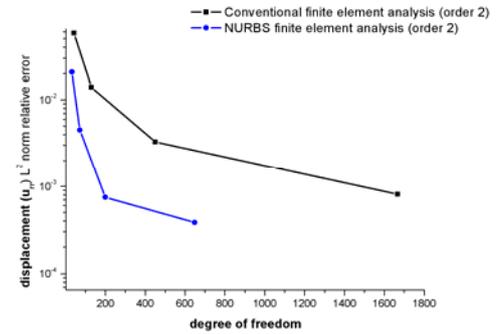


Fig. 7 Refinement procedure



(a) Rate of convergence



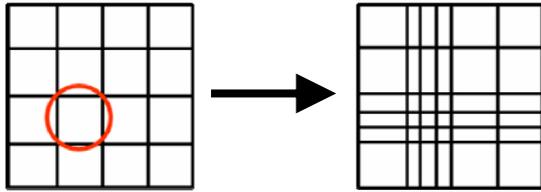
(b) Comparison with FEM

Fig. 8 Results of spline based FEA

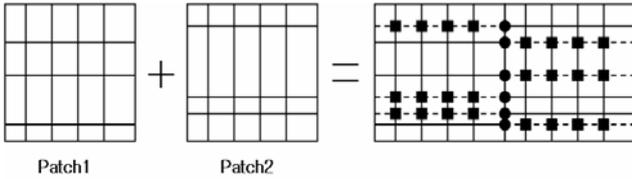
4. T-스플라인 유한요소해석

4.1 NURBS 의 비효율성

3 장에서 NURBS 를 사용한 유한요소해석을 통해 방법의 정확성을 검증하였다. 그러나 NURBS 는 형상 모델링에서 국부세분화를 할 수 없는 단점과 함께 서로 다른 패치의 결합이 용이하지 않은 단점을 가지고 있다. NURBS 는 격자 기반 스플라인(grid based spline)이기 때문에 매듭값 혹은 조정점이 추가되었을 때 매개변수 영역에서 매듭값에 해당하는 열 또는 행에 대해서 조정점을 모두 추가시켜 주어야 한다.⁽³⁾ 스플라인 곡선의 경우는 곡선이 조정점과 기저함수의 선형 결합으로 표현되기 때문에 곡선을 국부적으로 세분화할 수 있다. 그러나 곡면 이상의 경우에는는 각 방향 기저함수들의 텐서곱으로 표현되어 진정한 의미의 국부 세분화가 수행될 수 없다. NURBS 는 진정한 의미의 국부 세분화를 수행할 수 없으므로 관심 영역에 대한 세분화를 위해서는 모든 영역에 대해서 세분화가 진행되어야 한다. 서로 다른 메쉬를 구성하고 있는 패치 간의 결합에서도 NURBS 는 비효율성을 지닌다. 즉, 패치 간의 적합성 보장을 위해 결합되는 경계에서의 매듭값과 조정점을



(a) Inefficiency in local refinement



(b) Inefficiency in merging patches

Fig. 9 Inefficiency of NURBS

일치시키더라도 새롭게 추가되는 매듭값과 조정점에 해당되는 열 또는 행에 조정점들이 모두 새롭게 추가되어야 하므로 비효율적인 패치 결합이 진행된다. 언급한 NURBS의 비효율성을 Fig. 9에 나타내었다.

4.2 T-스플라인(T-spline)

국부세분화와 패치결합에 비효율적인 NURBS의 문제점을 개선하기 위해 점 기반 스플라인(PB-spline)의 개념이 도입되었다. 그러나 임의의 점 기반 스플라인은 NURBS 정보를 이용할 수 없기 때문에 CAD 정보를 받아들일 수 없다. 따라서 NURBS의 정보를 활용할 수 있는 점 기반 스플라인의 개발이 요구되었고 이러한 이유로 T-스플라인이 제안되었다. 스플라인의 기저함수는 서로 독립적인 매듭벡터를 가질 수 있다는 사실에 근거하여 독립적인 매듭벡터를 갖는 조정점들을 이용하여 T-스플라인을 표현하였다. T-스플라인은 격자에 제한되지 않고 국부적으로 조정점을 추가할 수 있기 때문에 텐서곱 형태가 아닌 단순 선형 결합으로 표현될 수 있다.

$$\mathbf{C}(u, t) = \frac{\sum_{i=1}^n B_i(u, t) \mathbf{p}_i}{\sum_{i=1}^n B_i(u, t)} \quad (5)$$

여기에서 \mathbf{p}_i 는 점 기반 스플라인에서의 조정점들을 의미하고 B_i 는 점 기반 스플라인의 기저함수를 의미하며 다음과 같이 표현된다.

$$B_i(u, t) = N_{i,p}(u) N_{i,p}(t) \quad (6)$$

식 (6)에서의 $N_{i,p}(u)$ 와 $N_{i,p}(t)$ 는 각각 다음과 같은 매듭벡터에 관련되어 있는 B-스플라인 기저함수이다.

$$\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_{p+2}\}, \quad \mathbf{t} = \{t_1, t_2, \dots, t_{i+p}\} \quad (7)$$

T-스플라인은 T-메쉬라는 불규칙한 메쉬 형태를 허용하여 점 기반 스플라인 특성을 만족하면서 NURBS의 정보와 특성을 부분적으로 사용할 수 있기 때문에 매우 유용하다.

4.3 T-스플라인 유한요소해석

스플라인 기반 유한요소해석에 T-스플라인을 도입하는 것은 매우 단순하다. 파라미터 영역이 균일한 격자 형태를 이루는 경우 T-스플라인과 NURBS는 일치하기 때문에 CAD에서 NURBS 정보를 받아 전역적으로 세분화를 해주는 것은 기존의 스플라인 기반 유한요소해석과 같다. 여기서 국부세분화나 패치결합을 수행할 경우 T-스플라인을 도입하여 효율성을 증대시킬 수 있다. 유한요소해석을 위한 적분이나 경계조건 부여 등은 기존의 스플라인 기반 유한요소해석과 같기 때문에 생략하며 수치예제를 통하여 효율성을 검증한다

4.3.1 국부세분화 문제 : 응력 집중

타원형 구멍이 있는 평판 문제를 수치 예제로 선택하였다. 이 문제는 타원형 구멍에서 응력 집중이 발생하므로 정확한 해석을 위해 응력 집중부 근처에서 세분화를 해주어야 한다. 문제 정의는 Fig. 10과 같고 사용된 재료의 탄성계수는 73.1GPa, 포와송비는 0.35이다.

Fig. 11에 같은 영역을 국부적으로 세분화한 메쉬 형태를 나타내었다. 그림에서 볼 수 있듯이

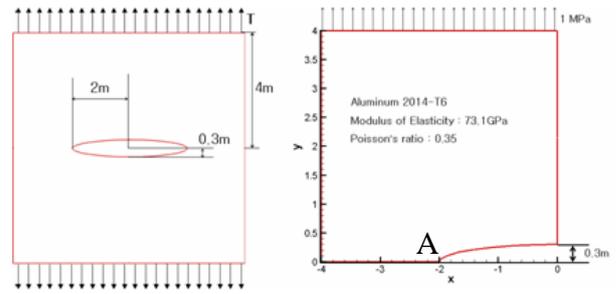


Fig. 1 Problem definition of the plate with a elliptic hole

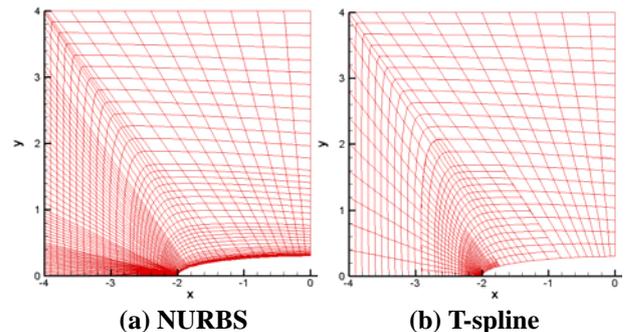


Fig. 11 Comparison of NURBS and T-spline : mesh configuration after local refinement

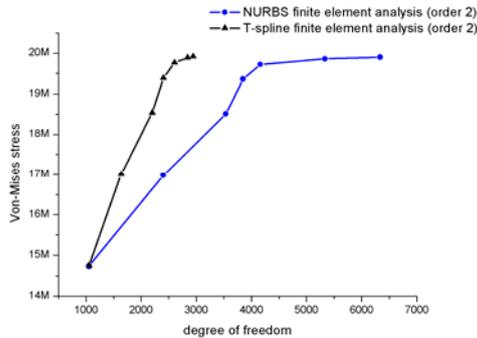


Fig. 12 Von-Mises stress at point A

NURBS 를 이용하여 국부세분화를 수행한 경우 전역적으로 세분화가 진행된 반면, T-스플라인을 이용하여 진정한 의미의 국부세분화를 수행할 수 있었다. Fig. 12 는 응력이 집중되는 지점에서의 응력 값을 나타낸 그래프이다. T-스플라인을 사용한 경우 적은 자유도를 사용하였음에도 보다 정확한 응력을 효율적으로 도출할 수 있었다.

4.3.2 패치 결합 문제

패치 결합의 효율성을 검증하기 위한 예제는 Fig. 13 과 같다. 문제의 대칭성을 고려하여 1/2 모델을 해석 모델로 선정하고 해석 모델은 Fig. 14 와 같이 2 개의 패치로 구성되어있다. 재료 상수는 이전의 예제와 같다.

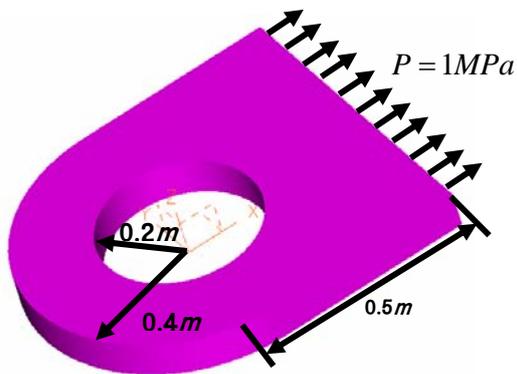


Fig. 13 Problem definition for merging patch

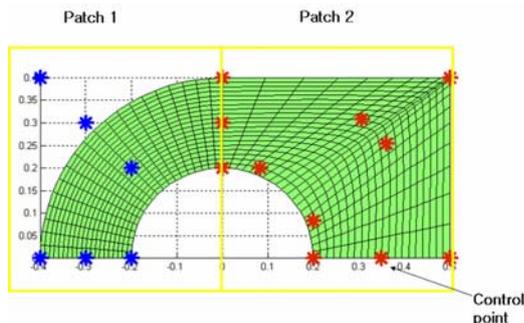


Fig. 14 Two patches

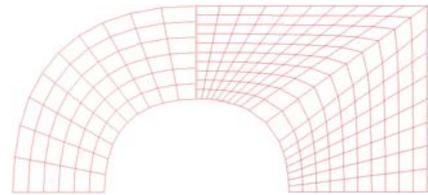


Fig. 15 Initial mesh configurations of both patches

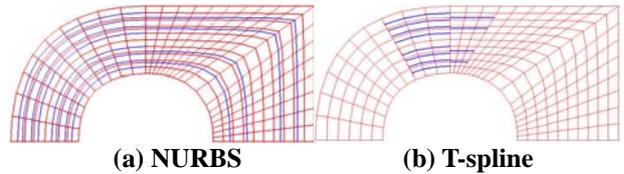


Fig. 16 Final meshes of both patches

각 패치의 초기 메쉬 형태는 Fig.15 와 같이 결합부에서 서로 적합성이 보장되지 않는다. NURBS 와 T-스플라인을 이용하여 두 패치를 결합한 결과를 Fig.16 에 나타내었다. 그림에서 보듯이 NURBS 를 사용한 경우 전역적으로 조정점이 추가된 반면, T-스플라인을 사용한 경우 결합부 근처에서만 조정점이 추가되었다. 즉, T-스플라인을 이용하여 매우 효율적인 패치결합을 수행할 수 있었다.

5. 결 론

본 연구에서는 국부세분화와 패치결합에 매우 효율적인 스플라인 기반 유한요소해석에 관한 연구를 수행하였다. 기존에 제안된 스플라인 기반 유한요소해석이 기존 유한요소법에 비해 보다 정확함을 보였고 T-스플라인을 이용하여 효율적인 국부세분화와 패치결합 방법을 제안하였다.

참고문헌

- (1) T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell and Y. Bazilevs, 2005, "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement," *CMAME*, Vol 194, pp. 4135-4195.
- (2) J.A. Cottrell, A. Reali, Y. Bazilevs and T.J.R. Hughes, 2006, "Isogeometric analysis of structural vibrations," *CMAME*, Vol 195, pp. 5257-5296.
- (3) T.W. Sederberg, J. Zheng, A. Bakenov and A. Nasri, 2003, "T-splines and T-NURCCs," *ACM transactions on graphics*, Vol 22, No. 3, pp. 477-484.
- (4) T.W. Sederberg, D.L. Cardon, G.T. Finnigan, N.S. North, J. Zheng and T. Lyche, 2004, "T-spline Simplification and Local Refinement," *ACM transactions on graphics*, Vol 23, No. 3, pp. 276-283.