

# MEMS 공진기의 고주파 응답해석을 위한 고효율 해석기

고진환<sup>†</sup> · Zhaojun Bai<sup>\*</sup>

## A high Efficient Solver for High-Frequency Response Analysis of MEMS Resonators

Jin Hwan Ko and Zhaojun Bai

**Key Words :** High-Frequency Response Analysis (고주파 응답해석), MEMS resonator (MEMS 공진기), Algebraic Substructuring (대수학 부구조법), Frequency Sweep Algorithm (주파수 스위프 알고리즘)

### Abstract

A modern MEMS resonator is a micro-scale structure operated over a high frequency range. In order to predict its resonant behavior in a design process, High-frequency response analysis (Hi-FRA) is demanded. Algebraic substructuring (AS) is known as a fast numerical technique to construct an eigenspace for FR and frequency sweep (FS) algorithm efficiently solves the frequency response system projected on the eigenspace. However, the existing FS algorithm using AS is developed for low-FRA, say over the range 1Hz-2KHz.

In this work, we extend the FS algorithm using AS for FRA over an arbitrary frequency range. Therefore, it can be efficiently applied to systems operated at a high frequency, say over the range 230MHz-250MHz. The success of the proposed method is demonstrated by Hi-FRA of a checkerboard resonator.

### 1. 서론

주파수 응답해석 (Frequency Response Analysis: FRA)은 일정 주파수 영역의 가진 하중에 대한 구조의 응답을 계산함으로써 공진 거동을 예측하는 방법이다. MEMS 시스템의 공진 센서들이나 다른 초소형 구조들은 고주파 영역에서의 공진 거동을 이용한다. 그러므로 고주파 FRA는 이런 초소형 구조들에서 요구된다.

이 연구에서 고려한 구조의 유한요소 분할 모델은 다음의 단일 입출력 2 차 시스템에 적용된다.

$$\begin{cases} M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = bu(t) \\ y(t) = l^T x(t) \end{cases} \quad (1)$$

여기서  $x(0) = x_0$  이고  $\dot{x}(0) = v_0$  이다. 그리고  $t$  는 시간 변수,  $x(t) \in \mathbb{R}^N$  는 공간 벡터이고,  $N$  은 자유도 개수이다. 또한  $u(t)$ 는 입력 가진 하중이고

$y(t)$ 는 출력 함수이다.  $b \in \mathbb{R}^N$  와  $l \in \mathbb{R}^N$  은 입력과 출력 분산 벡터이다. 끝으로  $M, K, D \in \mathbb{R}^{N \times N}$  은 시스템 질량, 강성 그리고 댐핑 행렬들이다.

유한요소로 분할되는 경우  $M$  과  $K$  는 대칭 양정치 행렬이 된다. 이 때 시스템의 입력-출력거동을 변환함수(Transfer Function)으로 표현한다.

$$H(\omega) = l^T (-\omega^2 M + i\omega D + K)^{-1} b \quad (2)$$

여기서  $\omega$  는 주파수이고  $i = \sqrt{-1}$  이다. 수학적으로 저주파 FRA는 최대 KHz까지의 주파수 영역 즉  $[1, \omega_{\max}]$ 에서의 변환함수를 계산하는 것이고 고주파 FRA는 MHz의 임의의 고주파수 영역 즉  $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ 에서 계산된다.

시스템 (1)의 많은 DOF 때문에, 관심 영역에서의 다수의 주파수  $\omega_k$ 에서  $H(\omega_k)$ 를 직접 계산하는 것은 권장되지 않는다. 그래서 고유치 해석의 고유모드를 기저로 사용하는 FRA 방법인 모드 중첩법이 주로 사용된다.

이를 위해 행렬 쌍  $(K, M)$ 의 다음 고유치 문제에서 모드를 추출한다.

$$Kq_k = \lambda_k Mq_k \quad (3)$$

여기서  $q_k^T Kq_k = \lambda_k$  그리고  $q_k^T Mq_k = 1$  이다. 다음은 변환함수  $H(\omega)$ 를 부공간  $span\{Q_n\} = span$

<sup>†</sup> 책임저자, 회원, 건국대학교 항공우주 공학과

E-mail: jhko@invest.konkuk.ac.kr

TEL.: (02)456-6045, FAX: (02)444-6106

\* Computer Science, University of California in Davis

$\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ 으로 사영함으로써 다음식이 유도된다.

$$H_n(\omega) = l_n^T (-\omega^2 I_n + \omega D_n + \Lambda_n)^{-1} b_n \quad (4)$$

여기서  $\Lambda_n = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ ,  $D_n = Q_n^T D Q_n$ ,  $l_n = Q_n^T l$  그리고  $b_n = Q_n^T b$ 이다.

부구조법은 이른 1960 년대에 처음으로 개발된 방법으로 최근 몇 년 동안 다시 부각 되었으며 고성능의 동적 해석기인 자동 다수준 부구조법 (Auto-mated Multilevel Substructuring: AMLS) [1,2]이 제안되었다. 이는 구조를 반복적으로 다수의 부구조로 분할하고 부구조들은 효율적으로 혹은 병렬적으로 처리가 된다. 이 AMLS 방법의 대수학 접근법인 대수학 부구조법 (Algebraic Substructuring: AS)은 [3,4]에서 연구되었다. AMLS 은 최소 고유모드를 필요로 하는 저주파 FRA 에서 성공적으로 적용되어왔다 [2].

그러나 AMLS 를 이용한 고주파 FRA 로의 직접 적용에서는 요구되는 고유치 모드 개수가 급격하게 증가할 수 있어서 계산상으로 비효율적이다. 이 연구에서, 고주파 FRA 를 위해 AMLS 의 확장된 방법을 제안한다. AMLS 의 경우는 상용 코드로 이용 불가하기 때문에 AS 코드가 대신 사용되었다. 그리고 이를 FRA 에 적용 가능하도록 확장한 AS 방법을 제안한다.

## 2. 대수학 부구조법

고주파 FRA 을 위해서 작동 범위에 가까운 고유 주파수 (Natural Frequency)들에 해당되는 고유 모드가 더욱 중요하다. 그래서 다음의 이동된 고유치 문제에서 시작한다.

$$K^\sigma q = \lambda^\sigma M q \quad (5)$$

여기서  $K^\sigma = K - \sigma M$  이고  $\lambda^\sigma = \lambda - \sigma$  이다.  $\sigma$  는 주파수 영역  $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ 에 관련해서 결정되는 이동값이다. 이동값을 정하는 기준에 대해서는 나중에 논의된다. 행렬 쌍  $(K^\sigma, M)$  은 부구조법에 의해 다음과 같이 분할된다.

$$K^\sigma = \begin{matrix} & N_1 & N_2 & N_3 \\ \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} K_{11}^\sigma & & K_{13}^\sigma \\ & K_{22}^\sigma & K_{23}^\sigma \\ K_{31}^\sigma & K_{32}^\sigma & K_{33}^\sigma \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (6)$$

$$M = \begin{matrix} & N_1 & N_2 & N_3 \\ \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} M_{11} & & M_{13} \\ & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

여기서  $\{K_{11}^\sigma, M_{11}\}$ 와  $\{K_{22}^\sigma, M_{22}\}$ 는 경계  $\{K_{33}^\sigma, M_{33}\}$ 로 연결되는 두 개의 부구조이다. 단순성을 위해

우리는 단일 수준의 부구조를 기술하였고 다수준의 경우는 Gao [4]의 논문에서 나타나 있는 동일한 방법으로 이동된 행렬에 적용 가능하다.

다음은  $K^\sigma$ 의 블록 LDL<sup>T</sup> 행렬분할에 의해서 즉  $K^\sigma = L^T \hat{K}^\sigma L$ , 이동된 고유치 문제는 다음과 같이 변환된다.

$$\hat{K}^\sigma \hat{q} = \lambda^\sigma \hat{M} \hat{q} \quad (7)$$

여기서  $\hat{K}^\sigma$ 와  $\hat{M}$ 는 Craig-Bampton 형태 [5]로 나타내어진다.

$$\hat{K}^\sigma = L^T K^\sigma L^{-1}, \hat{M} = L^T M L^{-1} \quad (8)$$

AS 의 다음 과정은 위의 행렬의 강성, 질량행렬들을 이용하여 고유치 문제들을 구성한 후  $\mu_{\min}$ 과  $\mu_{\max}$  국부 컷오프값 안에 있는 고유모드를 추출한다. 이를 국부 모드라고 설정한다. 추출된 국부 모드를 열로 사용하고 이로서 구성되는 사영행렬은 다음과 같다.

$$S = \begin{matrix} & m_1 & m_2 & m_3 \\ \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} S_1 & & \\ & S_2 & \\ & & S_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (9)$$

여기서  $S_1, S_2$  그리고  $S_3$ 는 각 부구조와 경계에서 추출된 고유벡터들로 구성된다.

기존의 고유치문제를 사영행렬로 이루어진 부공간에 사영을 하게 되면  $m = m_1 + m_2 + m_3$ 로 축소된 고유치 문제가 구성된다.

$$K_m^\sigma \phi = \theta^\sigma M_m \phi \quad (10)$$

여기서  $K_m^\sigma = S^T \hat{K}^\sigma S$ 이고  $M_m = S^T \hat{M} S$ 이다. 이 때  $\phi$ 는 전역 모드로 명명한다. 이런 전역모드는 추출모드와 절단모드로 무리 지어지고 전역 컷오프값인  $\lambda_{\min}$ 과  $\lambda_{\max}$ 에 의해 선택된다. 전체 전역모드는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Phi = \{\phi\} = [\Phi_l, \Phi_n, \Phi_r] \quad (11)$$

여기서  $\Phi_n$ 은 추출모드이며  $\Phi_l$ 과  $\Phi_r$ 는 각각 전역 컷오프값의 왼쪽 오른쪽에 위치하는 절단 모드들이다. 이 때  $\Phi_l$ 를 전체 절단모드로 표시한다.

$$\Phi_l = \Phi_l + \Phi_r \quad (12)$$

변환행렬과 사영행렬의 곱으로 나타내어지는 부공간 행렬  $L^{-1}S$ 는 AS 부공간으로 규정한다.

## 3. 주파수 스위프 알고리즘

아래와 같이 Rayleigh 댐핑 모델을 사용한다고 가정하고

$$D = \alpha M + \beta K \quad (13)$$

이동  $\sigma$ 을 고려한 변환 함수  $H(\omega)$ 는 다음과 같이 쓰여진다.

$$H(\omega) = l^T [\gamma_1 K^\sigma + \gamma_2 M]^{-1} b \quad (14)$$

여기서  $\gamma_1 = \gamma_1(\omega) = 1 + i\omega\beta$  이고  $\gamma_2 = \gamma_2(\omega, \sigma) = -\omega^2 + \sigma + i\omega(\alpha + \sigma\beta)$  이다. 다음으로  $H(\omega)$  을 AS 부공간으로 사영하면 다음 식을 얻는다.

$$H_m(\omega) = l_m^T [\gamma_1 K_m^\sigma + \gamma_2 M_m]^{-1} b_m \quad (15)$$

여기서  $b_m = (L^T S)^T b$ ,  $l_m = (L^T S)^T l$  그리고  $p_m$  은  $m$  미지수의 다음 선형 시스템의 해이다.

$$G_m(\omega) p_m = b_m \quad (16)$$

여기서  $G_m(\omega) = \gamma_1 K_m^\sigma + \gamma_2 M_m$  이다. AS 으로 축소된  $m$  은 주파수 응답을 직접 계산하기에 여전히 큰 경우가 전형적이다. 그래서 AMLS 에 적합한 주파수 스위프 (Frequency Sweep: FS) 알고리즘으로 불리는 방법을 제안하였다 [2]. 제안된 FS 는 단지 저주파수 모드만을 추출하였고 모든 고주파수 모드들은 절단하였다. 그러나 고주파 FRA 의 효율성을 높이기 위해서는 관심 영역  $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$  에 해당되는 전역모드들을 추출할 수 있는 기능이 중요하다.

이를 위해 먼저 해에 해당되는  $p_m(\omega)$  를  $p_m(\omega) = p_n(\omega) + p_t(\omega)$  로 근사 한다. 여기서  $p_n(\omega)$  는 추출 전역모드로서  $\Phi_n$  으로 표현되는 부공간에 속하며  $p_t(\omega)$  는 절단 전역모드로서  $\Phi_1$  과  $\Phi_r$  로 표현되는 부공간에 속한다. 임의의 계수 벡터  $\eta_n(\omega)$  를 정하면 추출모드에 해당하는 해는  $p_n(\omega) = \Phi_n \eta_n(\omega)$  로 근사 한다. 이 때 식 (16)은 다음과 같이 쓰여진다.

$$G_m(\omega)(\Phi_n \eta_n(\omega) + p_t(\omega)) = b_m. \quad (17)$$

이 식의 양쪽 앞에  $\Phi_n^T$  를 곱하면 전역 모드의 수직성에 의해 벡터  $p_n(\omega)$  는  $n$  개의 비 연결 방정식들로 바로 바뀐다.

$$\begin{aligned} p_n(\omega) &= \Phi_n (\Phi_n^T G_m(\omega) \Phi_n)^{-1} \Phi_n^T b_m \\ &= \Phi_n (\gamma_1 \Theta_n^\sigma + \gamma_2 I)^{-1} \Phi_n^T b_m \end{aligned} \quad (18)$$

따라서 식 (17)은  $p_t(\omega)$  에 대해 다음과 같은 선형 시스템으로 쓰여진다.

$$G_m(\omega) p_t(\omega) = b_m - G_m(\omega) p_n(\omega) \quad (19)$$

절단모드들이 FRA 의 정확성에 미치는 영향은 추출모드에 비해서는 현저하게 작기 때문에  $p_t^\ell(\omega) = p_t^{\ell-1}(\omega) + \Delta p_t^\ell(\omega)$  와 같은 간단한 축차 수정 방법이  $p_t(\omega)$  을 계산하는데 사용된다. 여기서 보정 항인  $\Delta p_t^\ell(\omega)$  는 다음의 수정 방정식의 해로 구한다.

$$G_m(\omega) \Delta p_t^\ell(\omega) = r_m^{\ell-1}(\omega) \quad (20)$$

여기서  $r_m^{\ell-1}(\omega) = b_m - G_m(\omega)(p_n(\omega) + p_t^{\ell-1}(\omega))$  에 의해 계산되며 이 것은  $(\ell-1)$  번째 잉여 벡터이다.

수정 방정식의 해를 구하기 위해서 Galerkin 부공간 사영 기법을 이용한다, 즉 다음 식을 만족하는  $\Delta p_t^\ell(\omega)$  를 구한다.

$$\begin{aligned} \Delta p_t^\ell(\omega) &\in \text{span}\{\Phi_t\} \text{ and} \\ G_m(\omega) \Delta p_t^\ell(\omega) - r_m^{\ell-1}(\omega) &\perp \text{span}\{\Phi_t\}. \end{aligned} \quad (21)$$

일련의 대수학 과정을 통해서 다음 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \Delta p_t^\ell(\omega) &= \Phi_t (\gamma_1 \Theta_t^\sigma + \gamma_2 I)^{-1} \Phi_t^T r_m^{\ell-1}(\omega) \\ &= \left[ (\gamma_1 K_m^\sigma + \gamma_2 M_m)^{-1} - \Phi_n (\gamma_1 \Theta_n^\sigma + \gamma_2 I)^{-1} \Phi_n^T \right] r_m^{\ell-1}(\omega). \end{aligned} \quad (22)$$

$K_m^\sigma$  이 대각행렬임을 인지하고 계산적 효율성을 위해 다음 근사를 수정항  $\Delta p_t^\ell(\omega)$  을 계산하는데 이 용한다.

$$\Delta p_t^\ell(\omega) \approx \Phi_t (\gamma_1 \Theta_t^\sigma)^{-1} \Phi_t^T r_m^{\ell-1}(\omega) \quad (23)$$

따라서, 다음 축차 수정 과정이  $p_t(\omega)$  의 근사값을 계산하는 목적으로 이용된다.

$$p_t^\ell(\omega) = p_t^{\ell-1}(\omega) + \frac{1}{\gamma_1} \left[ (K_m^\sigma)^{-1} - \Phi_n (\Theta_n^\sigma)^{-1} \Phi_n^T \right] r_m^{\ell-1}(\omega) \quad (24)$$

여기서 초기 근사값  $p_t^0(\omega)$  을 가지고  $\ell=1,2, \dots$  에 대해서 계산된다. 실용적인 수렴 기준은 상대적인 잉여오차에 근거한 다음 부등식이 이용된다.

$$\|\Delta p_t^\ell(\omega)\|_2 / \|(\gamma_1 K_m^\sigma)^{-1} b_m\|_2 \leq \varepsilon \quad (25)$$

여기서  $\varepsilon$  는 주어진 공차이다. 수렴 후 해는  $p_t^*(\omega)$  로 나타낸다.

$n_f$  의 주파수 점들에서 응답이 계산된다고 가정 하면, 즉  $\omega_{\min} \leq \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{n_f} \leq \omega_{\max}$  에서 계산될 때 각  $\omega_k$  점들에서 초기값  $p_t^0(\omega_k)$  은  $k=3,4,\dots,n_f$  의 경우 선형 외삽(Extrapolation)에 의해 구해지고 처음 2 개의 주파수에서는  $p_t^0(\omega_1) = 0$ ,  $p_t^0(\omega_2) = p_t^*(\omega_1)$  으로 구해진다. 그러면 모든 초기 값은  $p_t^0(\omega_k) \in \text{span}\{\Phi_t\}$  을 만족하므로 축차 과정 (24)에 의해 구해진  $p_t^\ell(\omega)$  는 벡터  $p_n(\omega)$  에 수직함이 보증된다.

이제 축차 과정 (24)의 수렴의 보증하기 위해서 추출 전역모드들의 영역  $[\lambda_{\min}^\sigma, \lambda_{\max}^\sigma]$  와 관심 주파수 영역  $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$  과의 관계식이 필요하다. 식 (25)에 의해 다음의 부등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \|\Delta p_t^\ell(\omega)\|_2 &\approx \|\Phi_t (\gamma_1 \Theta_t^\sigma)^{-1} \Phi_t^T r_m^{\ell-1}(\omega)\|_2 \\ &\leq \|\Phi_t (\gamma_1 \Theta_t^\sigma)^{-1}\|_2 \| \Phi_t^T r_m^{\ell-1}(\omega) \|_2. \end{aligned} \quad (26)$$

여기서 항  $\Phi_t^T r_m(\omega)$  은 절단모드 잉여(Truncated Modal Residual)로 설정한다. 일련의 대수학 과정들에 의해 축차 과정 중의 절단모드 잉여들은 다음 관계를 만족하게 된다.

$$\Phi_t^T r_m^\ell(\omega) = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \begin{bmatrix} \Theta_t^\sigma & \\ & \Theta_r^\sigma \end{bmatrix}^{-1} \Phi_t^T r_m^{\ell-1}(\omega) \quad (27)$$

그러므로 축소비(Contraction Ratio)로 규정되는

양수  $\xi$  값을 도입하여 절단모드 잉여 비를 조절할 수 있는 다음 부등식을 유도한다.

$$\left| \frac{\phi_k^T r_m^\ell(\omega)}{\phi_k^T r_m^{\ell-1}(\omega)} \right| = \frac{d(\omega, \sigma)}{|\theta_k^\sigma|} \leq \frac{d_{\max}}{|\theta_k^\sigma|} \leq \xi < 1 \quad (28)$$

여기서  $\phi_k \in \Phi_l$ ,  $d(\omega, \sigma) = |-\gamma_2/\gamma_1|$ , 그리고  $d_{\max} = \max\{d(\omega_k, \sigma), 1 \leq k \leq n_f\}$  이다. 그런 다음 절단모드 잉여의 각 성분들이 축소되고 보정 항의 높(Norm)이 줄어들며 최종적으로 축차 과정 (24)이 수렴하게 된다. 부등식 (28)에 의해 범위  $[-d_{\max}/\xi, d_{\max}/\xi]$  밖에 있는 전역모드들은 컷오프된다. 즉 전역 컷오프 값은 다음 식으로 결정된다.

$$\lambda_{\min}^\sigma = -d_{\max}/\xi \text{ and } \lambda_{\max}^\sigma = d_{\max}/\xi \quad (29)$$

이동이 고려되는 않은 경우 즉  $\sigma=0$ , 하위 전역 컷오프값  $\lambda_{\min}^\sigma$ 이 0 보다 작아지게 된다. 이것은  $\lambda_{\max}^\sigma$  보다 작은 모든 저주파수 모드들이 추출된다는 것을 의미한다.

#### 4. ASFRA

고유치쌍을 추출하기 위한 AS 방법과 주파수 스위프 축차 방법을 결합하여 주파수 응답  $H(\omega_k)$ 을 계산하는 알고리즘을 유도할 수 있고 이를 ASFRA 로 규정한다. 이 장에서는 ASFRA 의 파라미터들의 선택기준에 대해 간략하게 논의하도록 한다. 자세한 내용은 다음 연구에서 기술 될 것이다.

먼저 이동의 경우 관심영역에 근접한 고유치의 정확성을 위해  $\sigma \in [\omega_{\min}^2, \omega_{\max}^2]$ 를 만족하여야 한다. 또한 추출되는 전역 모드의 범위를 최소화하기 위해서 주파수 범위의 중앙이 사용되어야 한다.

$$\sigma = \frac{1}{2}(\omega_{\max}^2 + \omega_{\min}^2) \quad (30)$$

식 (29)에 의해서, 전역 컷오프 값인  $\lambda_{\min}^\sigma$ 와  $\lambda_{\max}^\sigma$ 는 기본적으로 축소비  $\xi$ 에 의해 결정된다. 그리고 FS 축차 과정 (24)의 수렴성의 향상을 위해서 축소비는 작은 값이 선호된다. 그러나 이는 추출되는 전역 변수의 수를 늘리는 결과를 가져와서 효율성에 악영향을 미친다. 그래서 수치 실험에서 조율된 적합한 축소비는  $\xi=0.5$ 를 사용한다.

구하고자 하는 고유모드의 수와 정확성은 국부 모드의 추출과 밀접하게 관계되어 있고 이는 AS 알고리즘의 연구에서 중요한 이슈가 되어 왔다 [3]. 전역 모드의 원하는 수준의 정확성을 획득하기 위해서는 다수의 국부모드들이 필요하게 된다. 국부 컷오프 값인  $\mu_{\min}^\sigma$ 과  $\mu_{\max}^\sigma$ 는 일반적으로 전역 컷오프 값  $\lambda_{\min}^\sigma$ 과  $\lambda_{\max}^\sigma$ 에 비례해서 결정된다. 즉

$$\mu_{\min}^\sigma = c_l \lambda_{\min}^\sigma, \mu_{\max}^\sigma = c_u \lambda_{\max}^\sigma \quad (31)$$

여기서  $c_l$ 와  $c_u$ 는 확장 계수로 명명한다.  $c_l$ 와  $c_u$

이 증가하게 되면 전역모드의 정확성이 일반적으로 향상된다. 그래서 최근의 연구결과에서 사용된 값을 기본값으로 사용하였다, 즉  $c_l = c_u = 10$  [2].

ASFRA 는 ASEIG [4] 코드에 근거하여 개발된 알고리즘이다. 다수준 부구조화는 METIS [6]의 부함수가 이용되었다. 전역 모드와 다수의 부구조의 국부 모드들은 ARPACK [7]와 SuperLU [8]에 의해 계산되었고 경계의 국부 모드들은 밀집된 행렬 특성에 의해 LAPACK [9]에 의해 구해졌다.

다음 장에서 다른 세가지 방법들과 이 연구에서 제안한 ASFRA 알고리즘을 비교해 보았다. 먼저 이 세가지 방법에 대한 간단히 기술을 한다. 첫 번째 방법은 직접해법 (Direct Solution)으로 설정하며 식 (2)의 해를 구함으로써 주파수 응답  $H(\omega_k)$ 을 얻는다. 본 알고리즘에서는 SuperLU 의 부함수들이 이용되었다. 두 번째 방법은 이동 역 란초스 (Shift-and-Invert Lanczos: SIL)이며 ARPACK 부함수들이 적용되었다. 이는  $n$  개의 고유모드들을 계산하고 식 (4)에 정의된  $H_n(\omega_k)$ 를 얻음으로써  $H(\omega_k)$ 를 근사 한다. 이동값은  $\sigma=0$ 으로 주어지며 고유모드는 상위 컷오프 값인  $\lambda_{\max}$ 에 의해 결정되고 잉여 연성벡터(Residual Flexibility Vectors)들이 보충된다 [10]. 상위 컷오프값  $\lambda_{\max}$ 은  $\lambda_{\max} = (\chi \omega_{\max})^2$ 와 같이 결정되고 여기서  $\chi$ 는 곱 연산계수이다. 일반적으로 잉여연산 벡터가 보충되지 않는 경우  $\chi=2$ 나  $3$ 으로 결정되지만, 보충되는 경우  $\chi$ 는 훨씬 작은 값이 사용 가능하다. 그래서 1.11 이 이용되었다. 세 번째 방법은 ASFRA 의 특수한 경우로서 이동은  $\sigma=0$ 이고 하위 컷오프 값은  $\lambda_{\min}^\sigma=0$ 으로 주어진다. 주파수 응답  $H(\omega_k)$ 는 식 (15)의  $H_m(\omega_k)$ 로 근사가 되며 ASFRA<sup>0</sup>으로 표현한다. ASFRA<sup>0</sup>은 기본적으로 이전 연구에서 발표된 주파수 스위프 축차와 AMLS 방법이 결합된 것과 동일하다[2].

#### 5. 수치실험 및 토의

MEMS 공진기는 각속도 센서나 필터 등 다양한 MEMS 기기들에서 이용되는 초소형 기계시스템이다. 이 연구에서는 체크보드 형태의 MEMS 필터의 유한요소 전산모사를 통해 ASFRA 의 성능을 나타내었다. 이 필터는 핸드폰에서 표면의 음성 웨이브를 감지하는 부품으로 사용된다 [11]. 강성  $K$ 과 질량행렬  $M$ 는 유한요소에 의해 구성되며 크기는 15,258 이다.  $K$ 과  $M$  모두 대칭 양정치 특성을 가지고 있고 0 이 아닌 항의 개수는 각각 263,764 과 131,882 이다. 입력  $b$ 와 출력 벡터

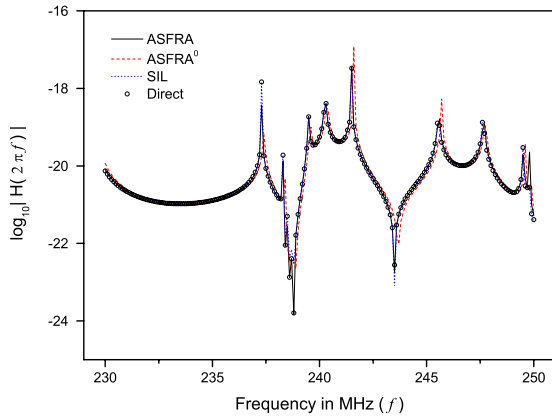


Fig. 1 The frequency responses of a checkerboard filter

$l$ 은 각각 44 와 1 개의 0 이 아닌 항을 가지고 있다.

Rayleigh 댐핑 파라미터는  $\alpha = 9.3 \times 10^3$  와  $\beta = 0$  으로 주어졌다. 필터의 주파수 응답은 다음 범위의 공진들에서 급격한 변화를 보여준다.

$$[f_{\min}, f_{\max}] = [230, 250] \text{MHz}$$

이 때 주파수 응답  $H(2\pi f_k)$  은  $n_f = 201$  에서 계산되고 각 주파수 점  $f_k$  은  $f_{\min}$  와  $f_{\max}$  사이에서 동일한 공간으로 분할된다.

ASFRA 의 경우, 이동  $\sigma$ , 부구조 수준  $l_v$ , 축소비  $\xi$ , 확장 계수  $c_l, c_u$ , 그리고 공차값  $\varepsilon$  은 4 장에서 제안하였던 기본값을 사용한다. 즉,

$$\sigma = \frac{1}{2}(\omega_{\min}^2 + \omega_{\max}^2) = \frac{(2\pi)^2}{2}(f_{\min}^2 + f_{\max}^2) = 2.28 \times 10^{18}$$

이고

$$l_v = 3, \quad \xi = 0.5, \quad c_l = c_u = 10, \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

따라서 시스템 행렬 쌍  $(K_m^\sigma, M_m)$  의 전역 컷오프 값은

$$\lambda_{\min}^\sigma = -3.79 \times 10^{17} \quad \text{and} \quad \lambda_{\max}^\sigma = 3.79 \times 10^{17}.$$

이 때 원 시스템 행렬 쌍  $(K, M)$  에 해당되는 범위는 다음과 같다.

$$[\lambda_{\min}^\sigma + \sigma, \lambda_{\max}^\sigma + \sigma] = [1.90 \times 10^{18}, 2.66 \times 10^{18}].$$

ASFRA<sup>0</sup> 의 경우, 이동은  $\sigma = 0$ , 전역 컷오프 값은  $\lambda_{\max}^0 = 4.93 \times 10^{18}$  로 결정된다. 즉, 원 시스템 행렬 쌍  $(K, M)$  에서  $\lambda_{\max}^0 = 4.93 \times 10^{18}$  보다 작은 모든 전역모드를 추출한다.

그림 1 은 ASFRA, ASFRA<sup>0</sup>, SIL 그리고 Direct Solution 에서 얻은 주파수 응답에 의한 공진 특성을 나타내었다. ASFRA<sup>0</sup> 에 의해 구해진 응답들이 ASFRA, SIL 그리고 Direct Solution 에 의해 구해진

Table 1 The dimension of AS subspace, numbers of retained modes, total FS iteration, and the elapsed time

Checkerboard filter	Direct	SIL	ASFRA <sup>0</sup>	ASFRA
$m$ (AS subspace)	-	-	1635	307
$n$ (retained modes)	-	242	231	37
Total FS iter	-	-	96	145
Elapsed time (sec.)	1612.6	86.23	208.15	26.72

응답보다 정확성이 낮음을 확인 할 수 있다.

표 1 에서는 AS 부공간의 크기, 추출 전역모드들의 개수, FS 축차 횟수 그리고 계산에 소모된 시간을 정리하였다. ASFRA 은 ASFRA<sup>0</sup> 에 비해 고주파수 범위 230MHz - 250MHz 에서 상대적으로 적은 수의 국부와 전역모드의 개수들을 이용하였다. 이는 소모된 시간의 절약을 가져온다. 표의 결과에서 ASFRA 는 ASFRA<sup>0</sup> 보다 7.7 배 빠른 것을 확인할 수 있다. 또한 SIL 는 원 시스템 행렬 쌍인  $(K, M)$  로 이루어진 전체 크기의 고유치 문제에서 고유모드를 얻어야 하기 때문에 ASFRA 보다 3 배나 긴 시간이 필요하다.

그러므로 ASFRA 는 허용 범위의 정확성을 만족하면서 기존 방법보다 효율적으로 고 주파수 범위의 응답 해석에 적용할 수 있음을 보여준다.

## 6. 결론

이 연구에서 대수학 부구조법과 주파수 스위프 알고리즘을 접목하여 임의의 고주파 영역 응답해석에 적용 가능한 ASFRA 를 제안하였다. ASFRA 의 성능은 230MHz-250MHz 에서 작동되는 필터 예제에 대해 구현되었고 고주파 FRA 에 효율적으로 적용되었음을 보였다. 앞으로의 연구로는 파라미터들의 최적 선택 기준과 분산 확장 및 다양한 예제에 맞춤형 알고리즘이 될 수 있다.

## 참고문헌

- [1] Bennighof, J. K., Kim, C. K., 1992, "An adaptive multi-level substructuring method for efficient modeling of complex structures," *Proceedings of the AIAA 33rd SDM Conference*, Dallas, Texas, pp. 1631~1639.
- [2] Bennighof, J. K., Kaplan, M. F., 1998, "Frequency sweep analysis using multi-level substructuring, global modes and iteration," *Proceedings of 39th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*.
- [3] Yang, C., Gao, W., Bai, Z., Li, X., Lee, L., Husbands, P., Ng, E., 2005, "An algebraic substructuring method

- for large-scale eigenvalue calculations,” *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. 27, No. 3, pp. 873~892.
- [4] Gao, W., Li, X.S., Yang, C., Bai, Z., 2006, “An implementation and evaluation of the AMLS method for sparse eigenvalue problems,” *Technical Report LBNL-57438, Lawrence Berkeley National Laboratory.*
- [5] Craig, Jr. R. R., Bampton, M.C.C., 1968, “Coupling of substructures for dynamic analysis,” *AIAA Journal*, Vol. 6, No. 7. pp. 1313~1319.
- [6] Karypis, G., 2006, METIS, Department of Computer Science and Engineering at the University of Minnesota, <http://www-users.cs.umn.edu/~karypis/metis/metis/index.html>.
- [7] Lehoucq, R., Sorensen, D. C., Yang, C., 1998, “ARPACK User's Guide: Solution of Large-Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods,” *SIAM*, Philadelphia.
- [8] Demmel, J.W., Eisenstat, S. C., Gilbert, J. R. , Li, X. S., Liu, J. W. H., 1999, “A supernodal approach to sparse partial pivoting,” *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, Vol. 20, No. 3, pp. 720~755.
- [9] Anderson, E. and Bai, Z. and Bischof, C. and Blackford, S. and Demmel, J. and Dongarra, J. and Du Croz, J. and Greenbaum, A. and Hammarling, S. and McKenney, A. and Sorensen, D., 1999, LAPACK Users' Guide 3-rd, SIAM.
- [10] Thomas, B., Gu, R. J., 2000, “Structural-acoustic mode synthesis for vehicle interior using finite-boundary elements with residual flexibility,” *Int. J. of Vehicle Design*, Vol. 23, pp. 191~202.
- [11] Bindel, D. and Bai, Z. and Demmel, J., 2006, “Model reduction for RF MEMS simulation,” *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 3732, pp.286~295.