적응 확장 유한요소기법과 형상최적설계로의 응용

유용균† · 허재성* · **Akira Tezuka**** 곽병만***

An adaptive X-FEM and its application to shape optimization

Yonggyun Yu, Jaesung Huh, Akira Tezuka and Byung Man Kwak

Key Words : X-FEM(확장 유한요소기법), adaptive FEM(적응 유한요소기법),

Abstract

A procedure is proposed to generate optimal grid with minimal user intervention while keeping a prescribed level of accuracy, using an adaptive X-FEM and applied to shape optimization. In spite of various advantages of X-FEM, however, there are several obstacles for practical applications. Because of using a uniform background mesh and additional degree of freedoms for enrichment, an X-FEM is usually computationally more expensive than traditional finite element method. Furthermore, there are often accuracy problems. For an automatic procedure of optimal mesh generation, an h-adaptive scheme and a posteriori error estimation obtained by a post-processing process are utilized. The procedure is shown by 2-D shape optimization examples.

기호설명

ψ_α : 확장 함수(enrichment function)
$\mathbf{a}_I^\alpha$: X-FEM 의 자유도
ϕ_I : 유한요소의 기본 함수(basis function)
$\mathbf{u}_I$: 유한요소모델의 절점 변형 벡터
Ω : 전체 유한요소 범위
Ω_g : 확장 함수가 사용되는 유한요소 범위
σ_h : 유한요소 해석의 응력값
σ^* : σ_h 의 복원된 응력값
D : 유한요소 탄성계수 행렬
$\|e\|$: 측정된 오차 에너지
$\|\tilde{e}\|$: 한계 오차 에너지

1. 서 론

일반적인 유한요소 방법에서 삼차원 요소 생성은 여전히 많은 시간을 필요로 한다. 특히, 미세한 구멍이나 균열 등 멀티 스케일 문제를 푸는 경우나 많은 수의 요소 재생성 과정을 필요로 하는 균열의 진행경로 계산이나 최적설계의 경우 이러한 문제는 더욱 커진다. 적응 유한요소 방법(adaptive FEM) 등의 기법이 이러한 문제점을 줄이기 위해서 사용될 수 있으나, 보다 근본적인 해결방법으로 요소 생성과정이 필요없는 무요소(meshless) 기법이 이용될 수 있다. Belyschhko[1]는 요소생성을 피하기 위한 새로운 방법을 개발하고 X-FEM (Extended FEM)이라 명명했다. X-FEM 의 기본적인 원리는 단위 분할(partition of unity) 원리를 이용하여 확장 함수(enrichment function)을 사용하여 임의의 불연속을 표현하는 것이다. 단위 분할방법의 개념은 Melenk 와 Babuska[2] 의 의해서 처음으로 묘사되었다. Belytchko 와 Black[3]은 크랙을 표현하기 위하여 단위 분할 개념을 이용하였고, Dolbow[4] 은 층계 함수(step function)을 임의의 불연속성을 표현하였다.

X-FEM 은 많은 장점을 가지고 있는 반면 실제로 적용되기 위해서는 해결해야 될 문제점들이 존재한다. 확장함수로 인한 추가적인 자유도로 일반적으로 X-FEM 은 기존의 FEM 보다 많은 시간이 소요된다. 또한, 해석자는 X-FEM 의 해석 결과의 정확도에 주의를 기울여야 한다. X-FEM 요

† 한국과학기술원
E-mail : YonggyunYu@kaist.ac.kr
TEL : (042)869-3051
* 한국과학기술원
** DPROCAMG, AMRI, AIST, 일본
*** 한국과학기술원

소의 정확도는 기존의 FEM 과 같거나 비틀어진 요소의 경우 더 정확하다고 알려져 있다[5]. 하지만, 좀더 정확한 값을 얻기 원하는 경계에 다가갈수록 해석 결과에 오차가 많이 발생하는 경향을 보인다. 이러한 현상은 경계와 절점이 가까이 위치하여 물리적인 요소의 크기가 작을 때 심하게 발생한다. 배경 요소를 좀더 세분화하여 이러한 문제점을 완화시킬 수는 있으나 많은 계산시간을 요구하게 된다.

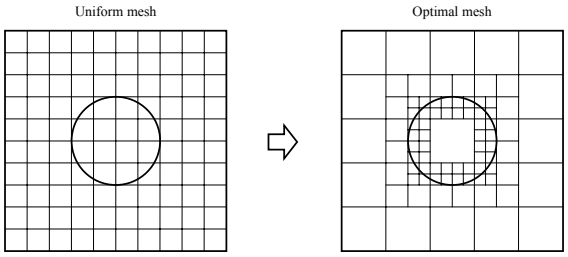


Fig. 1 Uniform and optimal mesh for X-FEM

따라서, 계산시간을 줄이면서 정확도를 높이기 위하여 기존의 일정한 배경 요소보다는 최적 배경 요소가 필요하다. 사용자의 개입이 없이 최적의 배경 요소를 구하기 위하여 자동화된 요소 생성과정이 필요하며 이를 위하여 정량적인 해석결과의 오차를 예측하고 최적의 요소 크기를 계산해야 한다.

이렇게 제안된 방법은 X-FEM 의 장점을 크게 살릴 수 있는 경계가 움직이는 문제 즉, 형상 최적설계에 적용되었다.

2. 배경

2.1 단위 분할과 X-FEM

X-FEM 의 기본 개념인 단위 분할 유한요소 방법은 고전적인 유한요소의 좀더 일반화된 개념이다. 임의의 함수 u 에 대한 단위 분할 근사는 다음과 같다.

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N} \phi_I(\mathbf{x}) \left(\sum_{\alpha=1}^{M} \psi_\alpha(\mathbf{x}) \mathbf{a}_I^\alpha \right) \tag{1}$$

여기서 확장함수 ψ_α 는 유한요소 기본함수 ϕ_I 의 곱인 $\psi_\alpha \phi_I$ 유한요소장의 연속성을 자동적으로 만족시켜주기 때문에 임의의 함수를 확장함수로 이용하는 것이 가능하다. 이를 이용하여 특정한 지점에서 불연속이나 특이점(singularity)을 유한요소의 경계와 일치시킬 필요 없이 특별한 함수를 이용하여 효율적으로 표현하는 것이 가능하다. X-FEM 의 기본 원리는 이러한 원리를 이용하여 최소한의 확장함수만을 이용하여 균열, 공백 등을 표현한 것이다. X-FEM 의 변위장은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{I \\ n_I \in \mathbf{N}}} \phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I + \sum_{\substack{J \\ n_J \in \mathbf{N}^g}} \phi_J(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \mathbf{a}_J \quad \mathbf{u}_I, \mathbf{a}_J \in R^2 \tag{2}$$

식(2) 에서 N 은 요소의 모든 절점 집합이고 $\mathbf{N}^g$ 은 경계에 의해서 분리되는 요소의 절점 집합이다. 확장함수 $\psi(\mathbf{x})$ 는 경계의 종류에 따라서 달라진다. 예를 들어, 공백을 표현하기 위해서는 공백인 경우 0 의 값을 가지고 물질의 경우 1 의 값을 가지는 층계함수를 이용한다.

2.2 후처리를 이용한 사후오차 측정

사후 오차 측정 방법은 정확한 해를 모르는 상태에서 유한요소근사값을 이용하여 오차를 근사하는 방법이다. 사후 오차 측정 방법에는 후처리 방법, 잔여(residual) 방법, 보간(interpolation) 방법 등이 있는데 본 논문에서 사용되는 후처리 방법은 Zienkiewicz and Zhu[7] 에 의해서 제안되었으며 오차를 유한요소에서 직접 얻어진 값과 복원된 (recovered) 값의 차이로 오차를 표현한다.

$$e_\sigma^* = \sigma_{recovred} - \sigma_{FEM} \tag{3}$$

복원값을 구하는 방법으로 최소 자승법, 초수렴 (superconvergence) 방법 등이 있으며, 이렇게 구해진 오차는 식(4)와 같은 에너지의 형태로 나타내어진다.

$$\|e\|_e = \left[\int_\Omega (\sigma^* - \sigma_h)^T D^{-1} (\sigma^* - \sigma_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

또한 보다 상대적인 오차의 양을 보다 정량적으로 표현하기 위하여 아래 식과 같이 QI(quality index)를 정의하였다 [9].

$$QI = \sqrt{\frac{\sum_e \|e\|_e^2}{\sum_e \|q\|_e^2}} \times 100\% \tag{5}$$

$$QI_e = \frac{\|e\|_e}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_e \|q\|_e^2}} \times 100\% \tag{6}$$

$$\|q\|_e = \left[\int_\Omega \sigma_h^T D^{-1} \sigma_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}, \text{n = 요소 수} \tag{7}$$

2.3 적응 유한요소 방법

유한요소해석 결과의 정확도는 요한요소 모델의 질에 의해서 결정된다. 또한 균일한 크기의 요

소를 생성하는 계산 효율이 좋지 못하기 때문에 적응 유한요소 방법(adaptive FEM)은 중요한 연구 주제 중 하나이다. 적응 유한요소의 목적은 주어진 계산 시간 이내에서 해석 결과의 정확도를 높이고자 하는 것이다. 적응 유한요소의 방법에는 요소 구조를 유지한 채 절점의 위치를 재배열하는 R 방법, 보다 높은 차수의 요소를 사용하는 P 방법 그리고 특정 부분을 보다 작은 요소로 세분화하는 H 방법으로 나누어진다. 이중 본 연구에서는 H 방법이 사용되는데 근사적으로 구해진 오차값과 미리 정의된 한계 오차값을 이용하여 아래 식과 같이 새로운 요소의 크기가 정해진다.

$$\overline{h}_e = h_e \left(\frac{\|\overline{e}\|}{\|e\|} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{8}$$

이렇게 구해진 요소의 크기에 따라 그림 2. 와 같이 기존의 요소가 세분화 되고 각 요소간의 연속성을 유지하기 위하여 제한조건이 추가된다.

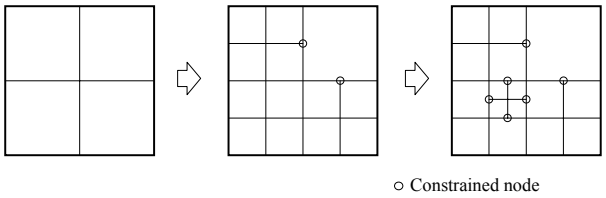


Fig. 2 H-adaptive strategy and constrained node

3. X-FEM 의 최적 배경 요소 생성 과정

3.1 최적 배경 요소 생성 절차

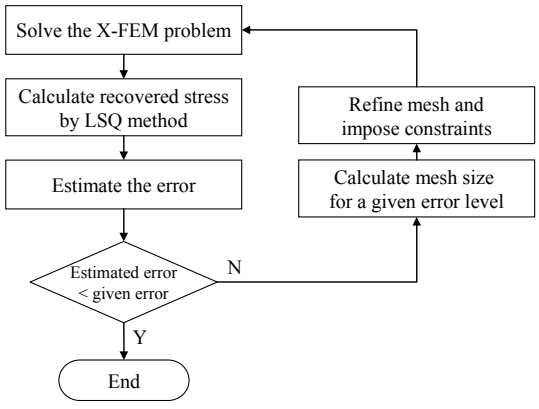


Fig. 3 Procedure of adaptive X-FEM

최적의 배경 요소를 생성하기 위한 단계는 그림 3 과 같다. 우선 초기 요소에서 해석이 수행된 후 해석값과 복원된 해석값을 이용하여 오차를 근사한다. 경계에 위치하는 요소는 경계 내부의 면적이 작은 경우 실제 오차크기가 크더라 하더라도 오차 에너지를 구하는 과정에서 오차가 작게 측정될 수 있기 때문에 물질부분과 공백부분의 넓이비로 표준화(normalize)한다. 계산된 오차값으로 새로운 요소 크기를 계산하고 이를 바탕으로 기존의 배경 요소를 세분화한다. 위 과정은 수렴하여 주어진 조건을 만족할 때까지 반복된다.

3.2 최적설계를 위한 적응 유한요소 해석 과정

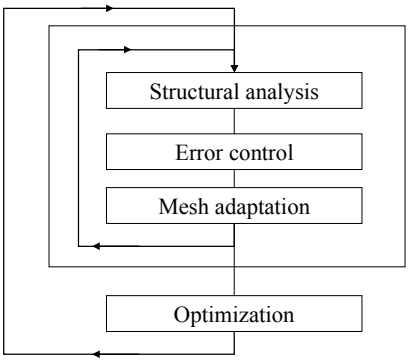


Fig. 4 Adaptive refinement into the optimization process

큰 규모의 문제를 최적설계하기 위해서는 해의 정확도뿐만 아니라 해석 시간이 매우 중요하다. 정확도와 해석 시간은 요소의 구조에 의해서 결정되기 때문에 적응 기법(adaptive method)가 효율적으로 이용될 수 있다. 또한, 민감도를 기반으로 한 최적설계의 경우 해가 정확할수록 민감도를 보다 정확하게 구할 수 있는데, 만약 민감도가 정확할수록 않은 경우 수렴속도 향상되는 것을 관찰할 수 있다.

최적 배경 요소 생성과 최적설계가 통합된 과정은 그림 4 와 같다. 수치적으로 민감도를 계산하기 전 단계에서 최적의 배경 요소를 생성하고 이를 이용하여 계산된 수치 민감도를 사용하여 최적설계의 각 단계를 수행한다.

4. 적용예제

4.1 인장응력을 받는 무한 평판 문제

첫 번째 예제는 그림 5 와 같이 구멍이 뚫린 무한히 긴 평판에 인장응력을 주었을 때 응력을 해석하는 문제이다. 이 문제의 응력장은 Timoshenko 에 의해서 수식적으로 계산되었으며 이 값을 바탕으로 정확한 오차값과 후처리 방법으로 계산된 오차값을 비교하였다. 요소 크기에 따른 X-FEM 해석 값의 정확도 변화를 관찰하기 위하여 배경 요소의 크기를 절반씩 줄여가면서 해석을 수행하였다(25x25, 50x50, 100x100). 그림 6 과 그림 7 은 정확한 오차값과 계산된 오차값을 나타낸 것이다.

경계에서 약간의 차이는 있으나 전체적으로 비슷한 경향을 가지고 전체 에러 에너지는 거의 같은 값을 가지는 것을 관찰할 수 있다. 그림 8 은 초기 요소(25x25)에서 최대 QI 를 5%로 설정하고 적응 기법을 적용한 것이다. 후처리 방법은 해석값을 기반으로 오차를 예측하기 때문에 그림 8(a)와 같이 한번의 세분화 과정으로 목적이 되는 QI 를 만족시키지 못하는 경우가 많다. 그림 8(b)는 한번의 과정을 더 반복한 것으로 초기 설정한 5%의 QI 를 모든 요소가 만족하는 것을 관찰할 수 있다.

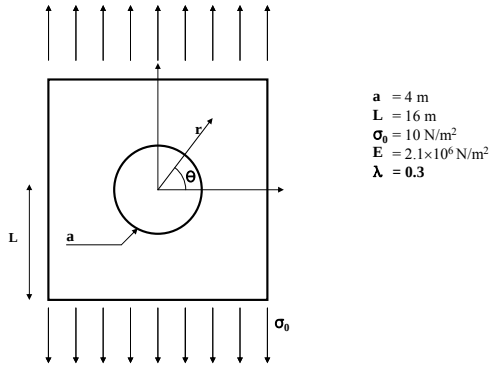
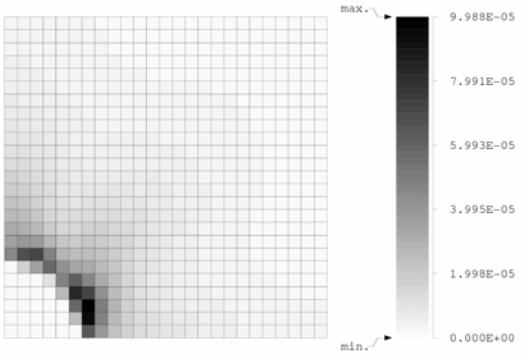
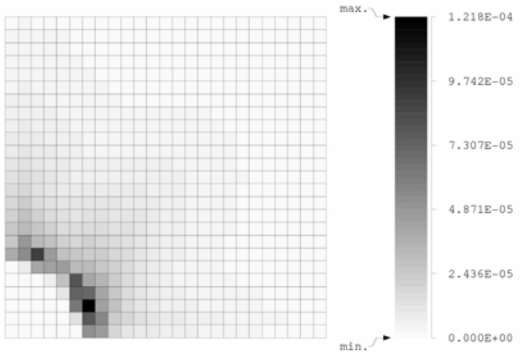


Fig. 5 Problem setup for the optimization of infinite notch problem

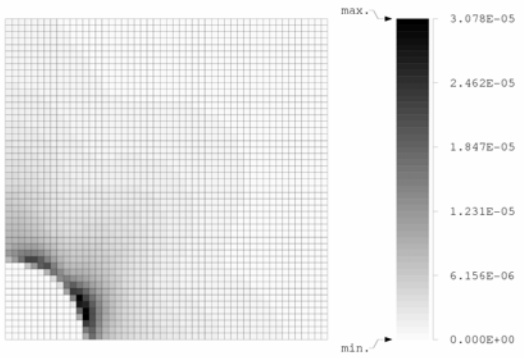


(a) Exact error energy norm (QI=3.056%)

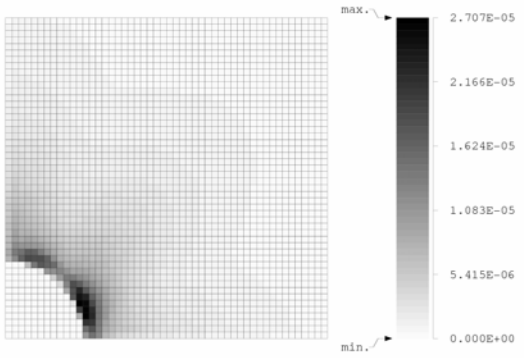


(b) Estimated error energy norm (QI=3.023%)

Fig. 6 Exact and estimated error energy norm of infinite notch problem with 25 by 25 mesh

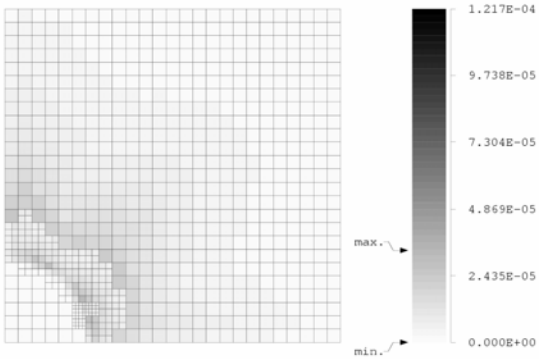


(a) Exact error energy norm (QI=1.555%)

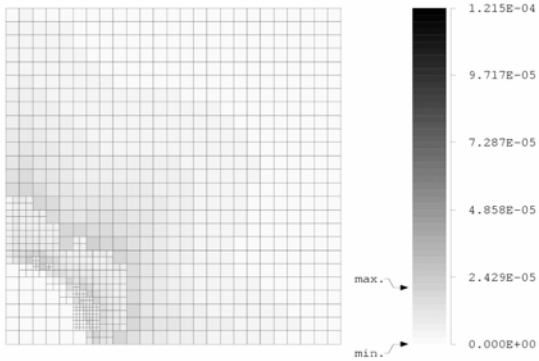


(b) Estimated error energy norm (QI=1.502%)

Fig. 7 Exact and estimated error energy norm of infinite notch problem with 50 by 50 mesh



(a) 1st refinement (QI_{max}= 7.28%, QI=1.962%)



(b) (b) 2nd refinement (QI_{max}= 4.96%, QI=1.854%)

Fig. 8 Optimal mesh and estimated error energy norm of infinite notch problem

4.2 수직하중을 받는 원형 판 문제

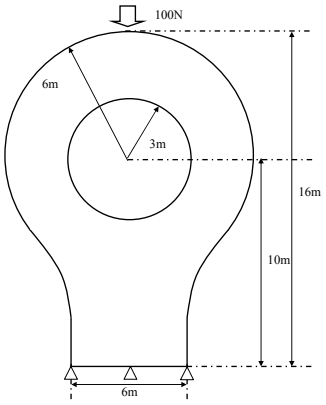
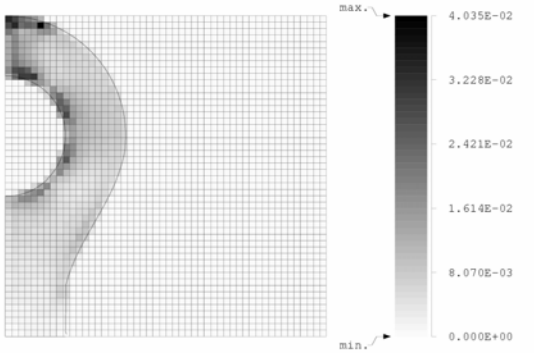
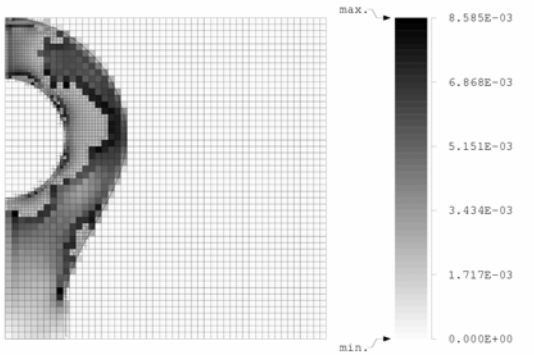


Fig. 9 The problem setup for the half round plate with a hole under a vertical load

두 번째 예제는 그림 9 와 같은 형상을 가진 원형 판의 응력을 구하는 문제이다. 내부와 외부의 경계는 수학함수와 다각형으로 구성되며 X-FEM 요소와 경계함수가 만나는 지점을 계산하기 위하여 Level Set 방법이 이용된다. 최대 QI 값을 10%로 지정하였으며 3 회의 과정이 반복된 후 최적 요소는 10(b)와 같다. 값의 정확도를 확인하기 위하여 ANSYS 6.2 를 이용하여 유한요소 모델(약 3 만개 요소)을 만들어 결과를 비교하였다.



(a) Initial mesh and estimated error (QI=9.326%)



(b) Refined mesh and estimated error(QI=5.652%)

Fig. 10 Initial and refined mesh and estimated error norm

4.3 무한 노치의 형상 최적설계

그림 11 같이 Y 방향으로 무한히 긴 평판에 힘이 가해지는 경우 내부 구멍의 형상을 최적설계하는 문제이다. 구멍의 경계는 타원방정식으로 정의되며 구멍의 넓이는 초기값을 유지한 상태에서 각 요소의 최대 오차값을 원하는 수준 이하로 유지시키면서 최대응력을 최소화하는 형상을 찾는 문제이다. 최적설계 알고리즘으로 순차 2 차 계획법(sequential quadratic programming) 방법을 사용하였으며 4 회의 축차 이후에 최적설계가 완료되었으며 설계변수와 목적함수의 값의 변화는 표 1 과 같고 홀의 형상변화와 각각의 최적 배경 요소 그리고 측정된 에러는 그림 6 과 같다. 최적설계 진행됨에 따라 전체 모델의 오차값과 최대 오차가 발생하는 지점이 변하는 것과 그에 따라 최적의 배경 요소가 변화하는 것을 관찰할 수 있다. 만약 기존의 일정한 배경 요소를 사용하거나 최적설계 과정에서 계속 새로운 요소를 생성해주지 않는다면 같은 수준의 오차를 유지하기 위해서 더 많은 요소를 필요로 하여 많은 시간이 소요되고, 설계 민감도가 보다 부정확 함에 따라 수렴속도가 느려진다.

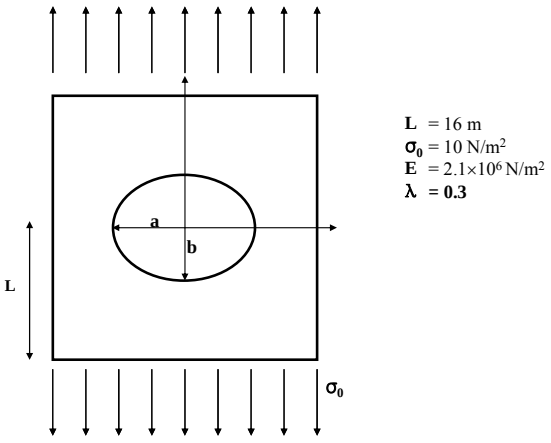
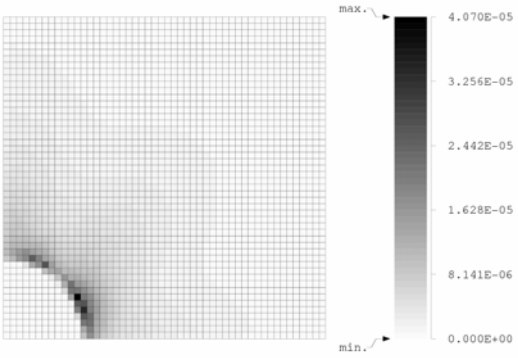


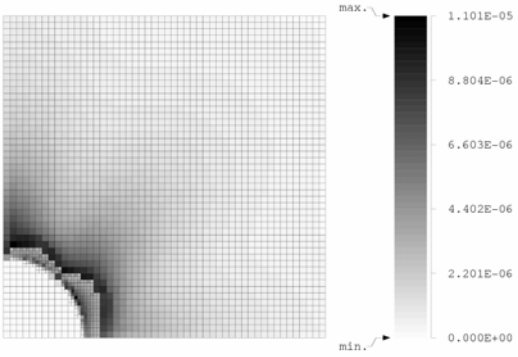
Fig. 11 Problem setup for the optimization of infinite notch problem

Table 1 Optimization result of infinite notch problem

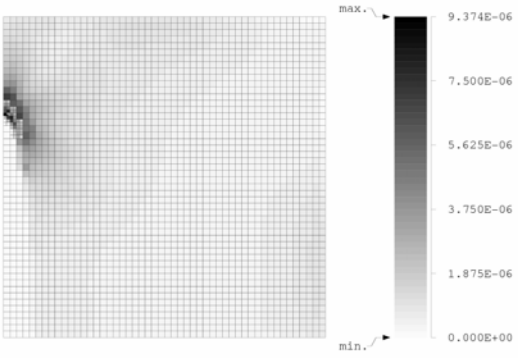
	Initial	Optimal
Objective (σ_{max})	0.302	0.188
Design variables (a,b)	(4.00, 4.00)	(1.52, 10.04)



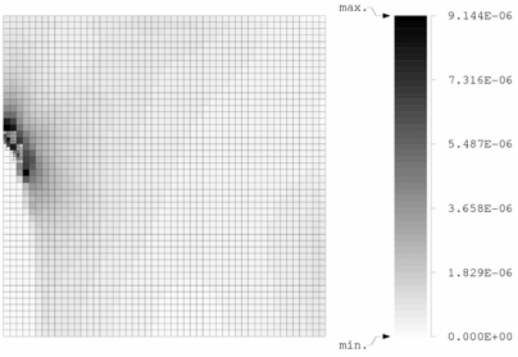
(a) initial background mesh



(b) optimal mesh for 1st iteration step



(c) optimal mesh for 3rd iteration step



(d) optimal mesh for final step

Fig. 12 Optimal meshes in the shape optimization procedure of the infinite notch problem

5. 결론

본 연구에서 X-FEM 의 여러 가지 단점을 보완하기 위하여 후처리 방법을 이용한 오차 예측으로 X-FEM 해석의 오차를 예측하고 기존의 일정한 요소보다 효율적인 최적의 배경 요소를 생성하는 방법을 제안하였다.

이러한 방법을 X-FEM 이 크게 장점을 가지고 있는 경계가 움직이는 문제, 즉 최적설계에 적용하여 정확도를 유지하면서 해석 시간을 줄이고 수렴속도를 높일 수 있다는 것을 확인하였다.

본 연구에서 제시된 방법은 보다 3 차원 문제로 손쉽게 적용될 것으로 기대되며 캐드 시스템을 이용하여 실용적이고 복잡한 형상의 문제를 푸는데 이용될 수 있을 것이라 기대된다.

참고문헌

(1) Sukmar. N., Chopp D.L., Moes N. and Belytcchko T., 2001, “Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method,” *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190 6183-6200

(2) Melenk J.M. and Babuska I., 1996, “The partition of unity finite element method: Basic theory and applications,” *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* ,289-314

(3) Belytschko, T. and Black, 1999, “T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing,” *International journal for numerical methods in engineering*, v.45 no.5, pp.601-620

(4) Dolbow, J., Moes, N. and Belytschko T., 2000, “Modeling fracture in Mindlin-Reissner plates with the extended finite element method,” *International journal of solids and structures*, v.37 no.48/50, pp.7161-7183

(5) Terada, K. and Kurumatani, M., 2004, “Performance assessment of generalized elements in the finite cover method, Finite elements in analysis and design,” *the international journal of applied finite elements and computer aided engineering*, v.41 no.2 pp.111-132

(6) Schleupen A., Maute K., and Ramm E., 2000, “Adaptive FE-procedures in shape optimization,” *Struct Multidisc Optim*, 19, 282-302

(7) Zienkiewicz O.C. and Zhu J.Z, 1992, “The Superconvergent Patch Recovery (SPR) and Adaptive Finite Element Refinement,” *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 101, 207-224

(8) Hinton E. and Campbell J.S., 1974, “Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Squares Method,” *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 8, 461-480

(9) Tezuka A., 1992, “Adaptive Remeshing Process with Quadrangular Finite Elements,” *Advances in Engineering Software*, v.15 no.3/4, pp.185-201