

단순화법을 이용한 소성 경화재료에서의 탄.소성 구조물의 유한요소해석

김병삼[†] · 박경우* · 성기석* · 유근열*

Elasto-plastic Finite Element Analysis of Hardening Materials Using Simplified Method

Byeong-Sam Kim, Kyoungwoo Park, Kisuk Sung, Geunyeal YU

Key Words : FEM Analysis(유한요소해석), Simplified Method(단순화법), Elasto-Plastic Analysis(탄소성해석), Hardening Materials(소성경화재료)

Abstract

A simplified finite element analysis method is proposed to calculate elasto-plastic responses of general hardening materials. The method provides an effective tool to calculate structural elasto-plastic responses. Numerical examples have demonstrated that its computational efficiency is very much higher than that of the incremental elasto-plastic finite element analysis, and computational results are accurate enough to meet the need of engineering practice. Compared with the general elasto-plastic incremental finite element analysis, the proposed method can avoid the incremental iteration of nodal displacements and the constitutive equation integration at each Gauss integral point, and computational results are accurate enough to meet the need of engineering practice.

기호설명

U^{ine} : 비탄성변위
 E^{ine} : 비탄성변형률
 $\Sigma(t)$: 응력장
 $C(y)$: 소성 경화행렬
 $f(\Sigma)$: Von Mises의 항복조건
ELAS: 탄성(Elastic)의 루틴
R : 잔류응력장

1. 서론

탄.소성 상태의 구조해석에서 사용되는 수치적 방법은 지금까지 수많은 저자들에 의해 개발되어 왔다. 고전적인 소성 구조해석 방법으로 주로 쓰이는 것들은 증분법(Incremental Method), 반복법(Iteration Method), 할선법(Secant Method), Newton-Raphson Method 등이 O.C. Zienkiewicz(1967), R.L. Taylor, M.A. Crisfield(1990), Q.S. Nguyen 등의 여러 저자들에 의하여 그 이론을 발전시켜왔다. 이 이론은 점진적인 하중(Load, time) 또는 변위의 증가에 따라 소성영역을 찾아가는 방법으로써 수많은 Iteration의 증가로 인하여 계산시간이 아주 느린 단점이 있다. 본 연구에서는 이러한 주어진 소성의 Hardening 치에 따라 최종적인 소성 한계치로 쉽게 찾아가는 것으로 단 몇 번의 Iteration의 증가만으로 소성의 영역을 찾아내는 방법으로써 소성해석의 새로운 이론으로 발전되어 있어서 저자를 비롯한 몇몇 연구의 결과로 얻어지고 있다. 따라서 본 연구에서는 이 새로운 탄.소성 구조해석의 이론적 명칭을 단순화법(Simplified Method)이라 정의하였다. 이 이론의 개발은 J. Zarka [1], Q. S. Son [2]들에 의해서 개발되었으며 본 연구에서는 이 연구에 의한 새로운 적용을 시도하였다.

[†] 책임저자, 회원, 호서대학교, 자동차공학과
E-mail : kbs@hoseo.edu
TEL : (041)540-514 FAX : (041)540-5818

* 회원, 호서대학교, 기계공학과

본 연구는 이 이론에 따라 정적 구조물에 있어서 복합된 구조물(빔, 평판, 트러스, 곡률판 등) 상태에서 하중 조건이 집중하중, 반복하중(Cycle Load) 등을 적용하였고, 재료의 경우 등방(Isotropic), 이방성(Anisotropic), 또는 복합재료(Composite Material)의 조건하에서 탄.소성 구조해석에 대한 비교 연구를 하였다.

2. 단순화법에 의한 탄.소성 구조해석

2.1 탄.소성 반응 방정식

실제 장은 아래 식과 같이 구성될 수 있다.

$$\begin{aligned} U(t) &= U^{el}(t) + U^{ine}(t) \\ E(t) &= E^{el}(t) + E^{ine}(t) \\ \Sigma &= E^{el}(t) + R(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 비탄성 영역의 변위벡터 U^{ine} 는 $\partial_u V$ 에서 0 의 값을 가지며 운동학적으로 비탄성 변위장이다. 비탄성 변형율 E^{ine} 는 $\partial_u V$ 에서 0 을 가지 운동학적으로 비탄성 변형율장이다. $\partial_{u_j} V$ 위에서 $U_j^d(t)$ 을 가진 $U(t), E(t)$ 또한 운동학적 영역의 값이다.

$$\begin{aligned} E^{ine} &= \frac{1}{2} (\nabla U^{ine} + \nabla^T U^{ine}) \\ E^{ine} &= MR + E^p \end{aligned} \quad (2)$$

또한 비탄성 영역에서 발생하는 실제 응력장 $\Sigma(t)$ 는 체적 V 에 체적력 $X^d(t)$ 와 표면력 영역 $\partial_{f_j} V$ 에서 가지는 표면력 $F_j^d(t)$ 을 가진 정적으로 수용가능한 값을 가지고 있을 것이다. 따라서 전체 응력은 탄성 영역과 비탄성 영역 그리고 잔류 응력 영역인 3 부분으로 구성되어있다.

$$\Sigma(t) = L(E(t) - E^l(t) - E^p(t)) \quad (3)$$

여기서 비탄성 영역의 변위벡터와 변형율장 $U^{ine}(t)$, $E^{ine}(t) = MR(t) + E^p(t)$ 는 $\partial_{u_j} V$ 에서 0 의 값을 가진다. 잔류응력장 $R(t)$ 는 $\partial_{f_j} V$ 에 값 0 과 체적에서 V 에 0 을 가진다고 가정하였다. 여기서 탄성 루틴 **ELAS**(Elastic)을 반복적으로 사용하기 위하여 탄성 루틴값을 **ELAS** 라 정의하였다. 식 (4)는 탄성 영역의 해석을 위하여 필요한 여러 값으로써 탄성 해석의 반응을 알아보기 위해서 **ELAS** 루틴을 사용한다.

$$\mathbf{ELAS} \{V, \partial_{f_j} V, \partial_u V, X^d, F^d, u^d, E^{el}, M\} \quad (4)$$

또한 비탄성 해석은 루틴 **ELAS** (Elastic) 은 다음과 같이 표시하였다.

$$\mathbf{ELAS} \{V, \partial_{f_j}, \partial_{u_j}, V, 0, 0, 0, E^p, M\} \quad (5)$$

잔류응력장 R 는 체적 V 에서 0 과 하중에 의한 표면적 $\partial_{f_j} V$ 에서 값 0 을 가지는 잔류 응력장이며, E^p 는 소성 변형율장이고, M 은 재료 상수장이다.

2.2 동적 경화 재료의 단순화법에 의한 탄.소성 방법

고전적 표현 Von-Mises 의 소성 이론에 부합하는 동적 경화의 재료의 경우

$$f(\Sigma, y) = f(S - y) = \frac{1}{2} (S - y)^T (S - y) - \sigma_0^2 \quad (7)$$

내부 변화 변수 y 는 소성 변형율장 E^p 에 비례한다.

$$y = CE^p \Leftrightarrow E^p = C^{-1}y \quad (8)$$

양으로 정의된 대칭 경화 행렬 C 는 행렬의 응력 속도함수에 대한 소성변형율속도는 $E^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial S}$ 이고 $\lambda \geq 0$ 이고 $\lambda = 0$ 이고 $\lambda \geq 0$, $if f(S - y) < 0$ 또는 $f(S - y) = 0$ 과 $\frac{\partial f}{\partial S} \dot{S} < 0$

$$f(S - y) = 0 \text{ 과 } \frac{\partial f}{\partial S} \dot{S} < 0$$

$$\dot{E}^p = 0 \text{ 이고 } \lambda \geq 0, \text{ if } f(S - y) < 0$$

$$\text{또는 } f(S - y) = 0 \text{ 과 } \frac{\partial f}{\partial S} \dot{S} < 0$$

$$\lambda = \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial S} \dot{S}$$

h 는 경화 모듈이다. 이것을 상징화된 식은 아래와 같다.

$$\dot{E}^p(t) \in \partial \Psi_{c(y)}(\Sigma(t)) \quad (10)$$

응력장 Σ 점에서 볼록의 경화 행렬 $C(y) = C_0 + y$ 의 외부 방향으로 수직인 콘형태의 변형율 속도의 함수에 대한 응력 속도 반응법칙의 역을 구하면 아래 식과 같다.

$$\dot{\Sigma} = L(\dot{E} - \dot{E}^p) = L(\dot{E} - \lambda \frac{\partial f}{\partial \Sigma}) \quad (11)$$

$$\equiv L_p \dot{E}$$

$$\text{with } \lambda = \frac{\langle \frac{\partial f}{\partial \Sigma} L \dot{E} \rangle}{h + \frac{\partial f}{\partial \Sigma} L \frac{\partial f}{\partial \Sigma}}$$

- 탄성 하중이 가해졌을 경우의 방정식은: $f(\Sigma, y) < 0$ 또는 탄성 하중이 가해지는 경우

$$f(\Sigma, y) = 0 \text{ 과 } \frac{\partial f}{\partial \Sigma} L \dot{E} < 0 \quad (12)$$

- 소성 하중이 가해졌을 경우

$$f(\Sigma, y) = 0 \text{ 과 } \frac{\partial f}{\partial \Sigma} L \dot{E} \geq 0, \quad (13)$$

$$\dot{\Sigma} = \left(L - \frac{L \frac{\partial f}{\partial \Sigma} \frac{\partial f}{\partial \Sigma}}{h + \frac{\partial f}{\partial \Sigma} L \frac{\partial f}{\partial \Sigma}} \right) \dot{E}$$

$$\dot{\Sigma} \equiv L_p \dot{E}$$

$$L_p = \left(L - \frac{L \frac{\partial f}{\partial \Sigma} \frac{\partial f}{\partial \Sigma}}{h + \frac{\partial f}{\partial \Sigma} L \frac{\partial f}{\partial \Sigma}} \right) \dot{E}$$

L_p 는 소성 하중이 가해졌을 경우의 탄젠트 모듈 행렬이다. 내부변환 변수 공간에서의 반응 방정식은 아래와 같이 표현된다.

$$\dot{E}^p(t) \in -\partial \Psi_{c(s)}(y(t)) \quad (14)$$

점 y 에서 볼록인 경화 행렬 $C(y) = C_0 + S(t)$ 의 내부방향으로 수직인 상태이다.

2.3 새로 제안된 단순화법

본 연구에서는 Von-Mises 응력 함수를 탄성과 잔류응력 그리고 경화 조건이 있는 경우 다음 함수로 변화된 방정식으로 표시하였다. 이 함수를 다음과 같은 변환함수 행렬 Y 로 구성된 구조물에서의 응력장의 새로운 Von-Mises 함수로 표현하면 다음 식과 같다.

$$f(\Sigma^{el} + R - CE^p) \text{ 또는} \quad (15)$$

$$f(\Sigma^{el} - Y)$$

여기서 $Y = CE^p - R$ 은 변환 변수 이다. 그리고 이 함수를 앞에서 사용한 루틴 **ELAS** 를 사용하여 다시 표현 하면 다음 식과 같다. 아래와 같은 루틴을 사용하면 응력장 Σ^{el} 를 구한다. 다음 <그림 1>은 단순화법을 이용한 탄성 영역에서의 유한 요소해석 방법의 해석 절차를 나타내었다.

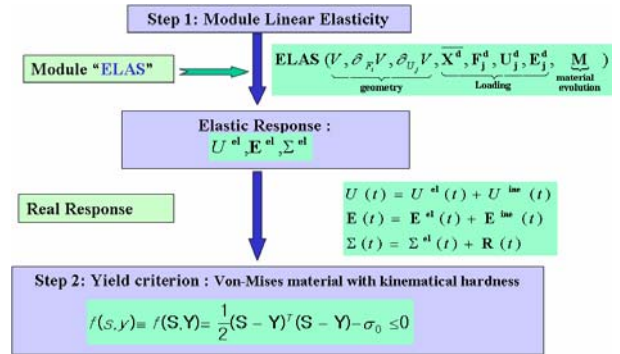


Fig.1 Process of elastic analysis for Simplified method

$$ELAS(V, X, U, F, E^I, M) \quad (16)$$

또한 다음의 Modified 루틴 **ELAS** 을 사용하면 $U^{ine}(t), E^{ine}(t), R$ 을 구할 수 있다.

$$ELAS(V, 0, 0, 0, E^P, M) \quad (17)$$

탄성 응력장의 해 Σ^{el} 는 이미 알고 있는 값이고, 전자와 독립적이며, 변환 변수 Y 의 위치는 기지의 영역에 위치할 것이다. 이 문제에서는 변환 변수 Y 을 기지 값으로 가정했으므로 고전 변수에 대해 재검토해야 한다. 새로운 재료 텐서인 Modified 재료 함수 M' 은 수정된 탄성계수 행렬 L' 의 역행렬이다.

$$M' = (M + C^{-1} dev) \quad (18)$$

이 경우 재료가 등방성 재료이며 탄성인 경우에는 이 수정된 행렬은 아래 식과 같이 표현될 수 있다.

$$E_{ij}^{ine} = -\frac{\nu}{E} R_{kk} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} R_{ij} + E_{ij}^p \quad (19)$$

$$= -\left(\frac{\nu}{E} + \frac{1}{3}\right) R_{kk} \delta_{ij} + \left(\frac{1+\nu}{E} + \frac{1}{C}\right) R_{ij} + C^{-1} Y$$

이것은 새로운 행렬에 대한 탄성계수 E (Young's modulus) 와 푸아송비를 얻기 위해 계산되어지며, 소성 변형율장 함수 E^p 와 변환 변수 Y 사이에는

위의 식과 같은 관계가 된다. 단순방사 하중에 대하여 탄성 반응은 아래 식과 같다.

$$\sum^{el}(t) = \sum_0^{el} + A(t)\sum^{el} \quad (20)$$

여기서 \sum_0^{el} 와 $\Delta\sum^{el}$ 는 고정된 응력장이다. $\Delta\sum^{el}$ 방향에서는 하중이 ∞ 로 커지는 경향이 있기 때문에 정적인 해는 다음을 따른다.

$$\dot{Y} = \dot{S}^{el} = dev \sum^{el} \quad (20)$$

단순 탄성인 경우 변환 함수의 시간에 대한 미분 함수를 단순하게 다음과 같이 표현하였다. 이에 따라 변형된 탄성루틴(Modified ELAS)는 루틴 ELAS(V,0,0,0, S^{el}/C, (M+I/C))에 의해서 소성 변형율장을 나타내었다. 다음 <그림 2>은 단순화법을 이용한 탄.소성 영역의 유한 요소해석 방법의 해석 절차를 나타내었다.

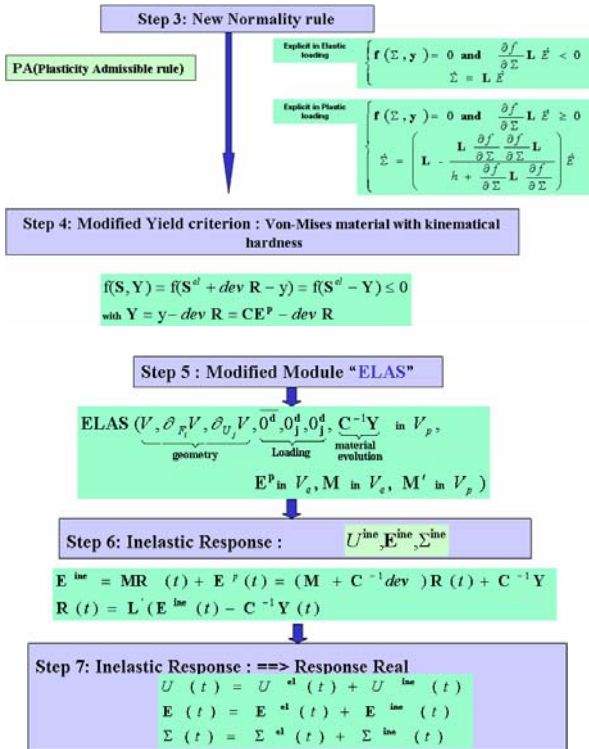


Fig. 2 Process of elasto-plastic analysis for Simplified method

2.5 정적 상태의 결정

- 소성 변형율장 \dot{E}^P 가 0 이 아니면 점들에 소성하중이 작용하는 상태이며 소성 경화재료의 관계식 (21) 다음과 같다.

$$\dot{E}^P = \lambda(S^{el} - Y) \quad (21)$$

$$\int_0^T (S^{el} - Y)^T (S^{el} - Y) = \sigma^2$$

위 식의 역은 아래와 같다.

$$\lambda = \sqrt{\frac{1/2E^P \dot{E}^P}{\sigma_0}} \geq 0 \quad (22)$$

그리고

$$Y^{ult} = S^{el} - \frac{1}{CE^P} \quad (23)$$

- $X' \equiv 0$ 이면 점들은 λ 탄성 상태가 되고 구조 변환 변수는 미결정 상태로 남는다.

3. 적용

3.1 평판의 사례

다음 그림 3 은 간단한 구조로써 한 면이 고정지인 점에서 수직의 힘이 작용하는 평판을 증분법 (Incremental method)과 비교하여 그 결과를 검토하였다. 재료상수는 동적 경화재료 h 작용하는 재료를 다르게 하여 3 가지 경화 조건($h=0.15E$, $h=0.1E$, $h=0.01E$)을 다르게 하였다.

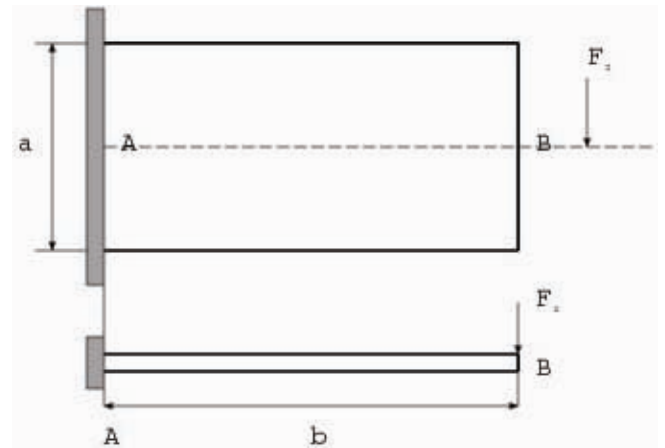


Fig. 3 Isoperimetric thick plate (Q9 elements) : Clamped edge

재료의 탄성계수 $E = 30,000\text{ksi}$, Poison 비 $\nu = 0.3$, 탄성한도 $\sigma_y = 30\text{ksi}$, 소성 경화계수 (Tangents modulus) $E_t = 3913.4\text{ksi}$, $E_t = 2727.3\text{ksi}$, $E_t = 297.03\text{ksi}$ 이며, 및 기하학적 상태는 $L/h = 30$, $B = 10\text{in}$, $L = 30\text{in}$, 두께 $h = 1.0\text{in}$ 이다. 또한 $F_z = \Lambda \times F_0$ 이며 탄성 한도의 하중으로 $F_0 = 1000\text{lb}$ 와 힘의 증가 계수 $\Lambda = 0 \sim 5$ 을 주었다.

증분법 해석을 위해서 사용한 상용 프로그램은 EMRC 사의 NISA II 을 사용하였으며 단순화법 (Simplified method)을 위하여서는 별도로 만든 프로그램은 단순화법 ASSI(Simplified Method for Inelastic Analysis)이라 정의하였다. 시간 계산을 위하여 사용한 컴퓨터는 워크스테이션 Apollo 700 시리즈를 사용하여 시간을 비교하였다. 시간 계산

을 비교하기 위하여 사용한 요소와 절점은 같도록 하였으며 탄성 해석을 별도로 수행하여 같은 시간과 같은 결과가 얻어짐을 예비 비교하였다. 탄성 해석은 같은 17.82 초를 얻었다.

3 가지 경우인 동적 경화 조건을 h 을 비교하면 다음과 같다. $h = 0.15E$, ASSI = 24.33s, 증분법 = 316.89 s 을 얻었고, $h = 0.1E$, ASSI = 27.48s(Iteration 3 회), 증분법 = 320.02 s (Iteration 48 회)을 얻었으며, $h = 0.01E$, ASSI = 29.72s(Iteration 4 회), 증분법 = 559.24 s (Iteration 135 회)을 얻었다. 3 가지 경우에 대한 비교한 평판에서의 최대 처짐을 비교하면 다음 그

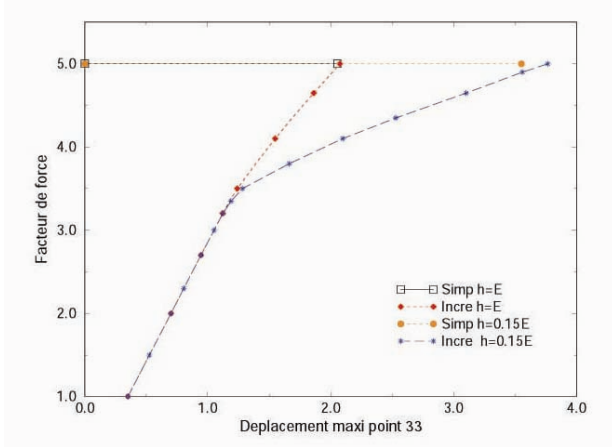


Fig. 4 Compare Simplified with Incremental: Maximum deflection of plate ($h = E$, $h = 0.15E$) [unit: in]

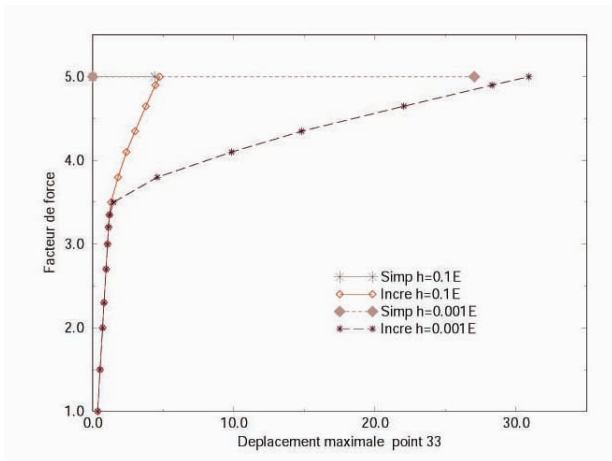


Fig. 5 Compare Simplified with Incremental: Maximum deflection of plate ($h = 0.1E$, $h = 0.01E$) [unit : in]

평판의 소성경화 재료가 다른 경우 일어나는 각각의 최대 처짐 량을 비교하면 다음 표 1 과 같다.

[표 1] Compare Simplified with Incremental:

| Maximum deflection of plate | | |
|-----------------------------|----------------|----------------|
| 처짐/ 방법 | ASSI | NISA 증분법 |
| 탄성 | -0.175103E+01 | -0.175103E+01 |
| $h = 0.15E$ | -0.355136 E+01 | -0.376556 E+01 |
| $h = 0.1E$ | -0.439587 E+01 | -0.475854E+01 |
| $h = 0.01E$ | -0.270391 E+02 | -0.310462E+02 |

최대 처짐 량을 비교하면 그 차이가 $h = 0.15E$ 에서 5%의 차이를 보이며 $h = 0.01E$ 인 경우는 12%의 오차를 보인다. 또한

평판에 작용하는 Von-Mises 응력을 비교하면 다음 그림 6 은 단순화법(Simplified method), 그림 7 은 증분법(Incremental method)에 대한 응력 값이다. 두 응력을 비교하면 최대 값이 단순화법에서는 327.0 psi 이며 증분법에서는 305 psi 값을 보여 주었다. 따라서 두 비교 값에서 큰 차이를 보

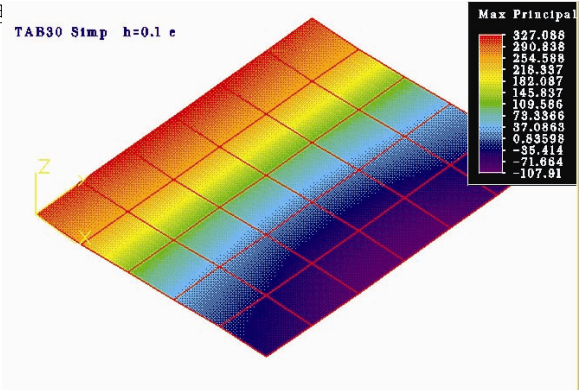


Fig. 6 Von-Mises stresses of Simplified Method: $h = 0.1E$

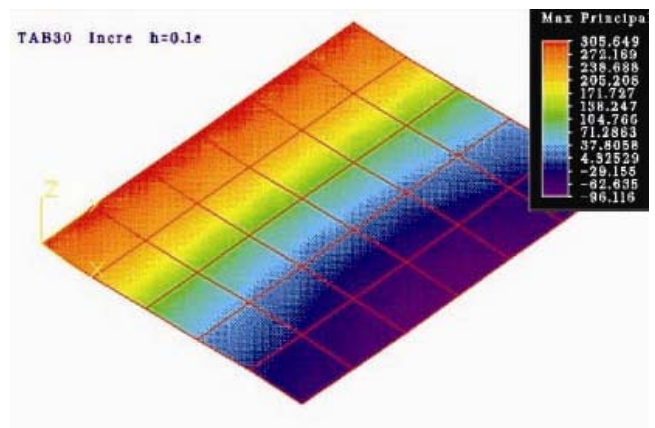


Fig. 7 Von-Mises stresses of Incremental Method: $h = 0.1E$

4. 결론

본 연구에서는 증분법(Incremental method)과 단순화법(Simplified method)을 비교하는 유한요소

해석 연구를 수행하였다. 본 연구의 목적은 탄.소성 해석에서의 단순화법에 대한 이론 적인 연구를 수행하고 본 이론의 정확성을 알아보기 위하여 이미 널리 알려져 사용되고 있는 점진법과 비교 연구를 통하여 단순화법에 대한 이론의 수용 가능성과 적용 가능성을 알아 보고자 연구를 수행 하였다.

본 연구에 따라 수행된 결과 단순화법을 이용한 탄.소성 해석은 증분법에 비교하여 계산 시간 즉 계산 반복 횟수(Iteration)에 있어서 10 배 정도의 빠른 계산 결과를 보여 주었다. 그리고 최대 처짐과 Von-Mises 응력에서는 다른 타 유한요소해석의 결과와 같은 차이를 보여 줌으로서 단순화법을 사용한 유한 요소해석의 방법이 공학 계산에서 사용 가능한 연구 결론을 얻었다.

2005.
 (10) NISA/II Manuals:
 -“NISA/II User’s Guide”
 - “DISPLAY III Manual”, Cranes Software, Inc.,
 2001.

참고문헌

- (1) J. Zarka, Direct analysis of elastic-plastic structures with overlay materials during cyclic loading, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vo. 15. (2) , pp. 225 – 235, 1979.
- (2) N Q SON, , Elastoviscoplastic and elastoplastic materials with a generalized potential, Academie des Sciences (Paris), Comptes Rendus, Serie A-Sciences Mathematiques, Vol. 277, no. 18, pp. 915-918, 1973.
- (3) B.S. Kim, “Optimisation des Structures Inelastiques”, Thesis of PhD, Ecole Polytechnique, 1996.
- (4) M. H. Papin, B. Drubay, B. Michel, “Comparisons of simplified method J[S] and finite element for cracked pipes under thermal and mechanical loading Nuclear engineering and design, Nucl. eng. des., 1999.
- (5) X. Wang, “Simplified method for elasto-plastic finite element analysis of hardening materials, Computers and Structures, Volume 55, Number 4, pp. 703-708(6), 1995.
- (6) T. Ruicheng, W. Xucheng, “Simplified method based on the deformation theory for structural limit analysis--I. Theory and formulation”, The International Journal of Pressure Vessels and Piping, Volume 70, Number 1, pp. 43-49(7), 1997.
- (7) B-S. Kim et al.,“A numerical analysis of the dimensional stability of thermoplastic composites using a thermoviscoelastic composite using a thermoviscoelastic”, Journal of Composite material, Vol. 36, No. 20, pp.2389-2403, 2002.
- (8) S. H. Xiaoming, M.ASCE, P. Edward, Simplified Method of Lateral Distribution of Live Load Moment, J. Bridge Engrg., Volume 9, Issue 4, pp. 382-390, 2004.
- (9) Mori, Ken-ichiro, Nonaka, Takayuki, Simplified Three-Dimensional Finite Element Simulation of Shear Spinning Process Based on Axisymmetric Modeling, Journal of Manufacturing Processes, Vol.1,