

CAD 와의 연동을 고려한 T-스플라인 유한요소해석

엄태경[†] · 윤성기^{*}

T-spline Finite Element Method Integrated with CAD

Tae-Kyoung Uhm and Sung-Kie Youn

Key Words : T-spline(T-스플라인), NURBS, CAD(컴퓨터원용설계), CAE (컴퓨터원용공학)

Abstract

Recently, the new finite element method which uses NURBS as shape functions was proposed. It is very promising because it can directly use CAD data to describe geometry and discretize problem domain. In this case, CAE models are not approximated but represent exact geometry. So, it can contribute to more accurate results. In addition, it can greatly reduce CAE costs in that simulation models don't have to be made up independently. But in spite of these advantages, the method using NURBS have also some disadvantages. NURBS surface cannot be refined locally. T-splines are recently developed surface modeling technique. A T-spline surface is a NURBS surface with T-junctions and is defined by a control grid called T-mesh. The T-junctions enable T-spline surfaces to be refined locally. That is, it is possible to add a single control point to a T-spline control grid without propagating an entire row or column of control points and without altering the surface. In this research, the finite element analysis using T-splines is studied. In this analysis, CAD data are used directly for engineering analysis. Some problems with complex geometry are solved. And the results will be compared with ones of conventional FEM.

1. 서 론

CAE 분야에서 현재까지도 가장 널리 이용되고 있는 유한요소법은 1950 년대와 1960 년대에 그 기원을 두고 있으며 처음에는 항공우주공학에의 적용을 위하여 개발되었으나 그 강력한 기능으로 인해 현재까지도 가장 대중적으로 사용되고 있는 수치해석 수단이다. 이와 달리 CAD 는 그보다 늦은 1970 년대와 1980 년대에 그 기원을 두고 있으며 이로 인해 주요 유한요소 프로그램들은 현대적인 CAD 기술이 널리 퍼지기 전에 이미 성숙단계에 이르게 되었다. 형상이 수치해석의 기본임에도 불구하고 CAD 와 유한요소법 사이의 이러한 뒤바뀐 발달과정으로 인해 결과적으로

CAD 와 유한요소법은 형상을 표현하는데 서로 다른 함수를 사용한다. 즉, CAD 에서는 NURBS(Non-Uniform Rational B-Splines)를 사용하는 반면 유한요소법에서는 다항식을 사용한다. 실제 제품설계 과정을 보면 디자인은 CAD 를 통하여 이루어지고 해석을 위한 모델, 즉 격자구성은 CAD 데이터를 이용하여 독립적으로 이루어지는데 이때, 두 과정에서의 형상 표현방식이 상이함으로 인해 형상의 근사화가 이루어진다. 격자구성은 자동적으로 이루어지는 경우도 있지만 대부분의 경우에는 인력을 많이 필요로 하는 작업이며 해석과정의 대부분을 차지하는 요인이다. 또한, 설계를 변경하는 경우 또는 격자 세분화가 필요한 경우에 종종 격자 구성을 위해서는 CAD 와의 연동을 통한 격자 재구성 과정을 필요로 한다. 이러한 CAD 와의 연동과정 또한 매우 까다로운 작업이며 이로 인해 해석과정에서의 비효율성이 발생한다. 또한 유한요소해석 모델을 생성하는 과정에서 발생하는 근사화는 종종 해석결과

[†] 한국과학기술원 기계공학과
E-mail : espoir@kaist.ac.kr
TEL : (042)869-5031 FAX : (042)869-3095

^{*} 한국과학기술원 기계공학과

의 정확성에 나쁜 영향을 초래하기도 한다. 이러한 CAD 와 CAE 사이에서의 비효율성을 제거하고 형상 근사화에서 오는 해의 부정확성을 차단하기 위하여 CAD 데이터를 직접적으로 CAE 에 이용하는 여러 노력들이 있어왔다. Roh⁽¹⁻²⁾ 등은 NURBS 를 이용한 곡면 표현과 셸 해석에 사용되는 일반 곡선 좌표계를 사용한 셸(shell) 유한요소를 개발함으로써 CAD 시스템과 셸의 유한요소해석을 연동하는 연구를 수행하였고, 얇은 셸에서 일반적으로 발생하는 전단 변형형상과 멤브레인 형상의 잠김을 방지하는 셸 유한요소를 개발하여 이를 셸의 형상 최적설계에 적용하였다. Hughes⁽³⁻⁵⁾ 등은 CAD 에서 일반적으로 사용되는 NURBS 를 유한요소해석에 직접적으로 도입하여 형상을 표현하기 위하여 CAD 와 동일한 함수를 사용하면서 변형장을 구하기 위한 형상함수에도 동일한 함수를 사용하는 스플라인 기반 유한요소법을 제안하였다. 또한, Sevilla⁽⁶⁾ 등은 대상물의 경계와 교차하지 않는 유한요소에 대해서는 기존의 보간방법과 적분방법을 사용하고 경계와 교차하는 유한요소에 대해서는 경계를 표현해 주는 NURBS 데이터를 고려하여 보간 및 적분법을 달리함으로써 CAE 와 CAD 를 연동하는 수치해석 방법을 제안하였다. 본 연구에서는 Hughes⁽³⁻⁵⁾ 등이 제안한 스플라인 기반 유한요소법을 근간으로 하여 국부세분화가 가능하고 서로 다른 패치의 결합을 효과적으로 수행할 수 있는 T-스플라인을 이용하여 이를 유한요소법에 적용하고자 한다. 이때, 유한요소 해석 모델은 CAD 데이터를 직접적으로 이용하여 구성된다.

2. NURBS 와 T-스플라인

2.1 B-스플라인과 NURBS

2.1.1 B-스플라인

B-스플라인 함수는 매개변수에 의해 나타내어지는데 이때, 매개변수 영역에서의 좌표 집합을 매듭 벡터라 하며 다음과 같이 나타낼 수 있다. $\mathbf{U} = [u_0, \dots, u_m]$, $u_i \leq u_{i+1}$, $i = 0, \dots, m-1$ 여기서, u_i 가 매듭점(knot)을 나타낸다. 주어진 매듭 벡터(knot vector)에 대하여 p 차의 i 번째 B-스플라인 기저함수는 다음 식에 의해 나타내어진다.

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{i,p} = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

B-스플라인 기저함수는 단위분할(partition of unity)을 만족하며 국소영역, 즉, $[u_i, u_{i+p+1}]$ 에서만 그 값을 가지며, 항상 음이 아닌 값을 갖는다. 이때, 조정점(control point)의 좌표 \mathbf{P}_i 가 주어지면 B-스플라인 곡선은 다음 식으로 나타내어진다.

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i$$

2 차원 곡면 및 3 차원 입체로의 확장은 매개변수의 확장을 통해 쉽게 이루어질 수 있다. 2 차원 곡면은 다음 식으로 나타내어진다.

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) M_{j,q}(v) \mathbf{P}_{i,j}$$

2.1.2 NURBS(Non-Uniform Rational B-splines)

일반적인 B-스플라인에서는 조정점의 좌표를 직교좌표계를 통해 $\mathbf{P}_i = (x_i, y_i, z_i)$ 로 나타내지만 NURBS 에서는 이를 동차 좌표계(homogeneous coordinate)을 사용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\mathbf{P}_i^w = (x_i w_i, y_i w_i, z_i w_i, w_i)$$

p 차의 NURBS 곡선은 다음 식으로 표현된다.

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i}$$

여기서 \mathbf{P}_i 는 조정점을, w_i 는 조정점의 가중치를, $N_{i,p}(u)$ 는 p 차의 B-스플라인 기저함수를 나타낸다. 이때, 모든 w_i 의 값이 1 이면 NURBS 곡선은 B-스플라인 곡선과 일치하게 된다. 즉, NURBS 의 특정한 형태가 B-스플라인인 것을 알 수 있다. NURBS 곡면은 B-스플라인에서와 마찬가지로 매개변수의 확장을 통해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}}$$

CAD 에서 B-스플라인보다도 NURBS 가 보편적으로 사용되는 것은 3 차원 B-스플라인의 경우 곡선의 변화를 조정하는 조정점의 자유도가 3 개인

데 비해 NURBS 의 경우에는 동차 좌표값이 추가되므로 4 개의 자유도를 갖는다. 따라서 B-spline 보다 NURBS 의 경우에 곡선과 곡면 등의 표현이 더욱 자유스럽다. 또한, 원, 타원, 포물선, 쌍곡선 등의 원추곡선은 유리함수 형태를 갖는데 이러한 이유로 일반적인 다항식의 형태로 표현되는 B-스플라인으로는 원추곡선을 정확하게 표현할 수 없으나 유리함수 형태를 갖는 NURBS 는 이를 정확하게 표현할 수 있다.

본 연구에서는 CAD 에서 널리 이용되는 NURBS 를 근간으로 하여 이를 유한요소해석에 직접 이용함으로써 CAD 와의 연동을 고려하고자 한다.

2.2 T-스플라인

T-스플라인 곡면은 T-접합점(T-junctions)을 갖는 NURBS 곡면이고 T-격자(T-mesh) 의해 정의된다. T-격자는 조정점들의 행 또는 열이 격자 내부에서 단절될 수 있다는 점을 제외하고는 NURBS 의 조정 격자(control mesh)와 유사하다. 이러한 단절된 행 또는 열의 최종 조정점이 바로 T-접합점이다. T-접합점이 바로 T-스플라인 곡면이 국부적으로 세분화될 수 있도록 해주는 역할을 한다. 즉, T-스플라인을 이용하면 조정점의 행 또는 열들을 전 영역에 걸쳐 전파시키지 않으면서 T-스플라인 조정 격자에 하나의 조정점을 추가하는 것이 가능하다. 이때, 곡면의 형상은 그대로 유지된다. T-격자는 또한 T-스플라인의 매듭값과 관련이 있는데 T-격자의 각 모서리에는 매듭간격이 주어져 이로부터 각 조정점에 해당하는 매듭벡터를 구할 수 있다. Fig. 1 에 T-스플라인의 한 예를 나타내었다. 왼쪽이 매개변수 영역에서의 T-격자를 나타낸다. 여기서 2 개의 T-접합점을 볼 수 있다. 오른쪽 그림이 이에 해당하는 조정점 및 곡면을 나타낸다. T-스플라인 곡면 방정식은 다음과 같다.

$$P(s, t) = \frac{\sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i w_i B_i(s, t)}{\sum_{i=1}^n w_i B_i(s, t)}$$

여기서, \mathbf{P}_i 는 조정점을, w_i 는 조정점의 가중치를 나타낸다. 조정점 \mathbf{P}_i 에 해당하는 T-스플라인 기저함수는

$B_i(s, t) = N[s_{i0}, s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, s_{i4}](s) N[t_{i0}, t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, t_{i4}](t)$ 이다. 여기서 $N[s_{i0}, s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, s_{i4}](s)$ 는 매듭 벡터 $\mathbf{s}_i = N[s_{i0}, s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, s_{i4}](s)$ 와 관련된 3 차 B-스플라인 기저함수, $N[t_{i0}, t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, t_{i4}](t)$

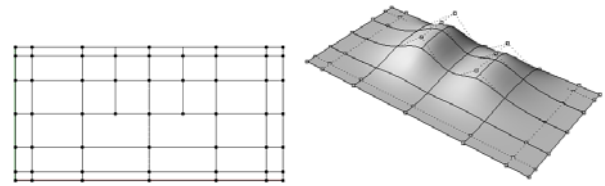


Fig. 1 An example of a T-spline: the T-mesh and the surface

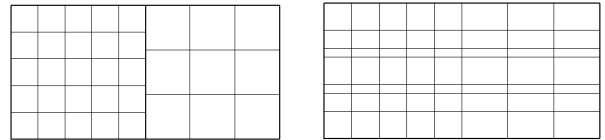


Fig. 2 An example of patch combination: using T-splines(left) and NURBS(right)

는 $\mathbf{t}_i = [t_{i0}, t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, t_{i4}]$ 와 관련된 3 차 B-스플라인 기저함수이다. \mathbf{P}_i 와 관련된 매듭 벡터 \mathbf{s}_i 와 \mathbf{t}_i 는 \mathbf{P}_i 근처의 T-격자로부터 구해진다.

T-스플라인의 국부 세분화와 관련한 특성은 패치간의 결합에도 큰 효율성을 부여한다. Fig. 2 에 두 패치 결합 시의 T-스플라인과 NURBS 의 차이점에 대해 나타내었다. 서로 다른 매듭간격을 갖는 두 패치의 결합 시 T-스플라인을 이용하면 조정점의 추가 없이 효율적인 결합이 가능한 반면 NURBS 를 이용하는 경우 인터페이스에서 양 방향으로 매듭이 전파되어 결과적으로 불필요한 조정점들이 생성된다. 본 연구에서는 T-스플라인의 이러한 특성을 유한요소해석에 이용하여 CAD 와 연동을 통한 효율적인 수치해석 수단을 제안하고자 한다.

3. 스플라인 기반 유한요소해석

3.1 해석 절차

스플라인 기반 유한요소법의 해석 절차를 Fig.3 에 나타내었다. 해석을 위해서는 먼저 CAD 로부터 형상정보를 받아야 한다. 이는 CAD 시스템간의 데이터 교환 표준인 IGES, 제품 데이터 교환 표준인 STEP 등을 통해 이루어질 수 있다. 형상정보를 받게 되면 이미 매듭 간격 및 조정점 등이 결정되어 있고, 이러한 정보를 해석에 직접 이용하므로 기존의 유한요소방법과 달리 해석 모델을 독립적으로 구성해야 할 필요가 없다. 이는 해석과정에서 가장 많은 노력을 필요로 하는 격자구성 과정 자체를 배제하므로 해석과정에서의 노력을 최대한으로 줄일 수 있는 장점이 있다. 형상정보를 받고 나면 다음으로 해석을 위한 하중조건, 경계조건 등의 정보를 입력받는다. 이는

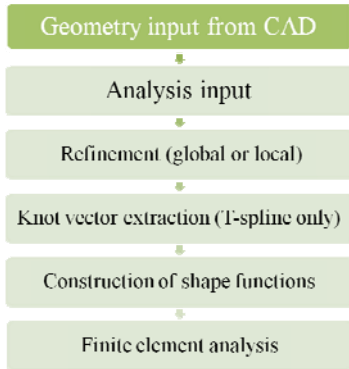


Fig. 3 Analysis procedure of spline-based finite element methods

기존의 유한요소법과 동일하게 이루어진다. 다음으로 격자 세분화 과정이 이루어진다. 이 단계에서 격자 세분화를 수행하는 이유는 NURBS 에서의 조정점들이 기존 유한요소법에서의 절점에 해당하게 되는데 형상 모델링을 위해 필요한 최소한의 조정점들만으로는 해석을 위한 충분한 자유도를 확보할 수가 없기 때문이다. 따라서, 해석을 위한 충분한 조정점들의 추가가 필요하며 이는 형상이 변하지 않는 것을 전제로 이루어진다. 그러나 이러한 세분화 과정은 기존 유한요소법과 달리 매우 쉽고 간단하게 이루어질 수 있다. NURBS 를 이용할 경우, 매듭점의 삽입을 통해 전역적 세분화가 이루어진다. 또한, 차수의 증가를 통한 세분화도 가능하다. NURBS 와 달리 T-스플라인을 이용할 경우 앞서 설명한 바와 같이 조정점의 국부적 삽입이 가능하여 불필요한 조정점들의 추가를 제한할 수 있다. 다음 단계는 T-격자로부터 각 조정점에 해당하는 매듭 벡터를 추출하는 과정으로서 이는 T-스플라인을 이용할 때에만 해당이 된다. NURBS 는 격자 기반이므로 조정점에 해당하는 매듭을 바로 알 수 있지만 T-스플라인은 점기반 스플라인이므로 조정점 각각에 대해 매듭 벡터를 추출해야 하는 것이다. 다음 단계에서는 앞서 설명한 NURBS 및 T-스플라인의 기저함수를 이용하여 각 조정점에 대한 형상함수를 구성한다. 형상 함수가 구성이 되면 그 이후의 해석과정은 기존의 유한요소법과 거의 동일하다.

Table 1 에 기존 유한요소법과 스플라인 기반 유한요소법을 비교하였다. 스플라인 기반 유한요소법에서의 절점이 기존 방법의 절점에 해당하며 매듭에 의해 결정되는 격자가 기존 방법에서의 격자에 해당한다. 스플라인 기반 유한요소법은 많은 점에서 기존 유한요소법과 비슷하지만 Kronecker delta 성질을 만족하지 않으므로 필수경

Table 1. Comparison of conventional and spline-based finite element analysis

Conventional FEA	Spline-based FEA
Nodal points	Control points
Mesh	Knot
Polynomial	NURBS or T-spline
Approximate geometry	Exact geometry
Partition of unity (O)	Partition of unity (O)
Compact support (O)	Compact support (O)
Kronecker delta prop. (O)	Kronecker delta prop. (X)

계조건의 부여 시 주의를 요한다.

4. 해석 예제 및 결과

4.1 해석 예제

Fig. 4 와 같이 가운데 구멍이 있는 무한평판에 대하여 T-스플라인을 이용하여 해석을 수행하였다. 이때, 대칭성을 고려하여 1/4 모델을 사용하였고, $L=4$, $R=1$, $T_x=10$, $E=10^5$, $\nu=0.3$ 의 값을 사용하였다. 무한평판일 때의 정해는 다음 식과 같다.

$$\sigma_{rr}(r, \theta) = \frac{T_x}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{T_x}{2} \left(1 - 4\frac{R^2}{r^2} + 3\frac{R^4}{r^4}\right) \cos 2\theta,$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \frac{T_x}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{T_x}{2} \left(1 + 3\frac{R^4}{r^4}\right) \cos 2\theta,$$

$$\sigma_{r\theta}(r, \theta) = -\frac{T_x}{2} \left(1 + 2\frac{R^2}{r^2} - 3\frac{R^4}{r^4}\right) \sin 2\theta$$

해석을 위하여 두 개의 패치를 이용하여 Fig. 5(a) 와 같이 NURBS 곡면을 생성하였다. 이를 T-스플라인을 이용하여 접합하고 국부 세분화를 수행하여 Fig. 5(b)의 T-스플라인 곡면을 생성하였다. 이 과정 동안 조정점이 국부적으로 추가되어 조정점의 개수가 120 개에서 139 개로 증가하였으며, 이때,

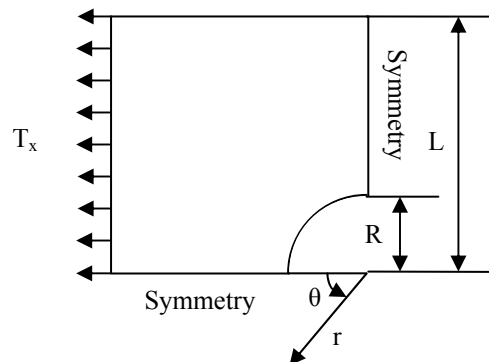


Fig. 4 Infinite plate with a circular hole

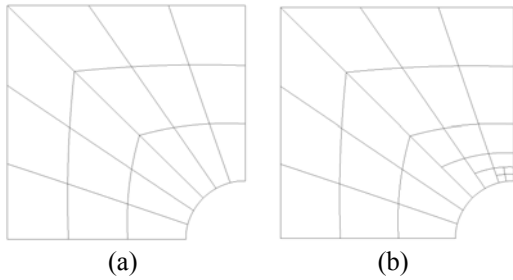


Fig. 5 (a) Initial NURBS mesh, (b) locally refined T-spline mesh

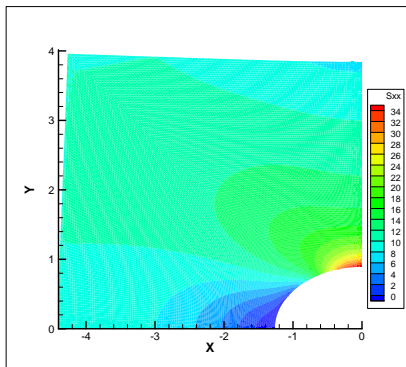


Fig. 6 Analysis result (σ_{xx})

전체 형상은 변하지 않았다.

4.2 해석 결과

해석 결과 중 x 방향의 응력분포를 Fig. 6 에 나타내었다. 이때, $r=R$, $\theta=3\pi/2$ 지점에서 응력집중이 발생하는 것을 볼 수 있다. 앞의 식에 의하면 이 지점에서의 정해는 $\sigma_{xx}=30$ 이며 본 해석결과에서는 $\sigma_{xx}=35$ 에 근접하는 값을 얻었다. 또한, 국부 세분화를 단계적으로 수행함에 따라 수렴하는 것을 확인하였다. 응력값의 오차는 무한평판을 유한평판으로 근사화한 데 따른 것으로 무한평판에 가깝도록 형상을 모델링할 경우 더욱 정해에 가까운 값을 얻을 수 있을 것으로 예상된다.

본 예제에서는 T-스플라인을 이용하여 응력집중이 예상되는 부분에 국부적으로 조정점을 추가함으로써 NURBS 를 이용한 유한요소법에서 세분화 시야기될 수 있는 불필요한 조정점의 추가를 차단하였고 이를 통해 계산비용을 절감할 수 있음을 검증하였다. 향후에는 이에 적응적 기법을 도입하여 국부 세분화 과정을 자동화하고자 한다.

5. 결론

본 연구에서는 CAD 와 CAE 의 연동을 통한 제품설계 과정에서의 효율성을 극대화 하기 위하여 CAD 와 동일한 형상표현함수를 사용할 뿐만 아니

라 수치해석을 위한 형상함수에도 동일 함수를 사용하는 CAD 연동 유한요소법에 대해 고찰하였다. 이를 위해 NURBS 와 비교하여 국부 세분화가 가능하고 패치결합이 매우 용이하며 형상표현이 보다 자유로운 T-스플라인을 유한요소해석에 적용하였으며 구체적인 수치예제를 통해 이러한 방법의 수치적 효율성을 검증하였다.

이를 통하여 해석을 위한 격자구성 과정과 같은 시간지연 요소를 대폭 줄일 수 있고 형상을 정확하게 표현함으로 인해 해석결과의 정확성을 높일 수 있을 뿐만 아니라, CAD 에서 CAE 로, 또한 CAE 에서 CAD 로의 데이터 교환이 자유로워져 제품개발단계에서의 효율성 제고에 획기적인 기여를 할 수 있으리라 예상된다.

참고문헌

- (1) Roh, H. Y. and Cho, M., 2004, "The application of geometrically exact shell elements to B-spline surfaces," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 193, No. 23/26, pp.2261~2299.
- (2) Roh, H. Y. and Cho, M., 2005, "Integration of geometric design and mechanical analysis using B-spline functions on surface," *Int.J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 62, No. 14, pp.1927~1949.
- (3) Hughes, T. J. R., Cottrell, J. A. and Bazilevs, Y., 2005, "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 194, No. 39/41, pp.4135~4195.
- (4) Bazilevs, Y., Calo, V. M., Zhang, Y. and Hughes, T. J. R., 2006, "Isogeometric fluid-structure interaction analysis with applications to arterial blood flow," *Comput. Mech.*, Vol. 38, No. 4/5, pp.310~322.
- (5) Cottrell, J. A., Reali, A., Bazilevs, Y. and Hughes, T. J. R., 2006, "Isogeometric analysis of structural vibrations," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 195, No. 41/43, pp.5257~5296.
- (6) Sevilla, R., Fernández-Méndez, S., and Huerta, A., 2006, "NURBS-enhanced finite element method," *ECCOMAS CFD 2006*, pp.1~13.
- (7) Sederberg, T. W., Zheng, J., Bakenov, A. and Nasri, A., 2003, "T-splines and T-NURCCs," *ACM Trans. Graph. (ACM SIGGRAPH 2003)*, Vol. 22, No. 3, pp. 477~484.

- (8) Sederberg, T. W., Cardon, D. L., Finnigan, G. T., North, N. S., Zheng, J. and Lyche, T., 2004, "T-spline simplification and local refinement," *ACM Trans. Graph. (ACM SIGGRAPH 2004)*, Vol. 23, No. 3, pp. 276~283.