

# MATLAB 을 이용한 신뢰도 기반 설계 시스템 개발

성영화<sup>†</sup> · 곽병만\* · Kurt Maute\*\*

Development of design framework based on reliability analysis using MATLAB

Young Hwa Sung, Byung Man Kwak and Kurt Maute

**Key Words :** MATLAB(매틀랩), Reliability(신뢰도), FORM(일차근사신뢰도법), AMV

## Abstract

The aim of this research is to implement a design framework based on reliability analysis and make it possibly used for a reliable and robust design under uncertainties. Different types of reliability methods and algorithms are programmed to explore their characteristics. In our work, RIA and the PMA are employed for formulating the reliability analysis problems. A number of reliability methods are introduced in this program such as FORM, AMV/AMV+ and MCS. Reliability analysis can be easily performed with this tool box only if a drive file is ready to run. Users need to select random design variables and define their distributions and correlation.

## 1. 서 론

신뢰도 기반 설계란 제품 및 시스템의 설계 과정에서 불확실 요소(uncertainties)를 고려하여 설계하는 것을 의미한다. 불확실 요소는 제품의 재질, 가공오차, 작업자의 실수 등 다양한 종류의 형태로 나타나며 그로인해 설계안과 실제 제품은 항상 차이가 있게 마련이다. 어떤 제품의 허용가능한 최대응력이 주어졌을 때, 안전계수를 고려해서 설계를 하는 것은 불확실 요소를 가장 간단한 표현한 예가 되겠다. 한편, 이러한 확정적인 설계(deterministic design)은 불확실 요소에 대한 확률론적인 정보가 없으므로 지나치게 안전한(too conservative) 혹은 위험한 설계(too risky)가 되기 쉽다 [1]. 그러므로 불확실 요소의 확률론적 정보를 이용하여 설계를 수행하는 신뢰도 기반 설계의 중요성이 되두대고, 확률정보를 다룰 수 있는 신뢰도 기법이 필요하게

된다. 다양한 신뢰도 기법과 적용예제들을 문헌에서 살펴볼 수 있다. 본 연구에서는 확률정보를 토대로 여러 신뢰도 기법들을 적용 및 수정하여 결과를 얻을 수 있는 설계 시스템을 개발하였으며, 적용 예제를 통하여 결과를 분석, 토의해보고자 하며 신뢰도 해석의 다양한 변화를 설계 프레임웍을 통해 살펴보고자 한다.

## 2. 신뢰도방법론

### 2.1 손상확률과 한계 상태 방정식

어떤 제품이 정해진 조건하에서 특정 기간 동안요구되는 기능을 수행하는 확률을 신뢰도라 한다 [2]. 또한 다양한 설계 변수에 의해 제품이 파손이 일어날때, 손상확률( $p_f$ : probability of failure) 및 한계 상태 방정식을 다음과 같이 정의하게 된다.

$$p_f = P[G(\mathbf{X}) \leq 0] = \int_{G(\mathbf{X}) \leq 0} \dots \int f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) d\mathbf{X},$$

$$G(\mathbf{X}) = G(X_1, \dots, X_n) = 0, \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{X}$  는 설계 변수 벡터이고  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$  는

<sup>†</sup> 한국과학기술원 기계공학과

E-mail : yhsung@khp.kaist.ac.kr

TEL : (042)869-5004 FAX : (02)123-1234

\* 한국과학기술원 기계공학과 석좌교수

\*\* University of Colorado at Boulder, Department of Aerospace Engineering Sciences Professor

결합확률밀도함수(joint probability density function)이다. 제품의 손상 여부는 위의 한계 상태 방정식의 부호에 의해 결정되게 되는데,  $G(\mathbf{X}) < 0$  가 되면 파손이 일어나게 된다. 식 (1)을 정확하게 계산하는 것은 경우에 따라 불가능할 수 있으며 많은 노력을 필요로 한다. 이러한 복잡한 손상확률을 비교적 정확하게 계산하는 방법 중에 널리 알려진 것으로 몬테카를로(Monte Carlo) 시뮬레이션이 있다. 이는 랜덤 변수를 발생시킨후, 한계 상태 방정식에 대입하여 제품의 손상이 일어나는 횟수를 세는 방법으로 샘플링 횟수가 많아지면 많아질수록 정확한 확률값을 산출해내게 된다. 한편, 손상확률값이 작을경우 이 방법은 많은 샘플링 시간을 소모하게 되므로 효율이 떨어진다는 단점이 있다. 신뢰도 기법에서 주로 쓰이는 방법은 근사 방법으로 그 차수에 따라 일차 및 이차 근사 방법으로 나뉘게 되며, 보다 정확한 확률 계산을 위해 모멘트 법등이 제안되었다.[3][4][5]

## 2.2 일차근사신뢰도법

한계 상태 방정식을 일차 근사하여 손상확률을 구하는 방법을 일차근사신뢰도법이라 부른다. 한편 일차 근사신뢰도법으로 신뢰도를 구할때 한계 상태방정식의 표현 형태에 관계 없이 동일한 손상확률을 위해 Hasofer 와 Lind 는 불변 2 차 모멘트 방법(advanced first-order second moment method)을 제안한 바 있다[6].

### 2.2.1 최대위반 가능점 (MPP: Most Probable Failure Point)

설계 변수를 표준설계 변수로 만들어 그것을 표준 정규 공간상(u-space)에 나타내면 원점부터 한계 방태 방정식까지 거리가 가장 가까운 점을 찾을 수 있다. 이 점을 최대 위반 가능점(MPP)라 부르며 이 거리가 신뢰도 지수,  $\beta$ 가 된다.

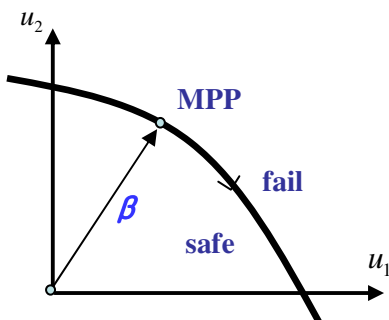


Figure 1. Most Probable Point in u-space

### 2.2.2 AMV(Advanced Mean Value method) [7][8]

한계 상태 방정식을 각 설계 변수의 평균점에서 테일러 전개를 통해 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$G_{MV} = G(\boldsymbol{\mu}) + \sum_i^n \frac{\partial G}{\partial X_i} \Big|_{\mu_i} (X_i - \mu_i) + H(\mathbf{X}) \quad (2)$$

$H(\mathbf{X})$  는 Taylor's series 전개에서 이차항 이상의 항들이다. 일차근사신뢰도법은 (2)의 식에서 일차항들을 가지고 근사하는 방법이다. 한편, AMV 의 경우 (3)식과 같이 더 높은 차수의 항들이 고려되도록 하는 것이다.

$$G_{AMV} = G_{MV} + H(G_{MV}) \quad (3)$$

$H(G_{MV})$  는  $G_{MV}$  값과  $G_{MV}$  의 MPP 에서 계산된 한계 상태방정식 값의 차이이다. AMV 의 해가 수렴할때까지 계속하는 방법을 AMV+라 하며 다음과 같은 식으로 주어진다.

$$G_{AMV} = G(\mathbf{X}^*) + \sum_i^n \frac{\partial G}{\partial X_i} \Big|_{X_i^*} (X_i - \mu_i^*) + H(\mathbf{X}) \quad (4)$$

$\mathbf{X}^*$  는 수렴된 MPP 를 의미한다.

### 2.2.3 수식화

일차 근사신뢰도법에서 손상확률을 구할때 두가지 방식으로 최적화 문제를 정의할 수 있다. 첫번째는 RIA(Reliability Index Approach)로 다음과 같은 수식으로 주어진다.

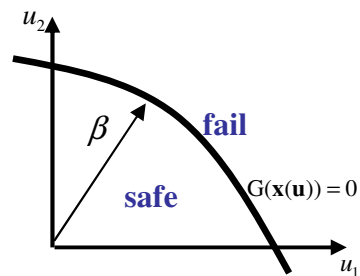


Fig. 2 Reliability Index Approach(RIA)

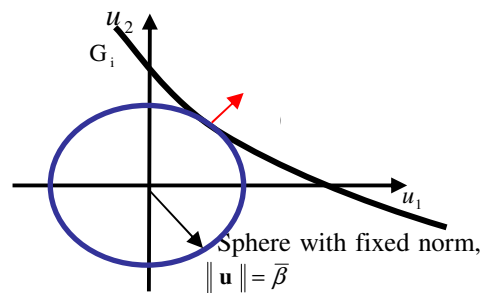


Fig. 3 Performance Measure Approach(PMA)

$$\text{Minimize } \| \mathbf{u} \|$$

$$\text{Subject to } G(\mathbf{u}) = \bar{z}, \quad (5)$$

여기서  $\mathbf{u}$  표준화 된 설계 변수 벡터이며  $G(\mathbf{u})$  는 한계 상태 방정식,  $\bar{z}$  는 한계 상태 방정식의 수준이다.

PMA(Performance Measure Approach)는 RIA 의 제한 조건과 목적함수가 뒤바뀐 것으로 처음에 Lee and Kwak 에 의해 제안되었다가 후에 PMA 로 이름지어졌다 [9][10].

$$\text{Minimize } \pm G(\mathbf{u})$$

$$\text{Subject to } \| \mathbf{u} \| = \bar{\beta}, \quad (6)$$

#### 2.2.4 일차근사신뢰도법과 AMV 의 KKT 조건

일차근사신뢰도법과 AMV 를 KKT 조건을 RIA 수식화를 하였을 경우를 생각하여 비교해보도록한다.

FORM:

$$\text{Minimize } \| \mathbf{u} \|$$

$$\text{Subject to } G(\mathbf{u}) = \bar{z}$$

$$\text{Lagrange: } L = \| \mathbf{u} \| + \lambda(G - \bar{z})$$

KKT:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{\| \mathbf{u} \|} + \lambda \frac{\partial G}{\partial \mathbf{u}} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = G(\mathbf{u}) - \bar{z} = 0. \quad (7)$$

AMV+:

$$\text{Minimize } \| \mathbf{u} \|$$

$$\text{Subject to } G(\mathbf{u}^*) + \frac{\partial G^{*T}}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) - \bar{z} = 0$$

$$\text{Lagrange: } L = \| \mathbf{u} \| + \lambda(G(\mathbf{u}^*) + \frac{\partial G^{*T}}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) - \bar{z})$$

KKT:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{\| \mathbf{u} \|} + \lambda \frac{\partial G^*}{\partial \mathbf{u}} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = G(\mathbf{u}^*) + \frac{\partial G^{*T}}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) - \bar{z} = 0 \quad (8)$$

$\mathbf{u}^*$  는 현재 MPP 이고  $\frac{\partial G^*}{\partial \mathbf{u}}$  는  $\mathbf{u}^*$  에서의 한계 상태 방정식 구배값(gradient) 이다. 일차 신뢰도법에서는 제한 조건식이  $G(\mathbf{u}) = \bar{z}$  으로 주어지므로 비선형일 경우에는 축차과정이 필요한

반면, AMV+에서는 제한 조건식이 일차식으로 주어지게 된다. 즉 KKT 조건을 이용하여 최적화 문제가 한번에 풀리게 된다.

#### 2.2.5 최적화 알고리즘

MPP 검색 과정은 하나의 최적화 과정이므로 최적화 알고리즘을 써서 구할 수 있다. 여기서 SQP(Sequential Quadratic Programming), MMFD(Modified Method of Feasible Direction), NIP(Nonlinear Interior Point) 방법등의 다양한 방법을 이용하여 신뢰도 방법을 적용할 수 있다.

#### 2.2.6 Warm/cold starting [11]

일차근사신뢰도법에서 설계 초기치는 평균값이 될 경우가 많다. 만약, 하나의 설계 수준을 고려하는 것이 아닌 여러 설계 수준을 동시에 고려하고자 할때, 설계 초기치는 항상 평균값에서 시작할 필요가 없으며 이전의 신뢰도 해석 결과를 이용하여 초기치에 반영할 수 있다.

$$\text{RIA: } \mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \alpha \nabla_{\mathbf{u}} G(\mathbf{u}^{(k)}),$$

$$\alpha = \frac{G^{(k+1)} - G^{(k)}}{\| \nabla_{\mathbf{u}} G(\mathbf{u}^{(k)}) \|^2} \quad (9)$$

$$\text{PMA: } \mathbf{u}^{(k+1)} = \frac{\beta^{k+1}}{\beta^k} \mathbf{u}^{(k)} \quad (10)$$

### 3. 신뢰도 기반 설계 시스템

#### 3.1 시스템 구조

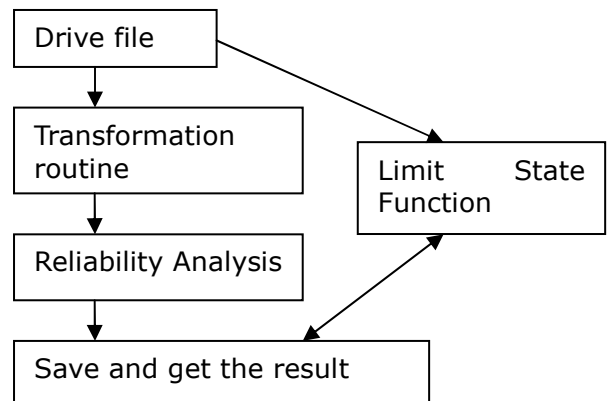


Fig. 4 Flow chart of the program

MATLAB 을 이용한 신뢰도 기반설계는 한계 상태 방정식과 확률론적 설계변수의 평균과 표준편차, 그리고 어떤 확률분포를 가지는지, 설계변수간의 상관관계 행렬만 주어지면 각각의 모듈화된 함수들에 맞추어 최적화가 진행된다. Fig. 4 에서 ‘Reliability Analysis’ 박스 안에서 설계변수 정의, 방법론 선택, RIA, PMA 수식화, Warm starting, 최적화 알고리즘 적용등 다양한 신뢰도 기반 설계작업이 가능하게 된다.

### 3.2 신뢰도 해석 설정

설계 변수의 분포 형태, 평균, 표준편차가 정해지면 이것을 기준으로 설계 변수 변환을 통해 신뢰도 해석이 시작된다. 현재 설계 변수는 정규(normal)분포, 대수정규(lognormal)분포, 균일(uniform) 분포를 사용할 수 있게 제작되었다. 또한 FORM 및 AMV+ 방법을 사용할 수 있으며 정확한 결과와의 비교를 위해 MCS 방법도 지원한다. RIA, PMA 를 통해 수식화 변경을 피할 수 있으며, 한계 방정식에 여러 수준을 정해 풀 경우 warm starting 옵션을 줄수 있다.

## 4. 적용예제

### 4.1 짧은 단 문제(Short Column)

이 예제는 두께  $b$ , 길이  $h$  인 짧은 단문제 해석 문제로서 항복응력  $Y$ , 굽힘 모멘트  $M$ , 축방향 힘  $P$  가 불확실 변수로 주어지는 문제이다 [11][12].

$$G(\mathbf{X}) = 1 - \frac{4M}{bh^2Y} - \frac{P^2}{b^2h^2Y^2}, b = 5, h = 15,$$

$$\text{Correlation matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

설계변수의 확률론적 정보는 Table 1 에 나타나 있다. 설계 수준은 43 개의 설계 수준을 적용하였다. (-9.0 -8.75 -8.5 -8.0 -7.75 -7.5 -7.25 -7.0 -6.5 -6.0 -5.5 -5.0 -4.5 -4.0 -3.5 -3.0 -2.5 -2.0 -1.9 -1.8 -1.7 -1.6 -1.5 -1.4 -1.3 -1.2 -1.1 -1.0 -0.9 -0.8 -0.7 -0.6 -0.5 -0.4 -0.3 -0.2 -0.1 0.0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25)

**Table 1** Probabilistic information of design variables

	P	M	Y
Distribution Type	normal	normal	Lognormal

Mean	500	2000	5
Standard deviation	100	400	0.5

또한 표준 정규 분포 벡터  $\mathbf{u} = (5, 5, -5)$  가 초기값으로 적용되었다. FORM 과 AMV+ 방법 두 가지를 적용해보았으며 FORM 의 경우 SQP 와 연계하였다. SQP 의 경우 MATLAB 내의 ‘fmincon’ 내부 코드를 사용하였다. 이후로 다양한 최적화 알고리즘 적용을 위해 다른 종류의 최적화 알고리즘도 장착되어야 할 것으로 보인다.

표 2, 3 에서 P error norm 혹은 z error norm 은 각 설계 수준(  $G(\mathbf{u}) = \bar{z}$  ) 혹은 신뢰도 지수 수준(  $\|\mathbf{u}\| = \bar{\beta}$  )에서 구해진 값들과 그에 따른 MCS 에서 구해진 값들의 차이를 벡터로 나타내고 그 오차 벡터의 놈(norm)을 구한 것이다. 기존 논문에서 보이듯이 FORM 이 AMV+ 보다 warm starting 에 대한 효과를 더 크게 보는 것을 알 수 있다. 또한 PMA 으로 문제를 풀 경우, AMV+가 상대적으로 FORM/SQP 보다 효과적인 것을 볼 수 있다.

### 4.2 멤스 공진기(MEMS resonator)

멤스 공진기는 센서 및 필터 등 다양한 영역으로 사용가능한 기기로, 기기의 특성상 여러가지의 불확실 요소가 개입될 수 있는 여지가 큰 구조물이다 [13]. 본 연구에서 고려하고자 하는 구조물은 H 빔 형태로 생긴 구조물이다. 각 설계 변수 및 명칭은 Fig.6 에 나타나 있다. 이 공진기의 경우 입력 전극에서 가진이 되면 입력 공진기(input resonator)가 떨게 되며 커플링 빔(coupling beam)을 통해 가진이 전달되며 결과적으로 출력 공진기(output resonator)가 진동하게 된다.

**Table 2** RIA approach, short column

RIA	SQP(cold/warm)	P error norm
FORM	2446/1061	1.36953e-2
AMV+	1925/1036	1.36948e-2

**Table 3** PMA approach, short column

PMA	SQP (cold/warm)	z error norm
FORM	3167/933	1.59943e-4
AMV+	1743/1071	1.05209e-7



비선형성이 두드러진 시스템을 위해 일차 근사신뢰도법 외 다른 보조적인 방법 등이 필요할 것으로 보인다. 한편, 신뢰도 해석의 경우 많은 시간이 소요되므로 일차 근사 신뢰도 정도의 시간이 소요되는 방법을 적절히 선택해야 할 것으로 보인다.

## 5. 결론

신뢰도 기반 설계 방법을 MATLAB 코드를 통하여 설계 시스템화해보았다. 이후로 신뢰도 기반 최적설계까지 병행하는 RBDO(Reliability Based Design Optimization)까지 통합이 되어야 할 것으로 보인다. 본 연구에서 FORM 및 AMV+, 그리고 최적화 알고리즘 적용, 신뢰도 방법 적용 수식화, 신뢰도 방법에서의 옵션등을 통해 신뢰도 기반 설계의 다양화 및 통합화를 살펴보았다. 현재 적용할 수 있는 설계 방법의 개수가 제한적이고 적용 예제의 수가 많지 않으므로 이후로 여러 분야에 걸친 실험을 통해 수정 및 보완해야 할 것으로 보인다. 특히 맵스 공진기 예제에서의 단순한 문제 정의가 아닌 다목적 함수와 보다 많은 설계 변수, 그리고 실제 설계와의 비교를 통해 보다 의미있는 신뢰성 설계가 가능할 것이다.

## 후 기

이 연구는 2005 년 9 월 부터 2006 년 5 월까지 BK 해외 장기 연수의 일환으로 콜로라도대학 (University of Colorado at Boulder)에서 진행되었다. 또한 동대학 항공과 학생 Rajesh 와 Krishna 의 도움에 감사한다.

## 참고문헌

- (1) Hadlar, A. and Mahadevan, S., 2000, *Probability, Reliability, and Statistical Methods in Engineering Design*, Wiley : New York
- (2) Palle Thoft-Christensen and Michael J.Baker, 1982, *Structural Reliability Theory and Its Applications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York
- (3) Y. G. Zhao and T. Ono, 2001, "A Simple Third-Moment Method for Structural Reliability," *Struct. Safety* , 23, 47
- (4) J. S. Huh, K. H. Kim, D. W. Kang, D. G. Gweon, and B. M. Kwak, 2006, "Performance evaluation of precision nanopositioning devices caused by uncertainties due to tolerances using function approximation moment method", *Review of Scientific Instruments*, vol 77, no. 1
- (5) S.H. Lee, B.M. Kwak, 2006, "Response surface augmented moment method for efficient reliability analysis", *Structural Safety*, vol 28, 261-272
- (6) Hasofer A M and Lind N C, 1974, "Exact and invariant second moment code format," *J. Engng Mech. Div.*, 100:111-121
- (7) Wu, Y.T., Millwater, H.R., and Cruse, T.A., 1990, "Advanced Probabilistic Structural Analysis Method for Implicit Performance Functions," *AIAA J.*, 28(9), pp. 1663-1669.
- (8) Thacker, B. H., Nicolella, D. P., Kumaresan, S., Yoganandan, N., and Pintar, F. A., 2001, "Probabilistic Finite Element Analysis of the Human Lower Cervical Spine," *Math. Models Meth. Appl. Sci.*, 13, pp. 12-21.
- (9) T.W. Lee and B.M.Kwak, 1987, "A Reliability-based Optimal Design Using Advanced First Order Second Moment Method," *Mechanics of Structures and Machines*, 15(4), pp523-542
- (10) Tu, J., and Choi, K.K., 1999, "A New Study on Reliability-Based Design Optimization," *ASME J. Mech. Des.*, 121(4), pp. 557-564.
- (11) M.S. Eldred and et al., "Investigation of Reliability Method Formulation in DAKOTA/UQ"
- (12) Kuschel and Rackwitz, 1997, "Two Basic Problems in Reliability-Based Structural Optimization," *Math. Method Oper. Res.*, Vol. 46, pp.309-333
- (13) Des Los Santos HJ., 1999, Introduction to micromechanical (MEM) microwave systems, Dedham: Artech House
- (14) Calfem - A finite element toolbox to MATLAB, version 3.3
- (15) Y.H. Park and K.C.Park, 2004, "High-Fidelity Modeling of MEMS Resonators—Part II: Coupled Beam-Substrate Dynamics and Validation," *JOURNAL OF MICROELECTROMECHANICAL SYSTEMS*, VOL. 13, NO. 2, pp248-257