

내압과 굽힘의 복합하중을 받는 원주방향 표면균열 배관에 대한 하한계 실단면 한계하중

오창균[†] · 김종성* · 진태은* · 김윤재**

Lower Bound Net-Section Limit Loads for Circumferential Part-Through Surface Cracked Pipes under Combined Pressure and Bending

Chang-Kyun Oh, Jong-Sung Kim, Te-Eun Jin and Yun-Jae Kim

Key Words : FE limit analysis(유한요소 한계해석), Net-section limit load(실단면 한계하중), Circumferential part-through surface crack(원주방향 표면균열)

Abstract

This paper provides plastic limit loads of pipes with constant-depth, circumferential part-through surface cracks under combined pressure and bending. A key issue is to postulate discontinuous hoop stress distributions in the net-section. Validity of the proposed limit load solutions is checked against the results from three-dimensional (3-D) finite element (FE) limit analyses using elastic-perfectly plastic material behavior.

1. 서론

복합하중(인장과 굽힘의 복합하중 혹은 내압과 굽힘의 복합하중)을 받는 원주방향 표면균열 배관(circumferential part-through surface cracked pipe)에 대한 소성 한계하중 해석은 배관의 결함 평가에서 매우 중요하다.[1] 소성 한계하중해는 소성붕괴하중이나 구조물이 견딜수 있는 최대 하중을 예측하기 위해 직접적으로 사용될 수 있다. 또한 소성 한계하중은 참조응력법(reference stress approach)에서 J 혹은 C^* 와 같은 비선형 파괴역학 매개변수들을 예측하기 위해서도 사용될 수 있다.[2-4] 일반적인 한계하중 해석은 실단면의 응력평형에 기초하여 수행되어지며, 이러한 한계하중 해석에 의한 한계하중은 하한계 값이 된다. 인장과 굽힘의 복합하중을 받는 원주방향 표면균열에 대한 한계

하중해는 잘 알려져 있다.[1,5-7] 하지만 내압과 굽힘의 복합하중에 대한 한계하중은 일반적으로 인장과 굽힘의 복합하중에 대한 한계하중으로부터 구해진다. 이러한 방법에서는 내압과 인장이 동등하다는 가정을 적용한 것이다. 그러한 가정은 내압에 의한 원주방향 응력의 영향을 정확히 고려할 수 없으므로 주의해야만 한다. 본 논문에서는 위와 같은 가정에 의한 한계하중은 비보수적일 수 있음을 보일 것이다.

본 논문의 목적은 내압과 굽힘의 복합하중을 받는 원주방향 표면균열 배관에 대한 이론적인 소성 한계하중해를 제시하는 것이다. 비록 본 논문에서는 내압과 굽힘하중이 동시에 작용하는 경우만을 고려하였지만, 이러한 방법은 내압, 인장, 굽힘하중이 동시에 작용하는 경우에도 쉽게 적용될 수 있다. 제시된 이론적 한계하중해는 3 차원 탄성-완전소성 재료 거동을 적용한 유한요소 한계해석의 결과와 비교하여 타당함을 입증할 것이다.

2. 인장과 굽힘하중에 대한 한계하중해

본 논문에서 고려한 결함과 하중의 형상은 Fig. 1 과 같다. 결함은 배관 내부에 깊이가 일정한 원

[†] 회원, 한국전력기술㈜
E-mail : ckoh@kopec.co.kr
TEL : (031)289-4570 FAX : (02)123-1234

* 한국전력기술㈜

** 고려대학교 기계공학과

주방향 표면균열이 존재하는 경우를 고려하였으며, 3 가지의 다른 하중(인장, 내압, 굽힘)을 적용하였다. 배관의 평균 반경과 두께는 각각 r 과 t 로 나타내었다. 균일한 결함 깊이를 갖는 원주방향 표면균열은 Fig. 1 에서와 같이 상대적인 결함 깊이 (a/t)와 원주방향 결함 길이(θ/π)로 나타내어질 수 있다. 여기서 $\theta/\pi=1$ 은 균열이 원주방향으로 완전히 발생한 경우를 나타내는 것이다.

인장과 굽힘의 복합하중이 작용하는 원주방향 표면균열에 대한 한계하중은 Fig. 2 와 같은 응력 평형장으로부터 다음과 같이 구해질 수 있다.[1,5-7]

$$m = \sin \beta - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{t} \right) \sin \theta \quad (1)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left(\pi - \frac{a}{t} \theta \right) - n \frac{\pi}{2}$$

식 (1)에서 무차원화된 하중은 다음과 같다.

$$m = \frac{M}{M_0} = \frac{M}{4\sigma_0 r^2 t} ; n = \frac{N}{N_0} = \frac{N}{2\pi\sigma_0 r t} \quad (2)$$

여기서 σ_0 는 탄성-완전소성 재료 거동의 한계응력을 나타내는 것이며, M_0 와 N_0 는 각각 결함이 없는 배관의 굽힘과 인장하중에 대한 한계하중을 나타내는 것이다. 또한 Fig. 2 의 β 는 중립축의 위치를 나타내는 매개변수이다. Fig. 2 와 같이 가정된 응력장에서, 중립축의 위 부분은 인장응력(σ_0)이 작용하며 아래 부분은 압축응력($-\sigma_0$)이 작용하게 된다. 이러한 응력장에 대한 힘과 모멘트 평형 조건으로부터 식 (1)과 같은 관계식은 유도된다. 식 (1)은 Fig. 2 (a)와 같이 모든 균열이 중립축 위에 존재하는 경우에 대한 식이며, 다음과 같은 관계식을 만족해야 한다.

$$\theta \leq \pi - \beta \quad (3)$$

Fig. 3 의 실선은 두 가지의 다른 균열길이 ($\theta/\pi=0.3, 0.5$)에 대한 식 (1)의 결과이다. 유한요소 한계하중의 결과와의 비교는 뒤에서 다시 언급할 것이다. Fig. 3 에서 고려된 모든 경우는 식 (3)을 만족한다.

식 (3)을 만족하지 않는 경우, 즉 균열의 일부가 Fig. 2 (b)와 같이 중립축 아래에 존재하는 식 (4)와 같은 경우의 한계하중해는 다음과 같이 구해질 수 있다.[1,5-7]

$$\theta \geq \pi - \beta \quad (4)$$

$$m = \left(1 - \frac{a}{t} \right) \sin \beta + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{t} \right) \sin \theta \quad (5)$$

$$\beta = \frac{\pi}{2(1-a/t)} \left(1 - 2 \frac{a}{t} + \frac{a}{t} \frac{\theta}{\pi} - n \right)$$

식 (5)에서는 압축응력에 의한 균열 닫힘 현상은 고려하지 않은 것이다.

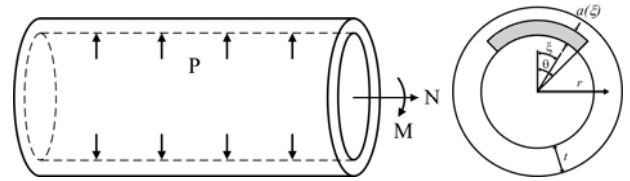


Fig. 1 Pipe with constant-depth, circumferential part-through surface crack, subject to internal pressure P, axial tension N and global bending M.

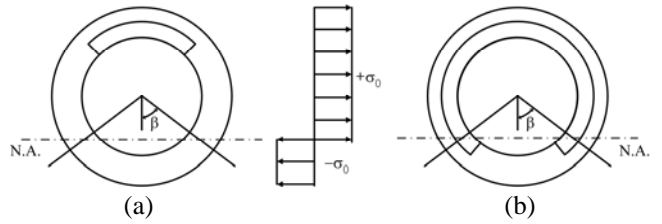


Fig. 2 Assumed net-section axial stress distribution (a) for the case when a whole part of the crack is above the neutral axis, and (b) for the case when a part of the crack is below the neutral axis.

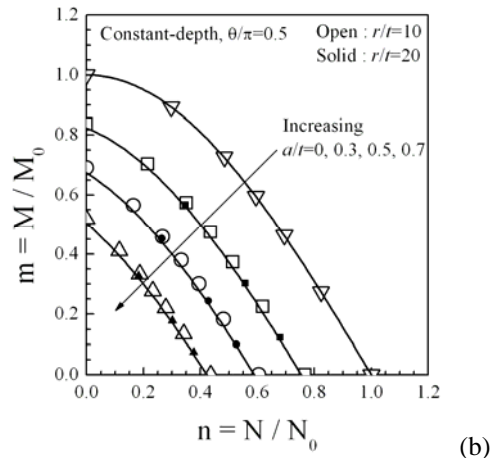
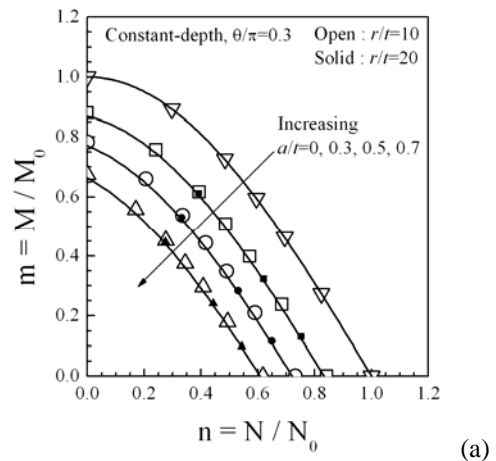


Fig. 3 Yield loci for constant-depth, circumferential part-through surface cracks under combined tension and bending and comparison with FE results.

3. 내압과 굽힘하중에 대한 한계하중해

3.1 하한계 한계하중해

내압과 굽힘의 복합하중이 작용하는 경우에 대하여 한계하중을 구하는 절차는 내압에 의한 원주방향 응력의 영향을 고려한다는 점을 제외하고는 전 장과 동일하다. 내압에 의해 발생하는 원주방향 응력은 다음과 같이 고려될 수 있다.

$$\sigma_{\theta} = \frac{P \cdot r}{(t-a)} \quad (6)$$

식 (6)과 같은 원주방향 응력은 실단면의 모든 위치에서 동일한 것으로 가정할 수 있다. 식 (6)은 다음과 같이 무차원화되어 나타내어질 수 있다.

$$S_{\theta} = \frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_o} = \frac{P \cdot r}{\sigma_o(t-a)} \quad (7)$$

이러한 원주방향 응력을 Von Mises 항복조건에 적용함으로써, 무차원화된 축방향 응력은 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$S_a = \frac{\sigma_a}{\sigma_o} = \frac{1}{2} \left[S_{\theta} + \sqrt{4 - 3S_{\theta}^2} \right] > 0 \quad (8)$$

$$S'_a = \frac{\sigma'_a}{\sigma_o} = \frac{1}{2} \left[S_{\theta} - \sqrt{4 - 3S_{\theta}^2} \right] < 0 \quad (9)$$

식 (8)과 식 (9)는 각각 중립축 위와 아래에서의 축방향 응력을 나타낸 것이며, 실단면에서의 응력 분포는 Fig. 4 (a)와 같다. 이와 같은 응력장은 평형 조건(equilibrium condition)을 만족한다. 식 (8), (9)의 축방향 응력 조건을 힘과 모멘트의 평형조건에 적용함으로써, 다음과 같은 한계하중해를 구할 수 있다.

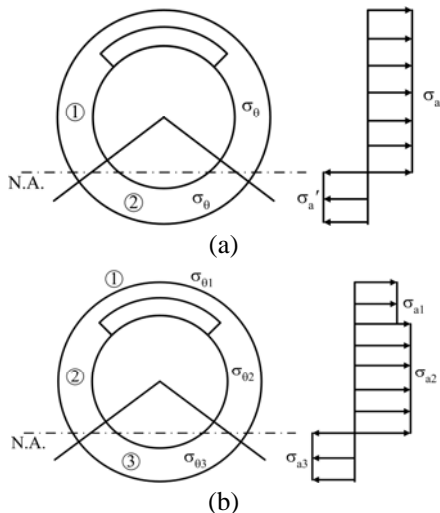


Fig. 4 Assumed net-section hoop and axial stress distributions for the case when a whole part of the crack is above the neutral axis; (a) constant hoop stress and (b) discontinuous hoop stresses in the net-section.

$$m = \frac{(S_a - S'_a)}{2} \sin \beta - \frac{S_a}{2} \left(\frac{a}{t} \right) \sin \theta \quad (10)$$

$$\beta = \frac{\pi}{(S_a - S'_a)} \left(S_a \left(1 - \frac{a}{t} \right) - \frac{p}{\sqrt{3}} \right) \text{ for } 0 \leq p \leq \left(1 - \frac{a}{t} \right)$$

식 (10)에서 무차원화된 내압 p 는 다음과 같다.

$$p = \frac{P}{P_o} \quad (11)$$

$$P_o = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_o \frac{r}{t} \quad (12)$$

원주방향 응력이 없는 경우에, 식 (10)은 식 (1)과 동일해진다. 균열길이 $\theta/\pi=0.3, 0.5$ 인 경우에 대한 식 (10)의 한계하중 결과는 Fig. 5의 점선과 같다. 임의의 균열 길이에 대한 한계하중은 다음과 같은 내압의 한계하중으로 제한되며, 식 (13)보다 큰 값을 갖을 수 없다.

$$p = \frac{P}{P_o} = 1 - \frac{a}{t} \quad (13)$$

이것은 식 (10)이 축방향 응력에 의한 실단면 항복조건이기 때문이다.

원주방향 응력은 균열의 깊이가 깊어짐에 따라 증가하게 되며, 원주방향 응력이 항복응력과 같아지는 경우(식 (12)의 조건)에 실단면의 파단은 원주방향 응력에 의해서만 발생하게 되는 것이다. 식 (10)은 모든 균열이 중립축의 위에 존재하는 경우($\theta \leq \pi - \beta$)에 해당한다. 만일 균열이 중립축의 아래에도 존재하는 경우($\theta \geq \pi - \beta$)에는 균열 닫힘 현상을 고려하지 않은 힘과 모멘트의 평형 조건에 의해 다음과 같이 정리된다.

$$m = \frac{1}{2} \left[S_a \left(1 - \frac{a}{t} \right) \sin \beta - S'_a \left[\left(\frac{a}{t} \right) \sin \theta + \left(1 - \frac{a}{t} \right) \sin \beta \right] \right]$$

$$\beta = \frac{\pi}{(S_a - S'_a)(1-a/t)} \left[S_a \left(1 - \frac{a}{t} \right) + S'_a \frac{a}{t} \left(1 - \frac{\theta}{\pi} \right) - \frac{p}{\sqrt{3}} \right] \quad (14)$$

$$\text{for } 0 \leq p \leq \left(1 - \frac{a}{t} \right)$$

만일 원주방향 응력이 존재하지 않는다면, 식 (14)는 식 (5)와 일치하게 된다.

3.2 근사 한계하중해

식 (10), (14)는 응력장의 평형조건에 기초하여 유도되었기 때문에, 하한계 한계하중에 해당한다. 여기서의 핵심 사항은 식 (6)과 같은 원주방향 응력이 실단면에 균일하게 분포한다는 것이다. 이러한 하한계 한계하중은 매우 보수적인 값을 갖으며, 이에 대한 고찰은 뒤에서 다시 언급할 것이다.

본 연구에서는 보수적인 하한계 한계하중의 보수성을 줄이기 위해 다음과 같은 근사 한계하중

조건을 고려하였다. 균열 부위의 원주방향 응력은 균열의 존재에 의해 감소하게 된다. 하지만 균열이 존재하지 않는 부위의 원주방향 응력은 결함이 없는 배관의 원주방향 응력과 동일하다.

$$S_{\theta 1} = \frac{P \cdot r}{\sigma_o(t-a)} \quad (15)$$

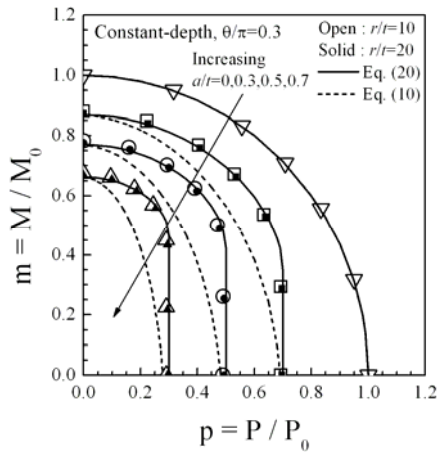
$$S_{\theta 2} = S_{\theta 3} = \frac{P \cdot r}{\sigma_o} \quad (16)$$

식 (15), (16)은 각각 균열 부위와 균열이 존재하지 않는 부위의 원주방향 응력을 나타낸 것이다. 이러한 원주방향 응력의 가정에 의해, Fig. 4 (b)에 나타난 각 영역의 축방향 응력은 다음과 같이 구해질 수 있다.

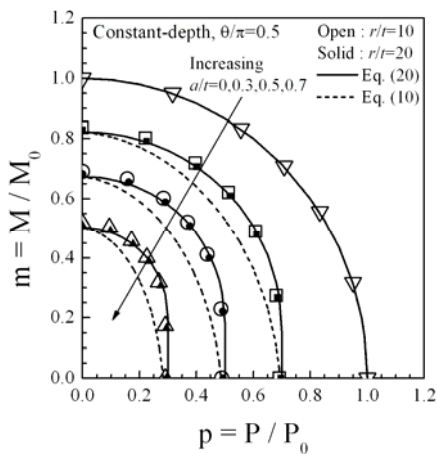
$$S_{a1} = \frac{\sigma_{a1}}{\sigma_o} = \frac{1}{2} \left[S_{\theta 1} + \sqrt{4 - 3S_{\theta 1}^2} \right] > 0 \quad (17)$$

$$S_{a2} = \frac{\sigma_{a2}}{\sigma_o} = \frac{1}{2} \left[S_{\theta 2} + \sqrt{4 - 3S_{\theta 2}^2} \right] > 0 \quad (18)$$

$$S_{a3} = \frac{\sigma_{a3}}{\sigma_o} = \frac{1}{2} \left[S_{\theta 2} - \sqrt{4 - 3S_{\theta 2}^2} \right] < 0 \quad (19)$$



(a)



(b)

Fig. 5 Yield loci for constant-depth, circumferential part-through surface cracks under combined pressure and bending and comparison with FE results.

이러한 응력 조건을 힘과 모멘트의 평형 조건에 적용한 결과는 다음과 같다.

$$m = \frac{1}{2} \left[S_{a1} \left(1 - \frac{a}{t} \right) - S_{a2} \right] \sin \theta + \frac{1}{2} (S_{a2} - S_{a3}) \sin \beta$$

$$\beta = \frac{\pi}{(S_{a2} - S_{a3})} \left[S_{a1} \left(1 - \frac{a}{t} \right) \frac{\theta}{\pi} + S_{a2} \left(1 - \frac{\theta}{\pi} \right) - \frac{p}{\sqrt{3}} \right] \quad (20)$$

$$\text{for } 0 \leq p \leq \left(1 - \frac{a}{t} \right)$$

원주방향 응력이 모두 존재하지 않는 경우($S_{\theta 1} = S_{\theta 2} = 0$)에, 식 (20)은 다시 식 (1)과 일치하게 된다. 또한 $S_{\theta 1} = S_{\theta 2} = Pr/\sigma_o(t-a)$ 인 경우에는 식 (20)은 식 (10)과 동일해지게 된다. 여기서 주목할 사항은 위와 같은 응력장의 가정은 원주방향 응력의 불연속으로 인해 실단면의 모든 위치에서 평형 조건을 만족시키지는 않는 근사 조건이라는 것이다. $\theta/\pi = 0.3, 0.5$ 에 대한 식 (20)의 결과는 Fig. 5의 실선과 같다. Fig. 5로부터 식 (20)에 의한 근사해가 식 (10)에 의한 하한계 해보다 항상 크다는 것을 알 수 있다. 식 (20)은 모든 균열이 중립축의 위에 존재하는 경우($\theta \leq \pi - \beta$)에 해당한다. 만일 균열이 중립축의 아래에도 존재하는 경우($\theta \geq \pi - \beta$)에는 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$m = \frac{1}{2} \left[S_{a1} \left(1 - \frac{a}{t} \right) \sin \beta - S_{a2} \sin \theta - S_{a3} \left(1 - \frac{a}{t} \right) (\sin \beta - \sin \theta) \right]$$

$$\beta = \frac{\pi}{(S_{a1} - S_{a2})(1 - a/t) + S_{a3} \left(1 - \frac{\theta}{\pi} \right) - \frac{p}{\sqrt{3}}} \left[S_{a1} \left(1 - \frac{a}{t} \right) - S_{a2} \left(1 - \frac{a}{t} \right) \left(1 - \frac{\theta}{\pi} \right) \right] \quad (21)$$

$$\text{for } 0 \leq p \leq \left(1 - \frac{a}{t} \right)$$

4. 유한요소해석 결과와의 비교

4.1 유한요소 한계해석

복합하중을 받는 원주방향 표면균열 배관에 대해 유도된 한계하중 식의 타당성을 검증하기 위해, 탄성-완전소성의 재료 거동을 적용한 3 차원 유한요소해석을 수행하였다. 해석은 ABAQUS[8]을 사용하였으며, 소변형의 옵션을 적용하였다. 해석에 사용된 요소는 C3D20R 이며, 완전소성해석은 RIKS 옵션을 적용하여 수행되었다.

본 연구의 유한요소 한계하중 해석에서의 한 가지 중요한 사항은 균열의 모델링이다. 배관의 축방향으로 0 의 길이를 갖는 원주방향 균열의 형상은 참고문헌 [9]에서와 같이 잘 정립될 수 있다. 하지만 본 연구에서 고려하는 한계하중은 하한계 한계하중이며, 이러한 균열 모델에 의한 유한요소

한계하중 값보다 항상 작게 된다. 이러한 하한계 한계하중은 Fig. 6 에서와 같이 원주방향 형상은 동일하면서 축방향으로 충분히 긴 노치형상을 갖는 유한요소 모델로부터 근사적으로 구해질 수 있다. 따라서 본 연구에서는 이론적으로 유도된 하한계 한계하중 식의 타당성을 검증하기 위해 Fig. 6 (b)와 같은 축방향으로 충분히 긴 노치 형상을 갖는 유한요소 모델을 적용하였다. 이러한 유한요소 모델의 타당성을 검증하기 위해, 본 연구에서는 하한계 한계하중해가 알려져 있는 단순한 모델에 적용하여 결과를 비교하였다.

인장하중만이 작용하는 경우의 하한계 한계하중해는 다음과 같다.[1,5]

$$\frac{N_L}{N_o} = \frac{N_L}{(2\pi r t \sigma_o)} = 1 - \frac{\theta \frac{a}{t} + 2 \sin^{-1} \left(\frac{a \sin \theta}{2t} \right)}{\pi} \quad (22)$$

또한 굽힘하중만이 작용하는 경우의 하한계 한계하중해는 다음과 같다.[1,5]

$$\frac{M}{M_o} = \frac{M}{(4\sigma_o r^2 t)} = \cos \left(\frac{\theta a}{2t} \right) - \frac{1}{2} \frac{a}{t} \sin \theta \quad (23)$$

본 연구에서는 두가지 $\theta/\pi(=0.3, 0.5)$ 와 $r/t(=10, 20)$ 의 유한요소모델에 대하여 인장하중 및 굽힘하중을 가하여 한계하중을 구하였으며, 알려져 있는 해와 비교하였다. Fig. 7 (a)와 (b)는 각각 인장과 굽힘하중에 대한 유한요소 한계하중 결과를 하한계 한계하중해와 비교하여 나타낸 것이며, 모든 경우에서 노치형상을 갖는 유한요소 모델의 결과는 이론식과 잘 일치하였다.

Fig. 3은 Fig. 7에서와 동일한 모델에 인장과 굽힘하중을 동시에 받는 경우에 대한 유한요소 한계하중 결과를 이론식과 비교한 것으로서, 이 경우에도 잘 일치함을 알 수 있다.

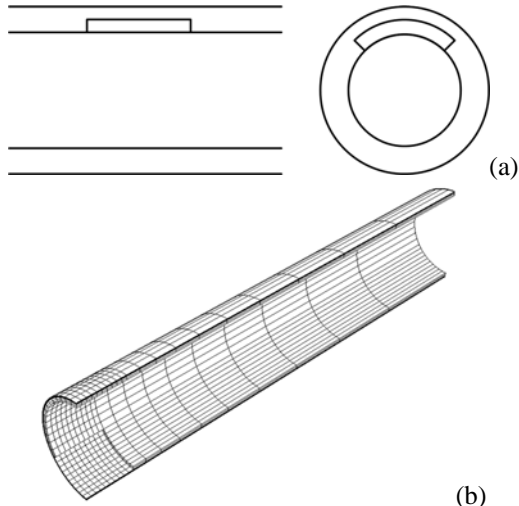


Fig. 6 Schematic illustrations for a constant-depth (rectangular) notch

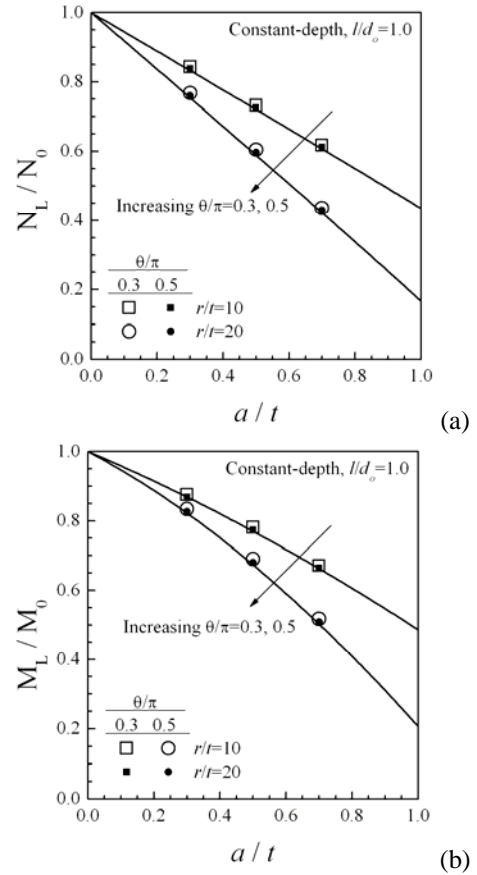


Fig. 7 Comparison of analytical limit loads for constant-depth, circumferential part-through surface cracks with FE results: (a) under tension and (b) under bending.

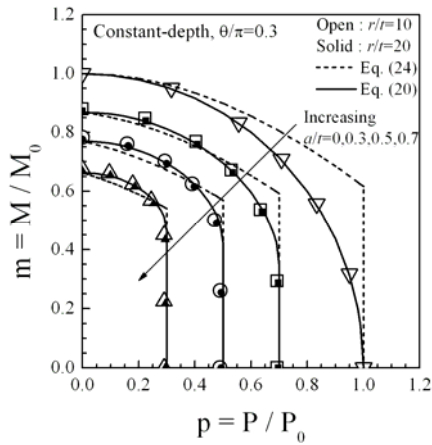
4.2 한계해석 결과와 이론식의 비교

Fig. 5는 내압과 굽힘의 복합하중이 작용하는 원주방향 표면균열 배관에 대한 유한요소 한계해석 결과를 유도된 이론식과 비교하여 나타낸 것이다. 본 연구에서는 두가지의 $\theta/\pi(=0.3, 0.5)$ 와 두가지의 $r/t(=10, 20)$ 그리고 4가지의 $a/t(=0, 0.3, 0.5, 0.7)$ 를 고려하였다. Fig. 5로부터 유한요소 한계해석의 결과는 식 (20)과 매우 잘 일치함을 알 수 있다. 하지만 하한계 한계하중인 식 (10)은 매우 보수적임을 알 수 있다.

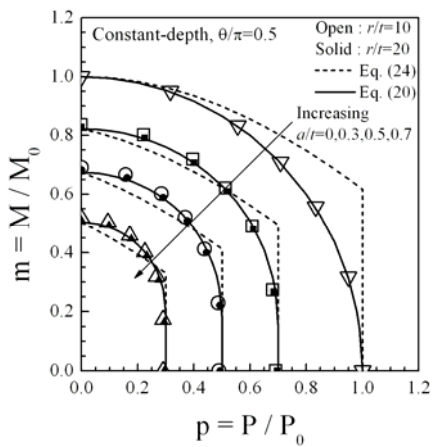
본 연구에서 주목할 만한 또 한가지의 사항은 내압과 굽힘의 복합하중이 작용하는 경우에 일반적으로 적용되는 한계하중해와의 비교이다. 일반적으로 적용되는 한계하중의 해는 내압을 인장하중과 동일하게 적용하는 방법에 의해 다음과 같이 구해질 수 있다.[1,5,7]

$$m = \sin \beta - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{t} \right) \sin \theta \quad (24)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left[\left(\pi - \frac{a}{t} \theta \right) - p \right] \text{ for } 0 \leq p \leq \left(1 - \frac{a}{t} \right)$$



(a)



(b)

Fig. 8 Yield loci for constant-depth, circumferential part-through surface cracks under combined pressure and bending, derived using the equivalence of pressure and tension, and comparison with the proposed solutions and FE results.

Fig. 8의 점선은 식 (24)를 나타낸 것이고, 실선은 본 연구에서 유도된 식 (20)을 나타낸 것이다. Fig. 8로부터 식 (24)는 굽힘응력이 상대적으로 큰 경우에는 유한요소 해석결과와 어느정도 잘 일치하나, 내압에 의한 응력이 상대적으로 큰 경우에는 유한요소 해석의 결과보다 더 큰 값을 예측함을 알 수 있다. 이러한 비보수적인 예측은 균열의 깊이가 얇은 경우에 더 커지는 것을 알 수 있다. 따라서 내압을 인장하중과 동일하게 적용하는 방법에 의한 한계하중의 예측은 일부 비보수적일 수 있으므로 적용에 주의해야 한다.

5. 결론

본 연구에서는 원주방향 표면균열 배관에 작용하는 내압과 굽힘의 복합하중에 대한 이론적인 한계하중해를 실단면의 원주방향 응력을 고려하는 방법에 의해 두가지로 제시하였다. 하나는 원주방향 응력이 실단면에 균일하게 분포한다는 가정을

적용한 것이고, 다른 하나는 원주방향 응력이 불연속적으로 존재한다는 가정에 따른 것이다. 제시된 한계하중해의 타당성을 검증하기 위하여, 탄성-완전소성의 재료 거동을 적용한 3 차원 유한요소 해석을 수행하였다.

본 연구의 결과로부터 균일한 원주방향 응력의 적용에 따른 결과는 유한요소 해석의 결과보다 매우 보수적이었으나, 불연속적인 원주방향 응력 가정에 의한 결과는 해석과 매우 잘 일치하였다. 또 하나의 중요한 사항은 내압을 인장하중과 동일하게 적용하는 방법에 의한 한계하중의 예측은 일부 비보수적일 수 있다는 것이다. 이러한 비보수적인 예측은 내압에 의한 원주방향 응력을 고려하지 않았기 때문에 발생한 것이다.

참고문헌

- (1) Miller, A. G., 1988, "Review of limit loads of structures containing defects," *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 32, pp. 191-327.
- (2) Ainsworth, R. A., 1984, "The assessment of defects in structures of strain hardening materials," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 19, pp. 633-642.
- (3) British Energy, 2001, R6: Assessment of the integrity of structures containing defects, Revision 4.
- (4) British Energy, 1999, R5: An assessment procedure for the high temperature response of structures, Revision 2.
- (5) Jones, M. R. and Eshelby, J. M., 1990, "Limit solutions for circumferentially cracked cylinders under internal pressure and combined tension and bending," *Nuclear Electric Report TD/SID/REP/0032*
- (6) Rahman, S. and Wilkowski, G., 1998, "Net-section-collapse analysis of circumferentially cracked cylinders – part I: arbitrary-shaped cracks and generalized equations," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 61, pp. 191-211.
- (7) Rahman, S., 1998, "Net-section-collapse analysis of circumferentially cracked cylinders – part II: idealized cracks and closed-form solutions," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 61, pp. 213-230.
- (8) ABAQUS Inc., 2005, "ABAQUS Ver. 6.5-1 User's Manual."
- (9) Anderson, T. L., 1995, *Fracture mechanics fundamentals and applications*, CRC Press