韓國數學敎育學會 주최 제 12회
國際數學英才敎育세미나 프로시딩
2007. 2. 37-59

Proceedings of the 12th International Seminar on
Education of Gifted Students in Mathematics
February 2007. 37-59

소마큐브의 해 탐구

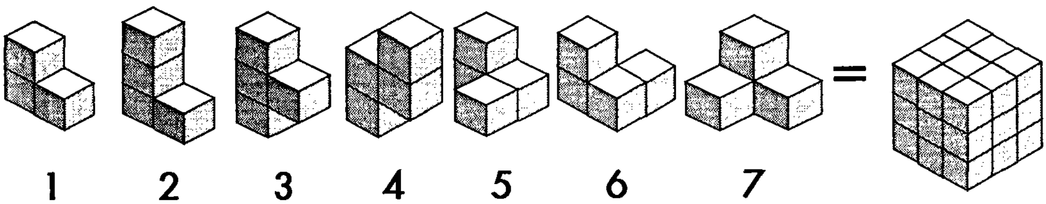
송 근 윤 (김포중학교)

1. 소마큐브에 대한 소개

소마규브의 창시자는 덴마크 출신의 작가인 피에트 하인(Piet Hein)이다. 1936년 어느 날, 그는 양자 물리학 강의를 듣던 중에 이 퍼즐을 고안하게 되었다. 그 강의는 공간이 어떻게 정육면체들로 잘게 잘리워 질 수 있는가에 관한 것이었는데, 그 때 피에트는 갖은 상상의 나래를 펴고 있었다.

결국에는 간단한 이론을 정립하기에 이르렀는데 **"크기가 서로 같고 면이 서로 접하는 규브 4개 이하로 조합된 불규칙한 모양들로 조금 더 커다란 정육면체를 만들 수 있다"** 그는 결국 소마큐브를 이루는 7개의 조각을 만들게 되었고 이로부터 여러 가지 다양한 모양의 구조물을 만들어내는 일을 착수하기 시작했다. 이에 피에트와 그의 동료인 소마 실험자들은 몇 개의 조각들로 모양을 만드는 행동들이 매우 재미있고 심지어는 중독되기까지 한다는 것을 알게 되었다.

소마큐브는 각각 3개 또는 4개의 정육면체로 구성된 7개의 조각으로 되어진 3차원의 입체 퍼즐이다. 이 7개의 조각들로 수천 종류의 기하학적인 모양들을 만들 수 있다.



그로부터 수년 후에 소마큐브는 대량으로 생산이 되었고 1970년에 파커 브라더즈 회사에서 새로운 버전이 나오게 되었다. 얼마 후에 파커 브라더즈 회사에서는 소마중독(The Soma Addict)이라는 간행물을 발간하여 무료로 배포하였다. 이 간행물은 새로운 모양의 퍼즐을 제시함으로써 사람들에게 생각할 것들을 제공하였을 뿐 아니라 **어떤 퍼즐은 해결이 가능**하고 **어떤 것은 불가능**한지를 보여주는 증거자료를 제시하기도 하였다.

"소마"라는 이름은 미래사회를 묘사한 Aldous Huxly의 소설 "용감한 신세계(Brave New World)"에서 인용한 것이다. "소마"는 그 세계의 정착민들이 한가할 때나 기분이 좋지 않을 때 사용했던 중독적인 마약이었다. 7개의 소마조각들로 **정육면체를 만드는 서로 다른 방법은 480가지의 방법들이 있다. 만약 회전하는 경우의 수까지도 생각한다면 모두 1,105,920가지나 된다.**

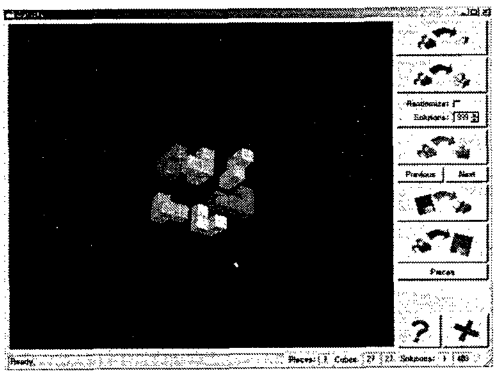
http://www.fam-bundgaard.dk/SOMA/SOMA.HTM

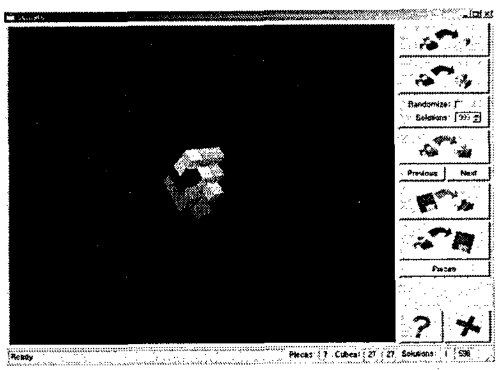
위 사이트의 News Letter 는 소마큐브의 발견부터 최근까지의 소마큐브에 대한 연구 모든 내용들이 실려있다. 이중에서 다음의 세 가지 주제를 보다 심층적으로 토론하여 보면 좋을 것이다.

1. 1999. 02. 01 Winning Way's about the SOMA cube solutions.
2. 2003. 05. 18 The complete "SOMAP" is found by William Kustes.
3. 2004. 01. 02 Mirroring and SOMA by Edwin B. Hathaway.

1961년에 J. H. Conway and Mike Guy 에 의해 각 큐브의 7조각에 서로 다른 7가지의 색을 칠함으로써 소마큐브의 서로 다른 해가 240가지임을 수작업으로 완벽한 목록을 작성하였다. 이는 1999년 2월 1일자로 소개하고 있다. 그리고, 2003년 5월 18일 William Kustes 에 의해서 소마큐브의 해에 대한 지도(The SOMAP)가 완성되었으며, 2004년 1월 2일엔 Edwin B. Hathaway 에 의해서 소마큐브의 해가 240가지가 아닌 480가지임을 거울반사를 통해 제기하게 된다. 이것을 난 1년 6개월에 걸친 작업끝에 최소합에 따른 분류로 서로 다른 소마큐브의 해 480가지를 찾게 되었다. 여기에는 엑셀프로그램의 역할이 컸다.

2004년 3월 20일에는 Marc Moerig 에 의해서 자신의 홈페이지 http://www.moerig.com/somatic 에 somatic-win-binary-20040406.ZIP 라는 프로그램 파일을 올렸는데 이 프로그램은 소마큐브의 모든 해뿐만 아니라 일반적인 3×3×3로 만들어지는 수천가지 모형들의 해를 모두 찾아주는 프로그램이다.

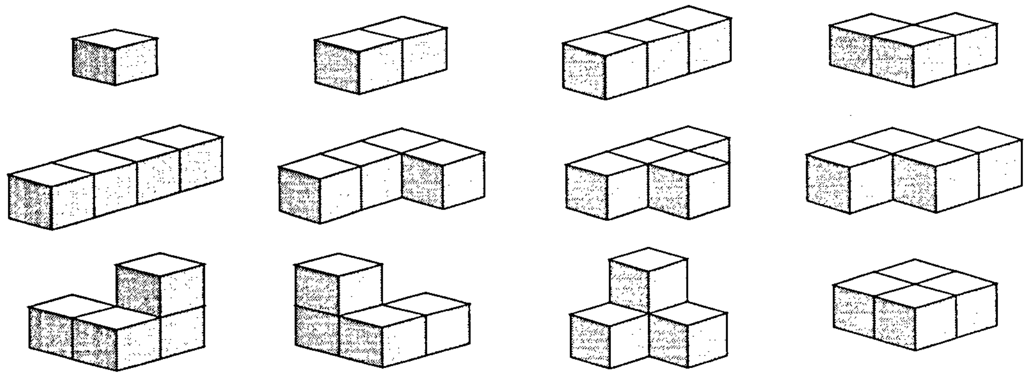




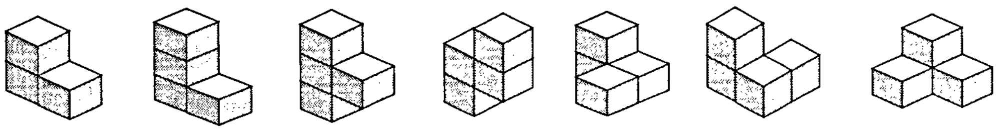
Somatic Program의 알고리즘을 이해할 수 있다면 모형을 맞추는 것이 가능한지 불가능한지 뿐만 아니라, 가능하다면 몇 가지 방법으로 맞출 수 있는지도 알 수 있을 것이다.

2. 소마조각에 대한 연구

정육면체의 한 면 또는 두세 개의 면을 서로 맞붙어서 불규칙한 모양을 만들어낸다. 크기가 모두 같고 면이 서로 접하는 4개 이하의 정육면체를 조합하여 만들 수 있는 서로 다른 입체 도형은 모두 12가지이다.

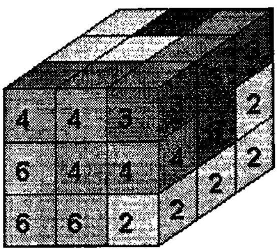


피에트 하인은 3×3×3소마큐브를 이루는 9개의 소마조각 중 3개의 조각으로 이루어진 2개와 4개의 조각으로 이루어진 7개로 아래와 같은 14가지의 선택이 가능한데 이 중 다음을 선택하였다.



3. 정육면체를 기록지에 기록하는 방법

<예1>



윗 면

1	5	3
1	1	3
4	4	3

6+ 10+ 9=25

중 앙

7	5	2
5	5	3
6	4	4

18+ 14+ 9=41

바 닥

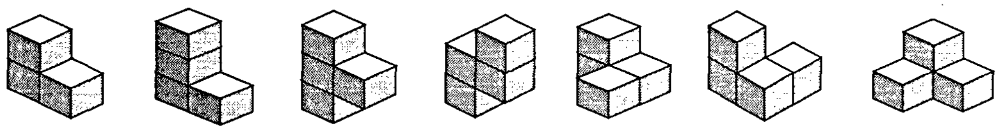
7	7	2
7	6	2
6	6	2

20+ 19+ 6=45

윗 면		
W	L	G
W	W	G
O	O	G

중 앙		
B	L	Y
L	L	G
R	O	O

바 닥		
B	B	Y
B	R	Y
R	R	Y



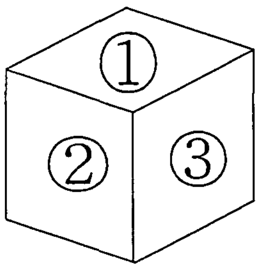
1(White) 2(Yellow) 3(Green) 4(Orange) 5(bLue) 6(Red) 7(Black)

정육면체를 기록하는 방법은 24가지이므로 이를 한 가지 방법으로 통일시킬 필요가 있다. 즉, 24가지가 모두 같은 정육면체이기 때문에 기록할 때는 1가지 방법으로 일치시키려는 것이다. 그러기 위해서는 어떤 기준이 필요하다. 그 기준은 여러 가지 방법으로 세울 수 있지만, 나는 최소합이라는 기준을 세우려고 한다.

정의

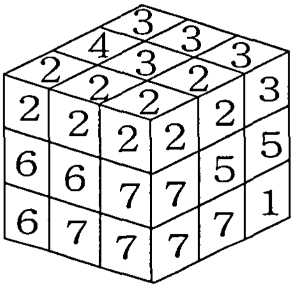
최소합 : 정육면체가 만들어지면 각 6면중 그 합이 가장 작은 수

그러면, 최소합이 항상 위로 오도록 정육면체를 놓으면 기록하는 24가지 방법이 4가지로 줄어든다. 이때 남은 4가지는 최소합이 위로 오도록 놓을 때 정육면체를 회전하는 가지수이다. 이 4가지는 윗면 9개 수의 합, 중앙 9개 수의 합, 바닥면 9개 수의 합이 모두 일치한다. 만약 6면 중 합이 가장 작은 수가 2개나 3개가 동일하게 나온다면 중앙의 합이 더 작은 쪽을 최소합으로 정하기로 한다. 따라서, 4가지를 1가지로 통일시키려면 다른 또 하나의 기준이 필요하다.

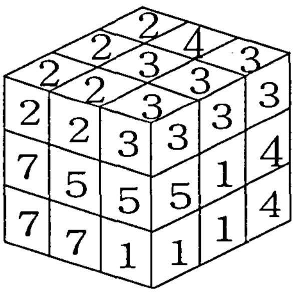


왼쪽 그림에서 보듯이 하나의 정육면체에서 ①, ②, ③ 면을 각각 윗면으로 하도록 회전시켜 본다. 이때, ①은 최소합으로 놓는다. 그리고, ①, ②, ③ 각각에 대해 윗면의 합, 중앙의 합, 바닥면의 합을 순서대로 구한다. 만일, 최소합이 2개가 나온다면 중앙의 합이 작은 최소합을 ①로 두어야 한다.

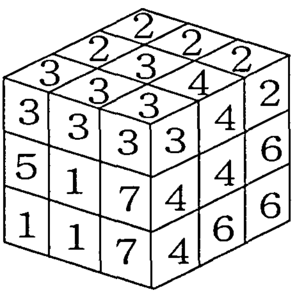
이제, 하나의 정육면체에서 최소합이 위로 오도록 만들었을 때, **오른쪽으로 회전하는 4가지 경우**에 대하여 ①, ②, ③이 어떻게 바뀌는지 살펴보자.



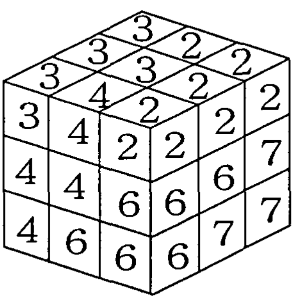
0회전	윗면의 합	중앙의 합	바닥면의 합
①	24	43	44
②	45	41	25
③	39	33	39



1회전	윗면의 합	중앙의 합	바닥면의 합
①	24	43	44
②	39	33	39
③	25	41	45



2회전	윗면의 합	중앙의 합	바닥면의 합
①	24	43	44
②	25	41	45
③	39	33	39



3회전	윗면의 합	중앙의 합	바닥면의 합
①	24	43	44
②	39	33	39
③	45	41	25

앞에서 알 수 있듯이 오른쪽으로 회전하는 수에 따라 ①, ②, ③의 경우 모두 합은 같으나, 윗면의 합, 중앙의 합, 바닥면의 합이 놓이는 위치가 다르다. 이 중 오른쪽으로 2회전일때를 택하고자 한다. 따라서, 이쯤에서 또 하나의 기준을 세울 필요가 있다. ①, ②, ③에서 윗면의 합은 바닥면의 합보다 반드시 작거나 같도록 한다.

그러면, 하나의 정육면체를 기록할 때 한 가지 방법으로 기록할 수 있게 된다.

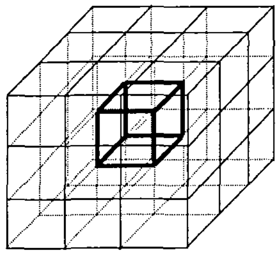
정육면체를 기록할때의 기준

기준 1 : 6면중 최소합이 위로 오도록 놓는다. 최소합이 2개가 나온다면 중앙의 합이 작은 최소합을 위로 둔다.

기준 2 : ①, ②, ③에서 윗면의 합은 항상 바닥면의 합보다 작거나 같아야 한다.

기준 3 : 기준1과 기준2가 동일하다면 ①, ②, ③의 윗면 크기 순서대로 나열한다.

소마큐브 해 하나를 찾기 위해 정육면체를 하나 만들어서 각 면의 합 중 최소합을 구하고, 이리저리 돌려보면서 기준에 적합한지 일일이 맞추어 본다는 것은 상당한 시간이 소요된다. 그러기에 불필요한 계산을 막기 위해 <u>**엑셀 프로그램을 사용**</u>하였다. 자동 수식계산에 상당한 이점이 있기 때문이다.

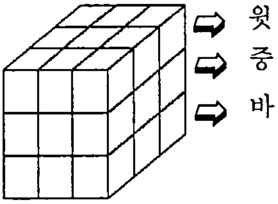


여기서 한 가지 주목할 부분이 있다. 정육면체를 만들면 24가지 방법으로 회전을 시키더라도 한 숫자는 항상 그 자리를 지키는 수가 있다. 오른쪽 그림처럼 바로 정육면체 내에 있는 숨은 부분이 그 수이다. 이를 고정수라 부르겠다.

정의

고정수 : 정육면체가 만들어지면 그 내부의 보이지 않는 수
즉, 고정수는 정육면체가 회전되더라도 움직이지 않는 수이다.

▷**질문1.** 3×3×3 정육면체를 만들어 아래와 같은 기록지에 숫자로 기록하는 서로 다른 방법은 모두 몇 가지나 있을까?



윗 면

중 앙

바 닥

▷**질문2.** 소마큐브 각 7조각에 숫자를 써서 정육면체를 만들 때와 각 조각에 서로 다른 색을 칠하여 정육면체를 만들 때 서로 다른 소마큐브의 해의 가지 수가 달라지는가?

▷**질문3.** 하나의 3×3×3 정육면체를 만들어 종이에 숫자를 이용하여 기록할 때 윗면 9개의 합, 중앙 9개의 합, 바닥 9개의 합을 모두 합하면 얼마인가? 또, 그 합은 항상 일정한가?

▷**질문4.** 3×3×3 정육면체를 만들어 위와 같은 기록지에 기록하였을 때 이들이 서로 같은 해인지 다른 해인지 구별할 수 있는가? 있다면 구체적인 방법을 설명해 보자.

4. 소마큐브 해에 대한 반사

소마큐브로 정육면체를 만들고 최소합이 위로 오도록 조절하자. 이를 거울에 의해 반사된 이미지를 기록지[별첨2]에 기록한다. 한 예를 들어보면, 다음과 같다(엑셀파일을 이용하면 쉽게 계산할 수 있다).

1. 정육면체가 기록할 때의 기준에 적합하도록 기록한다.

윗 면

2	2	2
7	1	1
4	4	1

13+7+4 = 24

중 앙

5	5	2
7	7	6
7	4	4

19+16+12 = 47

바 닥

5	6	6
5	3	6
3	3	3

13+12+15 = 40

① 윗면 + 중앙 + 바닥 = (24) + (47) + (40) = (111)
② 윗면 + 중앙 + 바닥 = (33) + (43) + (35) = (111)
③ 윗면 + 중앙 + 바닥 = (31) + (35) + (45) = (111)

2. 1번의 정육면체를 거울에 반사시켜 얻은 정육면체를 기록한다.

윗 면

2	2	2
1	1	7
1	4	4

4+7+13 = 24

중 앙

2	5	5
6	7	7
4	4	7

12+16+19 = 47

바 닥

6	6	5
6	3	5
3	3	3

15+12+13 = 40

앞의 기록지에 기록된 대로 소마큐브로 정육면체를 만들어 보아라. 가능한가? 불가능한가?

불가능하다. 그 이유는 소마조각 1번, 2번, 3번, 4번, 7번은 거울에 의해 반사된 이미지가 자기 자신의 모양과 일치한다. 그러나 5번과 6번은 서로 뒤바뀐다. 다시 말하면, 5번조각을 거울에 반사시키면 6번이 되고, 6번조각을 거울에 반사시키면 5번이 된다. 따라서, 거울에 반사된 이미지를 기록지에 기록할 때는 5번과 6번을 서로 바꾸어 적어야 함을 알 수 있다.

따라서, 하나의 소마큐브의 해를 거울에 반사시켜 얻은 새로운 정육면체는 5번과 6번 조각이 서로 바뀌기 때문에 같은 소마큐브의 해라고 볼 수 없다. 그러기에 거울에 의해 반사시켜 얻은 모든 소마큐브의 해는 서로 다른 소마큐브의 해가 된다. 한 가지 주의할 점은 거울에 반사시켜 얻은 소마큐브의 해라고 해서 항상 윗면의 최소합이 같지는 않다. 윗면에 5번과 6번 조각이 놓이게 되면 서로 바뀌기 때문에 최소합이 항상 유지되지는 않는다.

3. 거울에 반사된 정육면체에서 5번과 6번 조각을 바꿔 기록한다.

윗 면

2	2	2
1	1	7
1	4	4

4+7+13 = 24

중 앙

2	6	6
5	7	7
4	4	7

11+17+20 = 48

바 닥

5	5	6
5	3	6
3	3	3

13+11+15 = 39

① 윗면 + 중앙 + 바닥 = (24) + (48) + (39) = (111)
② 윗면 + 중앙 + 바닥 = (33) + (42) + (36) = (111)
③ 윗면 + 중앙 + 바닥 = (48) + (35) + (28) = (111)

※ 위의 활동에서 알 수 있듯이 정육면체를 거울에 반사시킬 때마다 5번과 6번조각을 바꾼다면 최초의 정육면체와 반사된 정육면체는 서로 다른 소마큐브의 해가 되며, 이를 한번 더 반사시킨다면 최초의 정육면체와 같아짐을 확인할 수 있다.

<활동1> 하나의 3×3×3 정육면체를 만들고 이를 활동지[별첨2]의 첫 번째 그림에 기록하여 보고, 이 정육면체가 거울에 반사된 이미지를 활동지[별첨2]의 두 번째 그림에 기록하여 보자. 그리고, 수정된 정육면체를 활동지[별첨2]의 세 번째 그림에 기록하도록 지도한다.

윗면			중앙			바닥		
2	2	2	5	5	2	5	6	6
7	1	1	7	7	6	5	3	6
4	4	1	7	4	4	3	3	3

최초의 정육면체

13+7+4 = 24　19+16+12 = 47　13+12+15 = 40

① 윗면 + 중앙 + 바닥 = (24) + (47) + (40) = (111)
② 윗면 + 중앙 + 바닥 = (33) + (43) + (35) = (111)
③ 윗면 + 중앙 + 바닥 = (31) + (35) + (45) = (111)

윗면			중앙			바닥		
2	2	2	2	5	5	6	6	5
1	1	7	6	7	7	6	3	5
1	4	4	4	4	7	3	3	3

반사된 정육면체

4+7+13 = 24　12+16+19 = 47　15+12+13 = 40

윗면			중앙			바닥		
2	2	2	2	6	6	5	5	6
1	1	7	5	7	7	5	3	6
1	4	4	4	4	7	3	3	3

수정된 정육면체

4+7+13 = 24　11+17+20 = 48　13+11+15 = 39

① 윗면 + 중앙 + 바닥 = (24) + (48) + (39) = (111)
② 윗면 + 중앙 + 바닥 = (33) + (42) + (36) = (111)
③ 윗면 + 중앙 + 바닥 = (48) + (35) + (28) = (111)

▷**질문1.** 정육면체를 거울에 반사시켜 기록한 이미지를 소마큐브 7조각으로 맞추는 것이 가능한가? 아니면 불가능한가? 불가능하다면 그 이유는 무엇인가?

▷**질문2.** 질문1에서 정육면체를 거울에 반사시킨 이미지를 소마큐브 7조각으로 맞추는 것이 불가능하다면 가능하도록 하려면 어떻게 해야 하는가?

▷**질문3.** 소마큐브 각 7조각을 거울에 반사시킨 이미지가 원래의 이미지와 일치하는가?

▷**질문4.** 거울에 의해 반사된 정육면체를 다시 거울에 반사시킨 이미지는 원래 최초의 정육면체와 일치하는가?

▷**질문5.** 위의 활동에서 반사된 정육면체는 최초의 정육면체와 본질적으로 같은 것인가? (즉, 최초의 정육면체를 회전시켜 보았을때 반사된 정육면체와 같아지는가?)

▷**질문6.** 하나의 정육면체와 이를 반사시킨 정육면체는 항상 최소합이 같은가?

▷**질문7.** 하나의 정육면체를 만들었을 때 6면 중 합이 가장 작은 수는 얼마일까?

▷**질문8.** 하나의 정육면체를 만들었을 때 6면 중 합이 가장 큰 수는 얼마일까?

▷**질문9.** 정육면체를 만들 때 최소합으로 가능한 수의 범위는 얼마인가?

▷**질문10.** 아래의 소마큐브의 한 해에서 ①, ②, ③의 합은 같으면서 아래 왼쪽의 해와 다른 소마큐브의 해를 오른쪽 빈란에 채워 찾아보아라.

윗면			중앙			바닥면		
2	4	3	6	4	4	6	6	4
2	3	3	6	7	7	5	5	7
2	2	3	5	1	7	5	1	1

① 24 + 47 + 40 = 111
② 27 + 45 + 39 = 111
③ 39 + 33 + 39 = 111

윗면			중앙			바닥면		

① 24 + 47 + 40 = 111
② 27 + 45 + 39 = 111
③ 39 + 33 + 39 = 111

윗면			중앙			바닥면		
3	5	1	7	5	5	7	7	6
3	1	1	3	6	5	7	6	6
3	4	4	4	4	2	2	2	2

① 25 + 41 + 45 = 111
② 27 + 38 + 46 = 111
③ 32 + 40 + 39 = 111

윗면			중앙			바닥면		

① 25 + 41 + 45 = 111
② 27 + 38 + 46 = 111
③ 32 + 40 + 39 = 111

▷**질문11.** 소마큐브의 해에서 고정수가 될 수 없는 큐브의 조각은 어느 것인가? 그리고 그 이유는 무엇인가?

5. 해를 찾기 위한 엑셀 사용법

윗 면		
상1	상2	상3
상4	상5	상6
상7	상8	상9

중 앙		
중1	중2	중3
중4	중5	중6
중7	중8	중9

바 닥		
하1	하2	하3
하4	하5	하6
하7	하8	하9

정육면체를 위와 같이 기록한다고 할 때, 기록하는 방법은 24가지이므로 이를 모두 순서대로 적어보면 아래 표와 같이 24가지가 된다. 이를 토대로 엑셀에 수식을 이용하여 서로 연결시켰다. 즉 A1만 입력하면 나머지 23가지는 아래 표에 의해 자동으로 입력되도록 만든 것이다.

	상1	상2	상3	상4	상5	상6	상7	상8	상9	중1	중2	중3	중4	중5	중6	중7	중8	중9	하1	하2	하3	하4	하5	하6	하7	하8	하9
A1	상1	상2	상3	상4	상5	상6	상7	상8	상9	중1	중2	중3	중4	중5	중6	중7	중8	중9	하1	하2	하3	하4	하5	하6	하7	하8	하9
A2	상7	상4	상1	상8	상5	상2	상9	상6	상3	중7	중4	중1	중8	중5	중2	중9	중6	중3	하7	하4	하1	하8	하5	하2	하9	하6	하3
A3	상9	상8	상7	상6	상5	상4	상3	상2	상1	중9	중8	중7	중6	중5	중4	중3	중2	중1	하9	하8	하7	하6	하5	하4	하3	하2	하1
A4	상3	상6	상9	상2	상5	상8	상1	상4	상7	중3	중6	중9	중2	중5	중8	중1	중4	중7	하3	하6	하9	하2	하5	하8	하1	하4	하7
B1	상7	상8	상9	중7	중8	중9	하7	하8	하9	상4	상5	상6	중4	중5	중6	하4	하5	하6	상1	상2	상3	중1	중2	중3	하1	하2	하3
B2	하7	중7	상7	하8	중8	상8	하9	중9	상9	하4	중4	상4	하5	중5	상5	하6	중6	상6	하1	중1	상1	하2	중2	상2	하3	중3	상3
B3	하9	하8	하7	중9	중8	중7	상9	상8	상7	하6	하5	하4	중6	중5	중4	상6	상5	상4	하3	하2	하1	중3	중2	중1	상3	상2	상1
B4	상9	중9	하9	상8	중8	하8	상7	중7	하7	상6	중6	하6	상5	중5	하5	상4	중4	하4	상3	중3	하3	상2	중2	하2	상1	중1	하1
C1	하7	하8	하9	하4	하5	하6	하1	하2	하3	중7	중8	중9	중4	중5	중6	중1	중2	중3	상7	상8	상9	상4	상5	상6	상1	상2	상3
C2	하1	하4	하7	하2	하5	하8	하3	하6	하9	중1	중4	중7	중2	중5	중8	중3	중6	중9	상1	상4	상7	상2	상5	상8	상3	상6	상9
C3	하3	하2	하1	하6	하5	하4	하9	하8	하7	중3	중2	중1	중6	중5	중4	중9	중8	중7	상3	상2	상1	상6	상5	상4	상9	상8	상7
C4	하9	하6	하3	하8	하5	하2	하7	하4	하1	중9	중6	중3	중8	중5	중2	중7	중4	중1	상9	상6	상3	상8	상5	상2	상7	상4	상1
D1	하1	하2	하3	중1	중2	중3	상1	상2	상3	하4	하5	하6	중4	중5	중6	상4	상5	상6	하7	하8	하9	중7	중8	중9	상7	상8	상9
D2	상1	중1	하1	상2	중2	하2	상3	중3	하3	상4	중4	하4	상5	중5	하5	상6	중6	하6	상7	중7	하7	상8	중8	하8	상9	중9	하9
D3	상3	상2	상1	중3	중2	중1	하3	하2	하1	상6	상5	상4	중6	중5	중4	하6	하5	하4	상9	상8	상7	중9	중8	중7	하9	하8	하7
D4	하3	중3	상3	하2	중2	상2	하1	중1	상1	하6	중6	상6	하5	중5	상5	하4	중4	상4	하9	중9	상9	하8	중8	상8	하7	중7	상7
E1	상3	중3	하3	상6	중6	하6	상9	중9	하9	상2	중2	하2	상5	중5	하5	상8	중8	하8	상1	중1	하1	상4	중4	하4	상7	중7	하7
E2	상9	상6	상3	중9	중6	중3	하9	하6	하3	상8	상5	상2	중8	중5	중2	하8	하5	하2	상7	상4	상1	중7	중4	중1	하7	하4	하1
E3	하9	중9	상9	하6	중6	상6	하3	중3	상3	하8	중8	상8	하5	중5	상5	하2	중2	상2	하7	중7	상7	하4	중4	상4	하1	중1	상1
E4	하3	하6	하9	중3	중6	중9	상3	상6	상9	하2	하5	하8	중2	중5	중8	상2	상5	상8	하1	하4	하7	중1	중4	중7	상1	상4	상7
F1	하1	중1	상1	하4	중4	상4	하7	중7	상7	하2	중2	상2	하5	중5	상5	하8	중8	상8	하3	중3	상3	하6	중6	상6	하9	중9	상9
F2	하7	하4	하1	중7	중4	중1	상7	상4	상1	하8	하5	하2	중8	중5	중2	상8	상5	상2	하9	하6	하3	중9	중6	중3	상9	상6	상3
F3	상7	중7	하7	상4	중4	하4	상1	중1	하1	상8	중8	하8	상5	중5	하5	상2	중2	하2	상9	중9	하9	상6	중6	하6	상3	중3	하3
F4	상1	상4	상7	중1	중4	중7	하1	하4	하7	상2	상5	상8	중2	중5	중8	하2	하5	하8	상3	상6	상9	중3	중6	중9	하3	하6	하9

위 24가지 중에서 우리의 다음과 같은 기준에 맞는 한 가지를 선택해야 하는 것이다.

정육면체를 기록할때의 기준

기준 1 : 6면중 최소합이 위로 오도록 놓는다. 최소합이 2개가 나온다면 중앙의 합이 작은 최소합을 위로 둔다.

기준 2 : ①, ②, ③에서 윗면의 합은 항상 바닥면의 합보다 작거나 같아야 한다.

기준 3 : 기준1과 기준2가 동일하다면 ①, ②, ③의 윗면 크기 순서대로 나열한다.

하나의 예를 들어 보자. 임의의 3×3×3 정육면체를 하나 맞춘 다음 아래와 같이 기록한다.

윗 면

6	6	3
6	4	2
2	2	2

중 앙

5	3	3
6	4	4
7	1	1

바 닥

5	5	3
7	5	4
7	7	1

그리고 이 값을 엑셀파일에 입력하게 되면 엑셀파일의 '연구'탭에 24가지의 기록방법을 모두 찾아준다. 이때 위의 기준에 맞는 것 E4를 찾을 수 있다.

종류	상1	상2	상3	상4	상5	상6	상7	상8	상9	중1	중2	중3	중4	중5	중6	중7	중8	중9	하1	하2	하3	하4	하5	하6	하7	하8	하9	윗면1	중앙1	바닥1	윗면2	중앙2	바닥2	윗면3	중앙3	바닥3
A1	6	6	3	6	4	2	2	2	2	5	3	3	6	4	4	7	1	1	5	5	3	7	5	4	7	7	1	33	34	44	30	42	39	23	37	51
A2	2	6	6	2	4	6	2	2	3	7	6	5	1	4	3	1	4	3	7	7	5	7	5	5	1	4	3	33	34	44	23	37	51	39	42	30
A3	2	2	2	2	4	6	3	6	6	1	1	7	4	4	6	3	3	5	1	7	7	4	5	7	3	5	5	33	34	44	39	42	30	51	37	23
A4	3	2	2	6	4	2	6	6	2	3	4	1	3	4	1	5	6	7	3	4	1	5	5	7	5	7	7	33	34	44	51	37	23	30	42	39
B1	2	2	2	7	1	1	7	7	1	6	4	2	6	4	4	7	5	4	6	6	3	5	3	3	5	5	3	30	42	39	44	34	33	23	37	51
B2	7	7	2	7	1	2	1	1	2	7	6	6	5	4	4	4	4	2	5	5	6	5	3	6	3	3	3	30	42	39	23	37	51	33	34	44
B3	1	7	7	1	1	7	2	2	2	4	5	7	4	4	6	2	4	6	3	5	5	3	3	5	3	6	6	30	42	39	33	34	44	51	37	23
B4	2	1	1	2	1	7	2	7	7	2	4	4	4	4	5	6	6	7	3	3	3	6	3	5	6	5	5	30	42	39	51	37	23	44	34	33
C1	7	7	1	7	5	4	5	5	3	7	1	1	6	4	4	5	3	3	2	2	2	6	4	2	6	6	3	44	34	33	39	42	30	23	37	51
C2	5	7	7	5	5	7	3	4	1	5	6	7	3	4	1	3	4	1	6	6	2	6	4	2	3	2	2	44	34	33	23	37	51	30	42	39
C3	3	5	5	4	5	7	1	7	7	3	3	5	4	4	6	1	1	7	3	6	6	2	4	6	2	2	2	44	34	33	30	42	39	51	37	23
C4	1	4	3	7	5	5	7	7	5	1	4	3	1	4	3	7	6	5	2	2	3	2	4	6	2	6	6	44	34	33	51	37	23	39	42	30
D1	5	5	3	5	3	3	6	6	3	7	5	4	6	4	4	6	4	2	7	7	1	7	1	1	2	2	2	39	42	30	33	34	44	23	37	51
D2	6	5	5	6	3	5	3	3	3	6	6	7	4	4	5	2	4	4	2	7	7	2	1	7	2	1	1	39	42	30	23	37	51	44	34	33
D3	3	6	6	3	3	5	3	5	5	2	4	6	4	4	6	4	5	7	2	2	2	1	1	7	1	7	7	39	42	30	44	34	33	51	37	23
D4	3	3	3	5	3	6	5	5	6	4	4	2	5	4	4	7	6	6	1	1	2	7	1	2	7	7	2	39	42	30	51	37	23	33	34	44
E1	3	3	3	2	4	4	2	1	1	6	3	5	4	4	5	2	1	7	6	5	5	6	6	7	2	7	7	23	37	51	30	42	39	44	34	33
E2	2	2	3	1	4	3	1	4	3	2	4	6	1	4	3	7	5	5	2	6	6	7	6	5	7	7	5	23	37	51	44	34	33	39	42	30
E3	1	1	2	4	4	2	3	3	3	7	1	2	5	4	4	5	3	6	7	7	2	7	6	6	5	5	6	23	37	51	39	42	30	33	34	44
E4	3	4	1	3	4	1	3	2	2	5	5	7	3	4	1	6	4	2	5	7	7	5	6	7	6	6	2	23	37	51	33	34	44	30	42	39
F1	5	5	6	7	6	6	7	7	2	5	3	6	5	4	4	7	1	2	3	3	3	4	4	2	1	1	2	51	37	23	30	42	39	33	34	44
F2	7	7	5	7	6	5	2	6	6	7	5	5	1	4	3	2	4	6	1	4	3	1	4	3	2	2	3	51	37	23	33	34	44	39	42	30
F3	2	7	7	6	6	7	6	5	5	2	1	7	4	4	5	6	3	5	2	1	1	2	4	4	3	3	3	51	37	23	39	42	30	44	34	33
F4	6	6	2	5	6	7	5	7	7	6	4	2	3	4	1	5	5	7	3	2	2	3	4	1	3	4	1	51	37	23	44	34	33	30	42	39

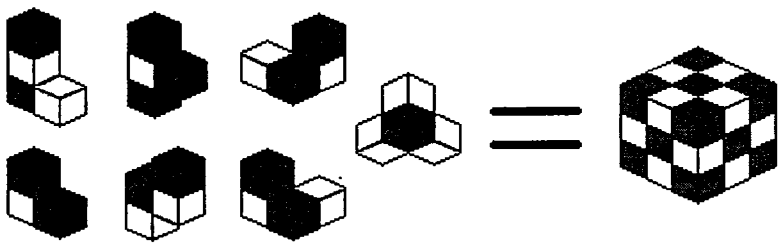
< "소마큐브 해탐구" 파일의 "연구"탭 >

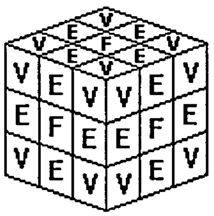
그러면 보다 쉽게 해를 찾아갈 수 있다. 이렇게 해서 480가지의 모든 해를 엑셀로 정리하여 갔다. 이때 또 하나의 장점을 지금까지 찾았던 해를 가려내기가 쉬워진다. 엑셀에서 필터기능과 정렬기능을 이용하여 중복된 해가 있는지를 검증하면서 해를 찾을 수 있었던 것이다.

6. 외국의 소마큐브 해 연구사례

http://www.fam-bundgaard.dk/SOMA/SOMA.HTM

위 사이트 News Letter 중에서 1999. 02. 01 Winning Way's about the SOMA cube solutions 을 보면 1961년에 J. H. Conway and Mike Guy 에 의해 각 큐브의 7조각에 서로 다른 7가지의 색을 칠함으로써 소마큐브의 서로 다른 해가 240가지임을 수작업으로 완벽한 목록을 작성하였다고 소개하고 있다. 아마도 체크무늬 소마큐브는 단순히 이 자체로 생겨난 것이 아니라 소마큐브의 해를 해결하는 과정에서 J. H. Conway and Mike Guy 가 하나의 방법차원에서 시작한 것으로 볼 수 있을 것이다.





윗 면

V	E	V
E	F	E
V	E	V

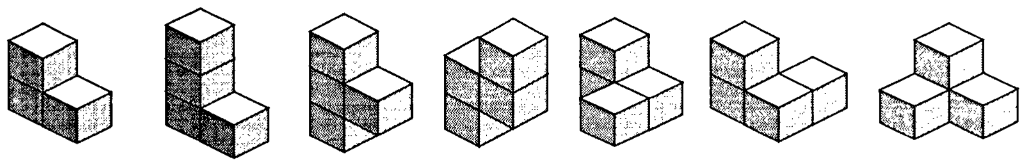
중 앙

E	F	E
F	C	F
E	F	E

바 닥

V	E	V
E	F	E
V	E	V

위와 같이 V와 F는 서로 이웃할 수 없고, E와 C도 이웃할 수 없다. 따라서, 각 소마조각이 어떻게 놓이든 관계없이 V는 반드시 8개, F는 6개, E는 12개, C는 1개를 만족해야 하며, 따라서, 모든 소마큐브의 해는 14FV-13EC의 관계를 만족해야 함을 의미한다.



	W	Y	G	O	L	R	B	계
V의 최대개수	1	2	2	1	1	1	1	9

	W(1번)	Y(2번)	G(3번)	O(4번)	L(5번)	R(6번)	B(7번)	합계
FV	2	2	3	2	2	2	1	14
EC	1	2	1	2	2	2	3	13

▷**질문1.** 위에서 보듯이, 모든 정육면체(즉, 소마큐브의 해)는 반드시 vertex cells 8개, edge cells 12개, face cells 6개, central cell 1개로 이루어져 있다. vertex cells에서는

W	Y	G	O	L	R	B
1	2	2	1	1	1	1

와 같이 놓여야 한다고 되어 있다. 이유는 무엇일까?

▷**질문2.** The Green piece(3번큐브)는 정육면체의 가장자리에만 위치해야 한다. 그 이유는 무엇일까?

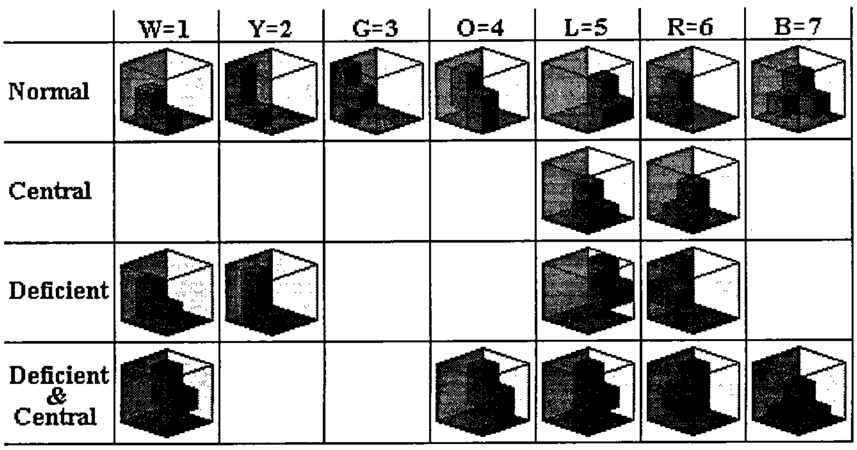
▷**질문3.** 하나의 소마큐브 해를 살펴보면 다음과 같이 구성되어 있다. 그런데, 이것은 모든 해에서도 아래와 같은 관계를 만족해야 한다. 그 이유는 무엇인가?

W	Y	G	O	L	R	B		
2 +	2 +	3 +	2 +	2 +	2 +	1	= 14	F,V cells,
1 +	2 +	1 +	2 +	2 +	2 +	3	= 13	E,C cells.

▷**질문4.** The White piece(1번큐브)는 The White piece occupies 2 FV cells, 1 EC cell. 을 만족해야 한다. 그 이유는 무엇인가?

▷**질문5.** The Black piece(7번큐브)는 The Black piece occupies 1 FV cell and 3 EC ones. 을 만족해야 한다. 그 이유는 무엇인가?

▷**질문6.** 소마큐브의 7조각은 아래의 그림과 같은 위치만 가능하다고 한다. 그 이유는 무엇인가?



▷**질문7.** 위의 질문1에서 질문6까지를 모두 만족하는 소마큐브의 해는 240가지라고 Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy 는 설명하고 있다. 모순은 없는가?

▷**질문8.** William Kustes의 "The SOMAP"을 이해하여 보자.

▷**질문9.** Edwin B. Hathaway가 소마큐브의 서로 다른 해가 240가지가 아니라 480가지라고 말하는 근거는 무엇인가?

※ http://mathworld.wolfram.com/SomaCube.html 에 보면 다음과 같은 내용이 있다.

A solid dissection puzzle invented by Piet Hein during a lecture on Quantum Mechanics by Werner Heisenberg. There are seven soma pieces composed of all the irregular face-joined cubes (polycubes) with ≤ 4 cubes. The object is to assemble the pieces into a cube. There are 240 essentially distinct ways of doing so (Beeler 1972, Berlekamp et al. 1982), as first enumerated one rainy afternoon in 1961 by J. H. Conway and Mike Guy.

A commercial version of the cube colors the pieces black, green, orange, white, red, and blue. When the 48 symmetries of the cube, three ways of assembling the black piece, and 2^5 ways of assembling the green, orange, white, red, and blue pieces are counted, the total number of solutions rises to 1,105,920.

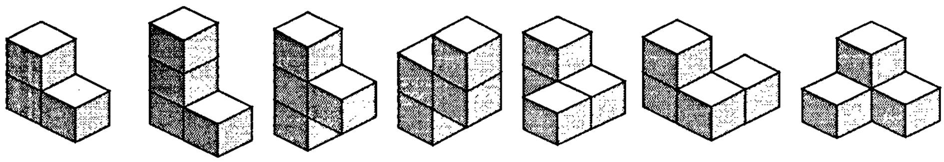
위의 내용에 대해 같이 토론해 보자. 즉, 소마큐브의 서로 다른 해는 지금까지 살펴보았듯이 480가지이다. 그러나 위의 내용에서는 거울반사를 제외한 240가지라 설명한다.

▷**질문10.** 소마큐브의 서로 다른 해를 위의 설명처럼 240가지라고 보고 위에서 설명한 **회전과 반사하는 방법까지 고려해 보면 3×3×3 정육면체를 만드는 방법이 무려 1,105,920가지**나 된다는 것이다. 과연, 어떻게 해서 그런 결과가 나왔을까? 그 이유를 설명하여 보자. **(힌트 : 소마큐브 7개의 각 조각에 색칠하는 것과 관련이 있다.)**

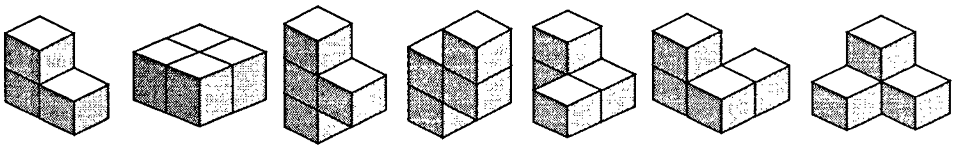
7. 소마큐브 해에 대한 심화연구

피에트 하인은 3개의 조각으로 이루어진 2개와 4개의 조각으로 이루어진 7개중 총 9개의 소마조각으로 정육면체를 만들기 위해서는 아래와 같은 14가지의 선택이 가능한데 이중 ①번을 선택하였고, ①번은 정육면체를 만드는 것이 가능하다는 것을 살펴보았다. 그러면, 나머지 13가지 경우에 대하여 성립하는지도 알아보자.

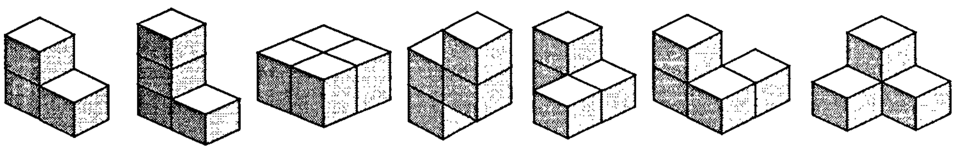
①



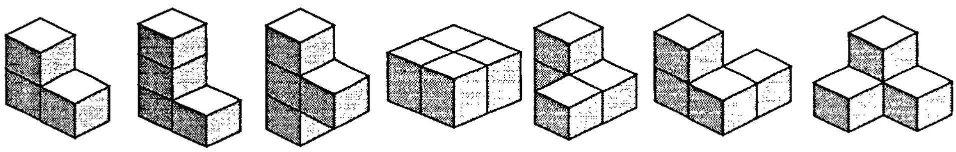
②



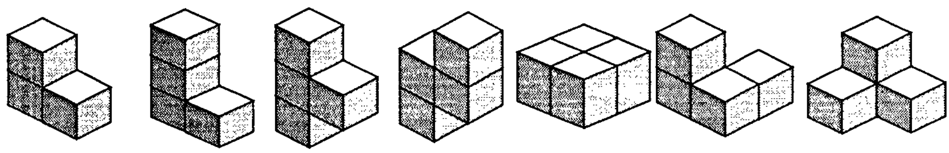
③

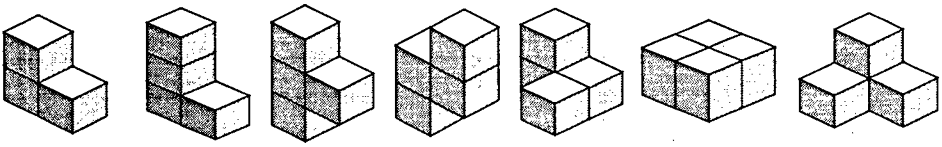


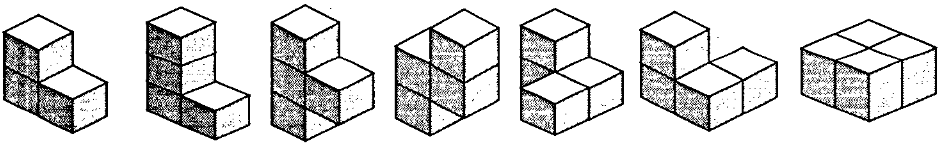
④

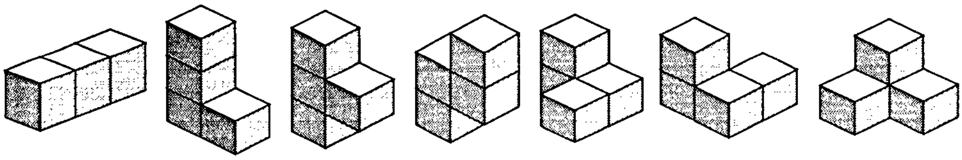


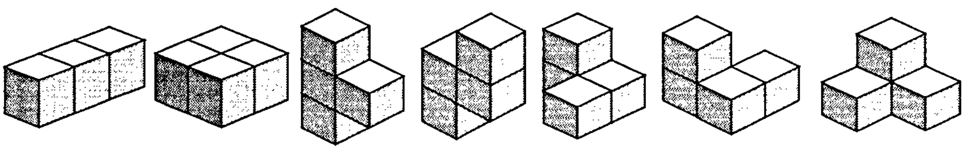
⑤

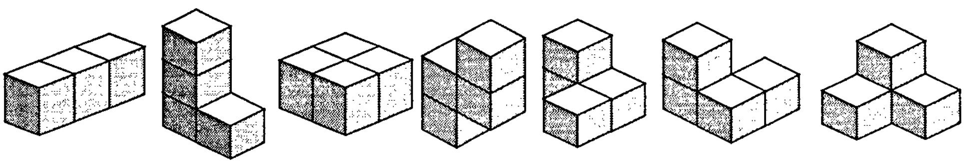


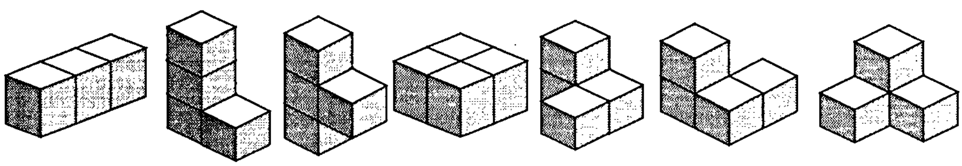
⑥ 

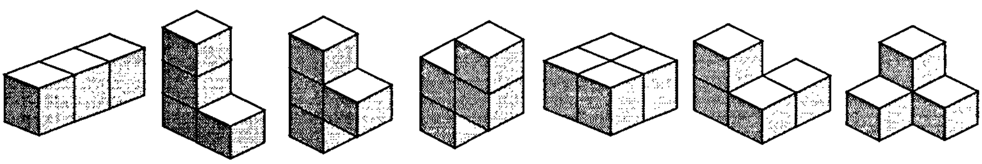
⑦ 

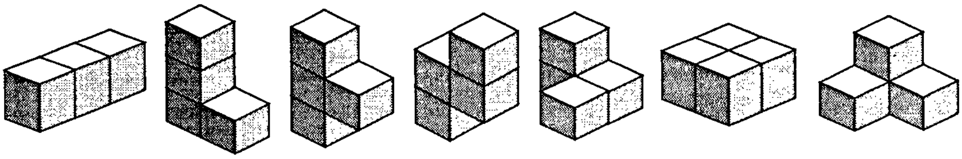
⑧ 

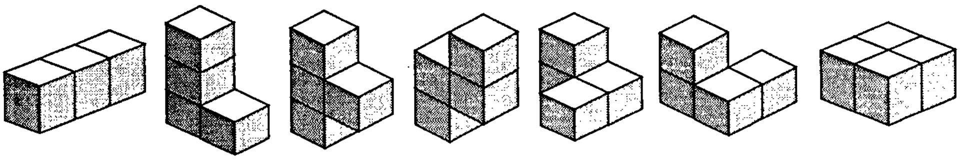
⑨ 

⑩ 

⑪ 

⑫ 

⑬ 

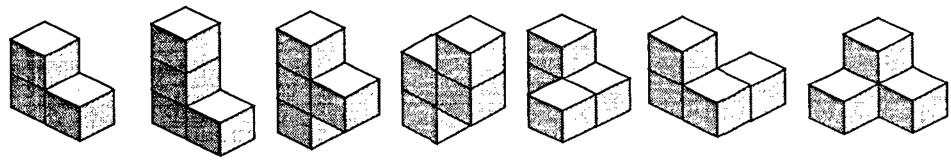
⑭ 

[별첨] 활동지

소마큐브의 해

( ) 중학교 제 ( )학년 ( )반 ( )번 이름 : ( )

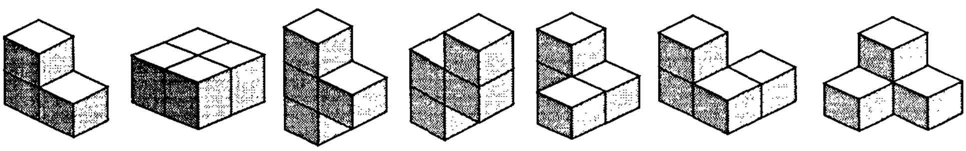
※ 피에트 하인은 3개의 조각으로 이루어진 2개와 4개의 조각으로 이루어진 7개중 총 9개의 소마조각으로 정육면체를 만들기 위해서는 아래와 같은 14가지의 선택이 가능한데 이중 ①번을 선택하였다. 그러면, 나머지 13가지 경우에 대하여도 정육면체를 만들 수 있는지 직접 맞추어 번호로 기록하여 보자. 물론 여러 가지 맞추는 방법과 기록하는 방법이 있겠지만 그중 하나만 찾아보도록 하자.

①

1 2 3 4 5 6 7

윗 면

중 앙

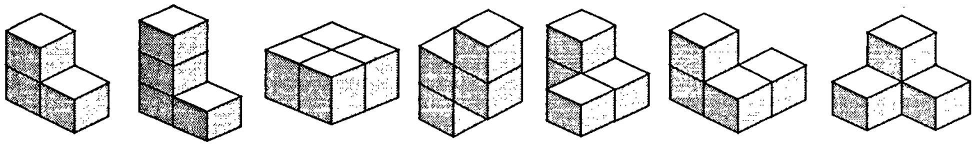
바 닥

②

1 2 3 4 5 6 7

윗 면

중 앙

바 닥

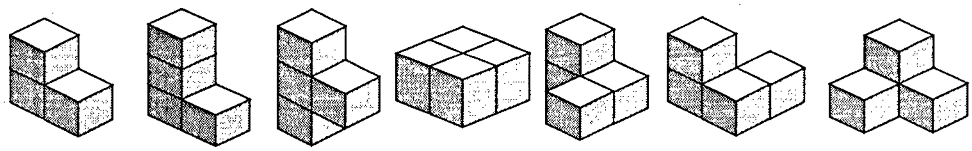
③


1 2 3 4 5 6 7

윗면

중앙

바닥

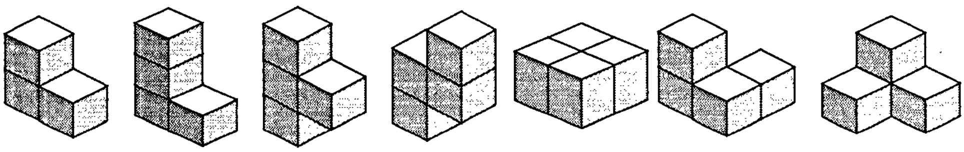
④


1 2 3 4 5 6 7

윗면

중앙

바닥

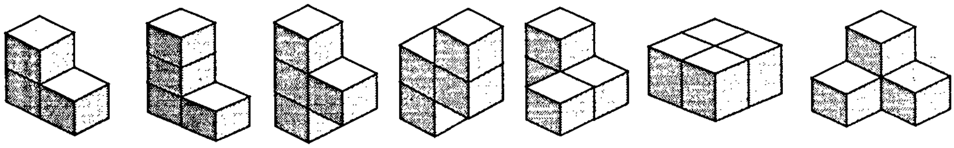
⑤


1 2 3 4 5 6 7

윗면

중앙

바닥

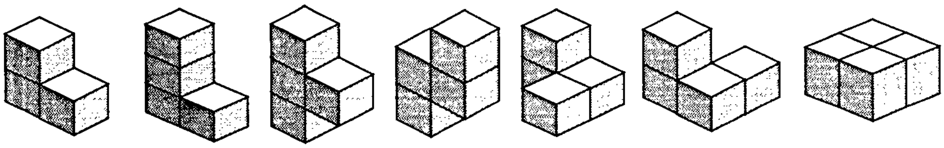
⑥ 

1 2 3 4 5 6 7

윗 면

중 앙

바 닥

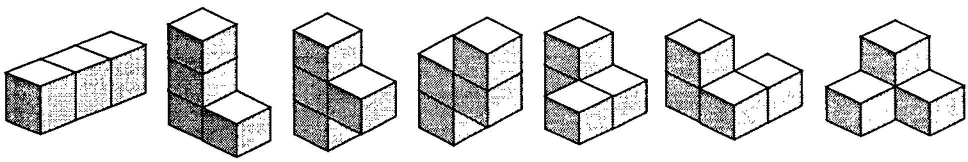
⑦ 

1 2 3 4 5 6 7

윗 면

중 앙

바 닥

⑧ 

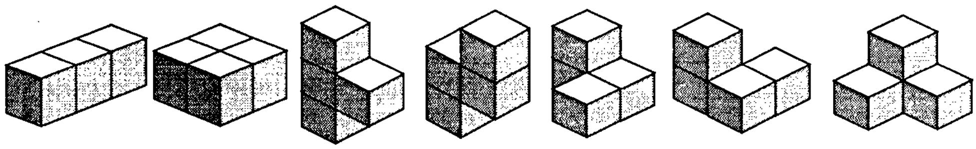
1 2 3 4 5 6 7

윗 면

중 앙

바 닥

⑨



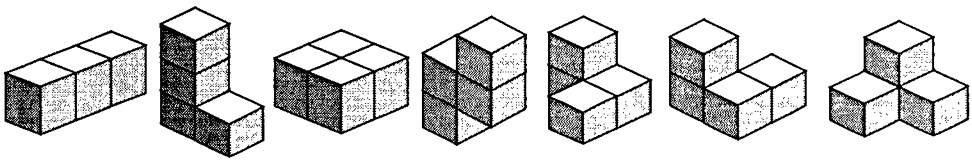
1 2 3 4 5 6 7

윗 면

중 앙

바 닥

⑩



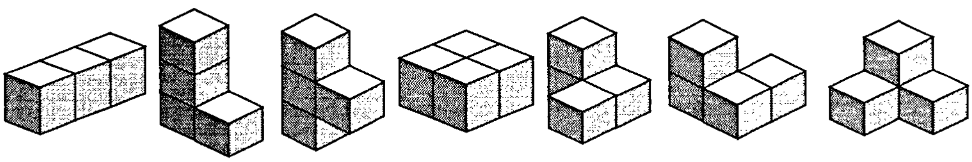
1 2 3 4 5 6 7

윗 면

중 앙

바 닥

⑪

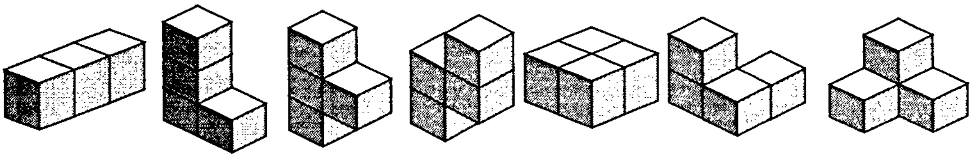


1 2 3 4 5 6 7

윗 면

중 앙

바 닥

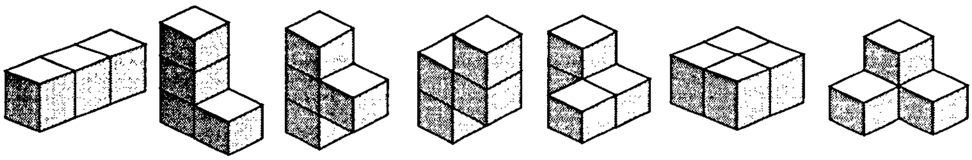
⑫ 

1 2 3 4 5 6 7

윗 면

중 앙

바 닥

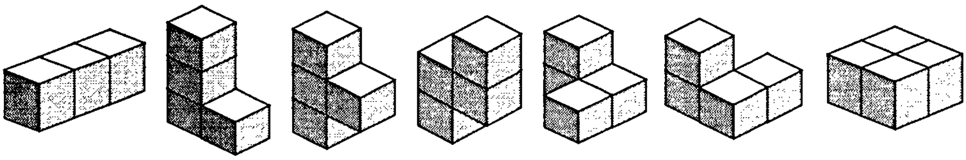
⑬ 

1 2 3 4 5 6 7

윗 면

중 앙

바 닥

⑭ 

1 2 3 4 5 6 7

윗 면

중 앙

바 닥

이 14가지 모두 3×3×3모양의 정육면체를 맞추는 것이 가능할까?

<질문> 위의 14가지 경우에 대하여 3×3×3모양의 정육면체를 맞추는 것이 가능한가? 아니면 이중 불가능한 것이 있다면 몇 번이며, 불가능하다는 것을 증명할 수 있겠는가?