韓國數學教育學會
<全國數學教育硏究大會 프로시딩>
제 38회. 2007. 6. 37-50

Korea Soc. Math. Ed.
Proceedings of National Meeting of Math. Ed.
The 38th. Jun. 2007. 37-50

평면도형 탐구의 기본 요소로서 삼각형 다시 보기

도 종 훈 (한국교육과정평가원)

평면도형의 탐구에서 기본이 되는 것은 무엇이며, 그것으로부터 평면도형의 내용들을 일관성 있게 구성할 수는 없는가? 이 글에서는 평면도형 탐구의 기본 요소가 삼각형이라는 관점을 제시하고, 삼각형을 중심으로 한 평면도형 탐구 활동 설계 및 교과서 내용 재구성의 몇 가지 예를 제시한다. 그리고 이러한 관점 및 설계가 지니는 수학교육적 의의에 대하여 논의한다.

I. 서 론

수학적 사고능력의 함양은 수학교육의 중요한 목적 중 하나로서 세상을 수학의 관점에서 바라보고 해석하며 수학의 관점에서 수학적인 방법을 통하여 수학 내·외적인 문제를 해결할 수 있는 능력과 소양을 기르고자 함을 의미한다. 이처럼 어떤 하나의 관점이나 대상을 통해 보다 넓은 범위의 일반적인 대상들을 다루고 설명하고자 하는 노력은 학문으로서의 수학이나 수학을 가르치고 배우는 수학교육에서도 중요한 역할을 한다.

기원전 약 5세기경 피타고라스학파는 세상의 만물과 현상을 자연수의 관점에서 자연수를 이용하여 해석하고 설명하고자 하였다. 잘 알려진 바와 같이 클라인은 기하학을 변환군의 관점에서 정의하였는데, 이에 따르면 유클리드 기하는 유클리드 변환군 아래에서 불변인 성질을 연구하는 학문이고 사영 기하는 사영 변환군 아래에서 불변인 성질을 연구하는 학문으로 정의된다. 위상수학의 기본 구성단위는 열린집합이고 실해석학은 실수를 기반으로 하여 내용이 전개되므로 열린 집합과 실수의 개념은 각각 위상수학과 실해석학 탐구의 기본 요소들 중 하나라고 할 수 있다.

수학의 교수-학습에서 무엇보다 중요한 점은 해당 내용의 탐구에 필요한 기본 요소가 어떤 것이고, 그 속에 내재된 수학적 아이디어는 무엇이며, 가르치고 배우고자 하는 내용들이 이러한 기본 요소의 관점에서 볼 때 어떻게 구성되고 조직화되어 있는지를 명료하게 파악하는 것이다. 우리나라 중학교 수학 교육과정의 도형 영역은 주로 삼각형을 포함한 다각형과 원 등의 평면도형과 몇 가지 입체도형의 개념이나 성질을 탐구하는 내용들로 구성되어 있다. 그러나 이들 내용의 기본 요소가 무엇이고, 그러한 기본 요소를 중심으로 내용이 어떻게 구조화되어 있는지는 잘 드러나 있지 않다. 이러한 관점에서 우리는 다음과 같은 질문을 던질 수 있다.

도형의 탐구에서 기본이 되는 요소는 무엇이며, 그것으로부터 도형 영역의 내용들을 일관성 있게 구성할 수는 없는가?

이 글에서는 특히 중학교 도형 영역 중 평면도형에 관한 내용에 초점을 맞추어 평면도형 탐구의

기본 요소가 삼각형이라는 관점을 수학적인 측면과 교육과정에 제시된 내용 구성 및 평면도형 관련 문제해결의 측면 등에서 제시하고, 삼각형을 중심으로 한 평면도형 탐구 활동 설계 및 교과서 내용 재구성 아이디어의 몇 가지 예를 제시하고자 한다. 그리고 이러한 관점 및 설계가 지니는 수학교육적 의의에 대하여 논의하고자 한다.

Ⅱ. 평면도형 탐구의 기본 요소로서 삼각형

유클리드 원론 1권의 첫 번째 명제는 정삼각형의 작도에 관한 것이고, 1권의 48개 명제들 중에서 피타고라스 정리를 포함한 27개의 명제들이 모두 삼각형에 관한 명제들이며, 명제에서 직접적으로 삼각형을 언급하지 않는 그 밖의 다른 명제들 대부분은 증명 과정에서 삼각형을 언급하고 있다 (Heath, 1956). 예를 들어 유클리드 원론에서 평행사변형의 대변의 길이와 대각의 크기가 서로 같음(명제34)을 증명하거나, 밑변의 길이가 같고 밑변과 평행한 직선 위에 윗변이 놓인 임의의 두 평행사변형의 넓이가 서로 같음(명제35)을 증명하려면 삼각형의 합동과 넓이 개념이 반드시 필요하다. 유클리드가 그의 첫 번째 명제를 정삼각형에 관한 명제로 시작하고 1권의 대부분을 삼각형에 관한 명제로 구성한 것은 아마도 평면도형의 탐구에서 가장 기본이 되는 평면도형이 삼각형이기 때문임을 추측할 수 있다. 다른 예로 계산기하학(Computational Geometry)에서 분할(decomposition)은 복잡한 모양의 물체를 단순한 것의 모임으로 간주하고 문제를 풀거나 나누어진 영역에 따라 단계적으로 문제를 해결하는데 이용되는데, 여러 가지 분할 중 삼각분할(triangulation)은 다각형(다면체) 등의 대상을 분할 후의 인접 영역이 점이나 원래 대상보다 저차원의 선(선 혹은 면)만을 공유하도록 삼각형(사면체)으로 분할하는 것으로 그 기하학적 특성이 가장 많이 알려져 있고 구성원소를 세 점으로 표현할 수 있다는 점에서 저장 및 처리가 간단하여 계산기하학의 여러 문제들 뿐 아니라 수치해석, 컴퓨터 그래픽스, CAD/CAM, 패턴인식 등 여러 분야에 응용된다(신금림, 1993).[1]

이처럼 삼각형은 평면도형들 중에서 가장 간단한 형태의 기본적인 도형이지만 중요하고 유의미한 성질을 많이 지니고 있다. 이러한 성질들 중에는 삼각형에 고유한 것들도 있지만 공간과 도형을 보고 다루는 관점에 따라 보다 일반적인 도형의 성질로 일반화되는 것도 있다. Chern(1979)은 삼각형과 관련하여 다음과 같이 언급하고 있다.

> 삼각형이야 말로 아름다운 성질을 많이 가지고 있는 가장 간단한 도형들 중 하나이다. 예를 들어 모든 삼각형은 반드시 내접원과 외접원을 가지며 꼭 하나만을 갖는다. 구점원 정리는 20세기 초반 당시 양식 있는 수학자라면 모르는 사람이 거의 없을 정도로 유명한 정리였다. 특히 삼각형의 각(내각 혹은 외각)

---

1) 삼각분할과 관련하여 오일러는 1751년 골드바흐에게 "대각선을 그어서 n각형을 삼각형들로 분할하는 방법이 몇 가지인가?"라는 문제를 제기하였으며, 그 자신이 $E_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-10)}{(n-1)!}$가지 방법이 있음을 공식으로 제시하였다(Dörre, 1965, 21-27).

의 크기의 합에 관한 성질은 그 중에서도 가장 매혹적인 성질이다. 유클리드는 삼각형의 내각의 합이 180°임을 평행선 공준을 이용하여 증명하였는데, 평행선 공준을 피하기 위한 2000여 년간의 노력으로 비유클리드 기하학이 발견되었다. 비유클리드 기하학의 발견은 인류 지성사에서 가장 찬란한 장면들 중 하나이며, 비유클리드 기하학인 쌍곡기하나 타원기하에서 삼각형의 내각의 합은 각각 180°보다 작거나 크다.

실제로 삼각형의 내각의 크기의 합이 π이라는 사실은 유클리드 기하를 특징짓는 공리인 평행선 공준과 동치이며 유클리드 기하와 비유클리드 기하를 구별 짓는 중요한 성질로서, 다각형으로 일반화하면 n각형의 내각의 크기의 합은 $(n-2)\pi$이 된다. 그러나 이러한 형태의 일반화보다 더 놀랍고 중요한 사실은 삼각형의 "외각의 크기의 합"이 2π이고 "(꼭지점의 수)-(변의 수)+(면의 수)"의 값이 1이라는 성질인데, 변의 개수를 아무리 많이 늘리더라도 "임의의" 다각형의 "외각의 크기의 합"과 "(꼭지점의 수)-(변의 수)+(면의 수)"의 값은 삼각형에서와 마찬가지로 각각 2π와 1로서 불변이다. 더구나 이러한 성질은 곡선으로서의 다각형을 포함하는 보다 넓은 범위의 평면 곡선과 곡면으로서의 다각형을 포함하는 보다 넓은 범위의 3차원 공간에서의 유계 곡면으로 각각 일반화된다. 이를 간략하게 정리해 보면 다음과 같다(Chern, 1979).

평면 곡선의 관점에서 볼 때, 다각형은 일종의 조각적으로 매끄러운(sectionally smooth) 단순폐곡선(simple closed curve)이다. 평면상에서 매끄러운 단순폐곡선의 회전지표(rotation index)는 1(또는 -1)이며, 이는 조각적으로 매끄러운 단순폐곡선에서도 마찬가지이다.[2] 다각형은 조각적으로 매끄러운 단순폐곡선이므로, 조각적으로 매끄러운 단순폐곡선으로서 다각형의 회전지표가 1(또는 -1)이라는 사실은 "다각형의 외각의 크기의 합은 2π이다."와 같은 의미를 지닌다.

곡면의 관점에서 볼 때, 다각형은 경계가 조각적으로 매끄럽고 유계인 단순 연결 영역(bounded simply connected domain)의 일종이다. 다각형을 포함하는 임의의 유계인 단순 연결 영역의 오일러 표수 즉, "(꼭지점의 수)-(변의 수)+(면의 수)"의 값은 1이다. 그리고 가우스-보네 정리에 의하면 3차원 공간에서 매끄러운 유향 곡면 위에 경계(∂D)가 조각적으로 매끄러운 곡선들인 유계 영역 D에 대하여 다음이 성립한다(Carmo, 1976).

$$(\partial D\text{의 외각의 크기의 합}) + \int_{\partial D} \kappa_g + \iint_D K = 2\pi \times (D\text{의 오일러 표수})$$

삼각형을 포함한 임의의 다각형은 외각의 크기의 합이 2π이고, 측지 곡률(geodesic curvature) κ_g와 가우스 곡률(Gaussian curvature) K은 0이며, 오일러 표수 즉, "(꼭지점의 수)-(변의 수)+(면의

2) 평면에서 매끄러운 폐곡선(closed smooth curve) C와 고정된 한 점 O가 있다. C 위의 한 점 P가 곡선 C를 따라 움직여 원래 위치로 돌아오는 동안, 점 O를 지나면서 동점 P에서의 C의 접선과 평행인 직선들은 $2n\pi$만큼 즉, 점 O 주위를 n바퀴 회전한다. 이 때, 정수 n을 곡선 C의 회전지표(rotation index)라고 한다. 회전지표가 같은 두 개의 매끄러운 폐곡선은 서로 정칙 연속변형(regularly homotopic) 가능하며, Graustein-Whitney 정리에 의하면 서로 정칙 연속변형 가능한 폐곡선들의 회전지표는 같다. 즉, 회전지표는 정칙 연속변형의 불변량(invariant)이다(Chern, 1979).

수)"의 값은 1 이므로, 삼각형을 포함한 임의의 다각형의 외각의 합이 2π 이라는 사실은 가우스-보네 정리의 특수한 경우가 됨을 알 수 있다. 이처럼 삼각형은 학교수학에서 뿐만 아니라 미분기하학이나 위상수학 등 보다 높은 수준의 수학에서도 중요한 의미를 지니고 있음을 알 수 있다.

우리나라 중학교 수학 교육과정의 도형(측정) 영역 중 평면 도형에 관한 내용은 크게 다각형에 관한 내용과 원에 관한 내용으로 구분할 수 있다. 다각형에 관한 내용을 살펴보면 중학교 1학년 과정에서 점, 직선, 평행선의 정의와 성질의 학습 이후에 가장 먼저 등장하는 것이 각의 이등분선, 선분의 수직이등분선, 크기가 같은 각 등의 기본도형과 삼각형의 작도이며, 이들 작도의 정당성은 합동인 삼각형의 성질에 의해 뒷받침된다.[3] 그리고 일반적인 다각형의 성질 및 다각형의 내각과 외각의 크기의 측정 등을 다루는데, 이들 내용을 다루는데 있어 삼각형의 성질 및 삼각형의 내각과 외각의 크기 측정에 관한 내용은 필수적이다. 이는 변의 개수가 n 개인 다각형이 변의 개수가 3 개인 삼각형을 일반화한 것이라는 관점에서 볼 때 일면 당연한 것이라 볼 수 있다. 중학교 2학년 과정에서는 삼각형의 성질로부터 시작하여 사각형의 성질, 그리고 도형의 닮음 특히, 삼각형의 닮음의 순서로 내용이 전개된다. 중학교 3학년 과정은 피타고라스 정리와 삼각비에 관한 내용으로 구성되어 있는데, 이들 내용 역시 특별한 삼각형인 직각삼각형에 관한 내용임을 알 수 있다.

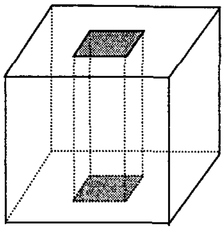
원에 관한 내용을 살펴보면 중학교 1학년에서 원과 부채꼴의 성질 및 부채꼴의 호의 길이와 넓이 측정을 다루고, 중학교 3학년에서 원과 직선 및 원주각에 관한 성질을 다룬다. 원이나 부채꼴의 개념을 삼각형으로부터 일반화하여 다루기는 어렵지만, 원과 부채꼴의 성질이나 측정, 원과 직선의 관계, 원주각에 관한 성질 등을 정당화하고 설명하는 과정에서 삼각형의 합동과 닮음의 성질이 사용된다. 예를 들어, 중심각의 크기가 같은 두 부채꼴의 현의 길이가 같음을 증명하는 과정에서 삼각형의 합동이 이용되고, 원의 넓이가 $\pi r^2 = \frac{1}{2}r(2\pi r)$ 임을 보이거나 부채꼴의 넓이가 $\frac{1}{2}rl$ 임을 설명하는 과정에서 이들 도형을 삼각형들로 세분한 후 이들 삼각형의 넓이의 합이 근사적으로 앞의 공식과 같게 됨을 이용할 수 있다. 또한 중학교 3학년에서 다루는 원에 관한 성질의 증명에서도 거의 대부분 삼각형의 합동과 닮음, 외각 정리, 피타고라스 정리 등 삼각형에 관한 성질이 이용된다.

한편, 평면도형 탐구에서 답을 찾는 문제나 증명하는 문제들의 상당부분은 궁극적으로 삼각형에 관한 문제나 증명으로 귀착되는 경우가 많으며, 그렇지 않을 경우 문제해결에 실패하는 경우 또한 존재한다. 예를 들어 평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이와 대각의 크기가 각각 같다거나 평행사변형

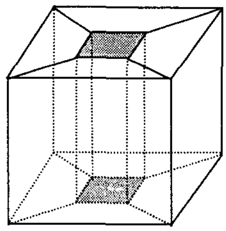
---

3) 이러한 관점에서 교과서 내용을 그 제시 순서가 "삼각형의 합동 -> 삼각형의 작도 -> 기본도형의 작도" 혹은 "삼각형의 합동 -> 기본도형의 작도 -> 삼각형의 작도"의 순서가 되도록 구성할 수도 있을 것이다. 이는 기본도형의 작도가 합동인 삼각형의 성질을 통해 정당화되기 때문만이 아니라 삼각형의 작도에서 삼각형을 꼭하나(유일하게) 결정한다(작도한다)는 것은 합동인 삼각형을 서로 구분하지 않는다는 의미에서 그러함을 의미하기 때문이기도 하다.

의 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다는 성질의 증명을 위해서는 두 개의 보조선(대각선)으로 분할되는 삼각형들의 합동을 이용해야 한다. 다른 예로 구멍이 뚫린 직육면체의 오일러 표수 ($v-e+f$)를 계산하기 위해서는 <그림 1>의 (b)처럼 직육면체에 구멍을 뚫은 후 구멍이 난 밑면과 윗면을 2개 이상의 사각형이나 삼각형으로 다시 분할한 후 꼭지점, 모서리, 면의 개수를 세어야 한다. 이는 면의 개수(f)를 센다는 것은 "삼각형(2-simplex)"의 개수를 세는 것을 의미하기 때문이며, 이러한 수학적 아이디어를 이해하지 못한 상태에서는 <그림 1>의 (a)처럼 구멍이 난 윗면과 밑면을 분할하지 않은 상태에서 오일러 표수를 계산하는 오류를 범하거나 분할한다고 하더라도 왜 분할해야 하는지 모른 채 기계적인 계산만을 수행하게 된다.



(a) $v-e+f=2$



(b) $v-e+f=0$

<그림 1> 구멍이 뚫린 직육면체의 오일러 표수

이상의 관점에서 볼 때 삼각형을 평면도형 탐구의 기본 요소라고 볼 수 있으며, 삼각형으로부터 시작하여 삼각형의 관점에서 삼각형을 중심으로 평면도형 탐구와 관련된 내용들을 전개해 나갈 수 있으리라 판단된다. 즉, 여러 가지 평면도형의 정의와 성질을 개별적, 독립적으로 다루는 것이 아니라 삼각형이라는 하나의 관점에서 통합적으로 다룰 수 있을 것이다.

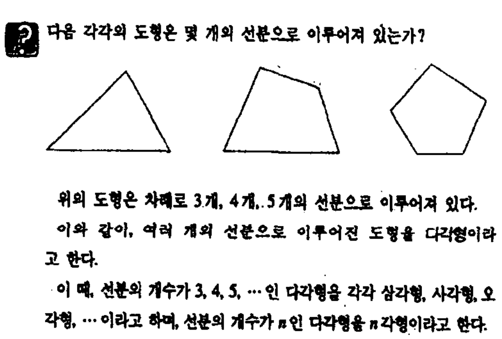
Ⅲ. 삼각형의 관점에서 교과서 내용 다시 보기

앞서 살펴보았듯이 학교수학에서 다루는 평면도형 관련 내용의 대부분은 그 구성에서, 그리고 내용의 전개 과정에서 직, 간접적으로 삼각형을 그 근간으로 하고 있다. 그렇다면 기존의 교과서 내용을 삼각형의 관점에서 삼각형을 중심으로 재구성할 수 있는가? 그리고 삼각형의 관점에서 재구성한 내용은 기존의 내용과 비교해서 수학교육적으로 어떤 유의미한 차이가 있는가? 라는 질문을 던질 수 있다. 이러한 질문에 답하기 위해 이 장에서는 우리나라 중학교 수학 교육과정에 제시된 평면도형 관련 내용 중에서 직접적으로 삼각형을 다루고 있지 않지만 삼각형이 그 근간이 되고 있다고 판단되는 내용으로서 중학교 1학년에서의 "다각형의 도입과 내각의 크기의 합 측정" 부분과 중학교 2학년에서의 "여러 가지 사각형의 성질과 포함관계" 부분의 내용 구성과 전개 방식을 삼각형이 평면도형 탐구의 기본 요소라는 관점에서 재음미해 보고자 한다. 그리고 삼각형을 중심으로 한 평면도형 탐구

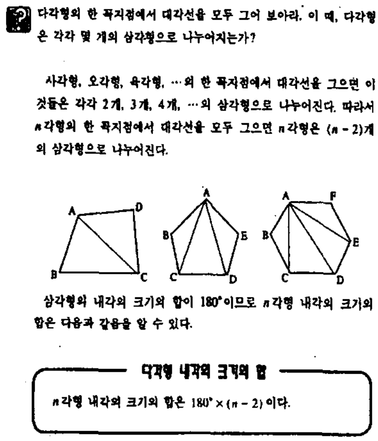
활동 설계의 예로서 넓이 공식이 없는 일반적인 다각형의 넓이와 삼각형의 넓이 사이의 관계에 대한 탐구 활동 사례를 제시하고자 한다.

1. 다각형의 도입과 내각의 크기의 합

다각형은 삼각형으로부터 변의 개수를 일반화($3 \rightarrow n$)하여 여러 개(n개)의 선분으로 이루어진(혹은 둘러싸인) 도형으로 정의되고, 통상 이 정의에 해당하는 도형이나 구체물 등을 관찰하는 활동을 통해 그 개념을 도입한다(<그림 2>의 (a)). 그리고 n각형의 내각의 크기의 합이 $(n-2)\pi$이라는 사실은 통상 n각형이 $(n-2)$개의 삼각형으로 분해된다는 사실로부터 곧바로 유도되며, 이 과정에서 대각선을 보조선으로 활용한다(<그림 2>의 (b)).



(a) 다각형의 도입



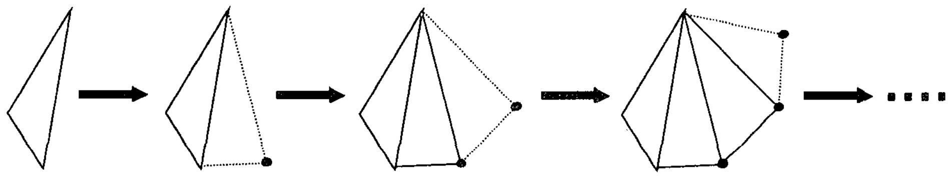
(b) 다각형의 내각의 크기의 합

<그림 2> 교과서에 제시된 다각형 개념의 도입 및 내각의 크기의 합 탐구 예(신항균, 2001)

<그림 2>의 (b)에 제시된 예에서 n각형을 $(n-2)$개의 삼각형으로 분할하기 위해 대각선을 보조선으로 긋는다는 아이디어는 통상 교사나 교과서에 의해 주어진다. 그러나 변의 개수를 일반화($3 \rightarrow n$)하여 정의한 다각형 개념만으로는 학생 스스로 그러한 보조선을 착안해 내기 어려우며, 교사 역시 그러한 아이디어가 왜 나왔는지 설명하기가 어렵다. 도형의 성질을 탐구하거나 관련된 문제를 해결하는 과정에서 보조선이 필수적으로 사용되는 경우가 많다. 이미 타인에 의해 주어진 보조선을 보고 왜 그러한 보조선이 필요하였는지 이해하는 것은 그다지 어렵지 않지만, 문제 상황에 필요한 적절한 보조선을 스스로 생각해 내기는 상대적으로 어려운 일이다. 대부분의 경우 보조선을 긋기 위해서는 주어진 문제를 해결하기 위해 문제 상황을 어떤 형태로 변형해야 할 것인가에 대한 아이디어 착안이 우선되어야 한다. 예를 들어 <그림 2>의 (b)에 제시된 것처럼 다각형의 내각의 크기의 합을 구하는 문제의 경우에는 주어진 다각형을 내각의 크기의 합이 180°임이 이미 알려진 삼각형들로

분할한다는 아이디어가 착안되어야 하고, 이 과정에서 대각선이 보조선으로 자연스럽게 활용될 수 있어야 한다.

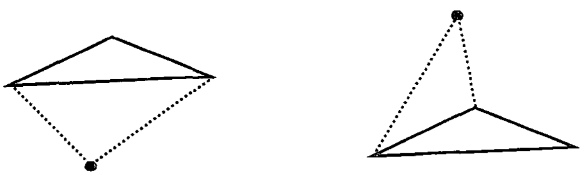
삼각형의 관점에서 보면, 삼각형에 변 2개와 꼭지점 하나를 추가(한 후 원래 있던 변 하나를 삭제)하여 사각형을 구성할 수 있다.[4] 삼각형에 변 2개와 꼭지점 하나를 추가한다는 것은 곧 주어진 삼각형과 한 변을 공유하는 새로운 삼각형을 하나 추가한다는 것을 의미하므로, 이는 삼각형 2개를 이어 붙여 사각형을 구성할 수 있음을 의미한다. 이러한 관점에서 보면 n각형은 $(n-1)$각형에 점을 하나 추가하여 즉, 주어진 $(n-1)$각형에 새로운 삼각형을 하나 이어 붙여 만든 도형이 된다. 5각형은 4각형에 삼각형 하나를 붙여 만들었으니 삼각형 3개를 붙여서, 그리고 n각형은 $(n-1)$각형에 삼각형 하나를 붙여 만들었으니 결국 삼각형 $(n-2)$개를 붙여서 만든 도형이 된다(그림 3). 이 과정에서 원래 있던 변들은 다각형의 성질을 탐구하는 과정에서 예를 들면, 다각형의 내각의 크기의 합을 구하는 과정에서 자연스럽게 학생들이 그어야 할 보조선(대각선)의 역할을 한다(<그림 4>).



<그림 4> 삼각형으로부터 다각형 구성하기

이와 같이 다각형을 삼각형으로부터 구성하는 활동을 통해 도입함으로써, 학생은 다각형 탐구의 기본 요소가 삼각형임을 보다 명료하게 이해할 수 있고, 내각의 크기의 합을 측정하기 위해 주어진 다각형을 삼각형들로 분할하고 이 과정에서 대각선을 보조선으로 활용하는 아이디어를 자연스럽게 착안할 수 있게 될 것이다.[5]

4) 이 때 추가되는 점의 위치에 따라 즉, 붙이는 삼각형의 종류에 따라 구성되는 사각형이 볼록사각형인가 오목사각형인가의 여부가 결정된다(<그림 3>). 그러므로 상황에 따라서는 오목다각형의 개념 소개도 가능할 것이다.



<그림 3> 삼각형으로부터 사각형 구성하기

5) 또한 한 꼭지점에서 그을 수 있는 대각선의 개수는 주어진 삼각형에 붙이는 삼각형의 개수와 같으므로 n각형의 한 꼭지점에서 그을 수 있는 대각선의 개수가 $(n-3)$이 됨을 알 수 있다.

2. 여러 가지 사각형의 성질과 포함 관계

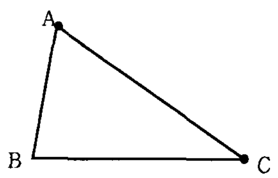
중학교 2학년 도형 영역에서는 삼각형의 성질에 이어 여러 가지 사각형의 성질을 탐구한다. 좀 더 구체적으로 살펴보면 평행사변형의 성질과 평행사변형이 되기 위한 조건 등을 탐구하고, 직사각형과 마름모가 각각 평행사변형이고 정사각형은 직사각형인 동시에 마름모임을 학습하며, 이를 토대로 여러 가지 사각형 사이의 포함 관계를 학습한다. 그러나 내용을 학습하고 나서도 일부 학생들은 교과서에 흔히 제시되는 평행사변형과는 다른 직각을 지닌 평행사변형을 평행사변형으로 인식하지 못하거나 여러 가지 사각형들의 성질을 서로 혼동하기도 한다.6)

이러한 현상의 원인을 내용 구성과 전개의 측면에서 살펴보자. 사다리꼴과 평행사변형은 변들 간의 "평행" 여부를 통해 정의되고, 직사각형, 마름모, 정사각형은 "(직)각"과 변의 "길이"를 통해 정의되는데, 학생들은 이처럼 여러 개념이 뒤섞여 정의된 각 개별 사각형의 정의를 서로 간의 관련성에 대한 아무런 단서도 없이 우선 받아들여야 한다. 그리고 이 정의에 입각하여 여러 가지 사각형을 도입하고, 다시 각 사각형이 지닌 성질을 새로이 학습한 후, 최종적으로 사각형들 사이의 포함관계를 탐구하게 된다. 한편, 여러 가지 사각형의 성질을 탐구하기 위해서는 다각형 탐구에서와 마찬가지로 삼각형과 대각선을 보조 도형으로 사용하는 것이 필요하지만, 정의에 입각한 개별 사각형의 도입에서 이러한 단서가 제공되고 있다고 보기는 어려우며, 따라서 주어진 사각형을 삼각형으로 분해하고 대각선을 보조선으로 활용해야 한다는 아이디어를 학생 스스로 생각해 내기는 어렵다.

앞서 살펴본 바와 같이 삼각형의 관점에서 보면 삼각형에 변 2개와 꼭지점 하나를 추가하여 사각형을 구성할 수 있으며, 이 때 추가되는 변과 점이 어떤 변과 점이냐에 따라 사각형의 종류를 결정할 수 있다. 이러한 관점에서 삼각형과 평행선을 이용하여 삼각형으로부터 여러 가지 사각형을 구성하는 다음과 같은 탐구 활동을 설계할 수 있다.

[탐구활동 1] 삼각형으로부터 여러 가지 사각형 구성하기

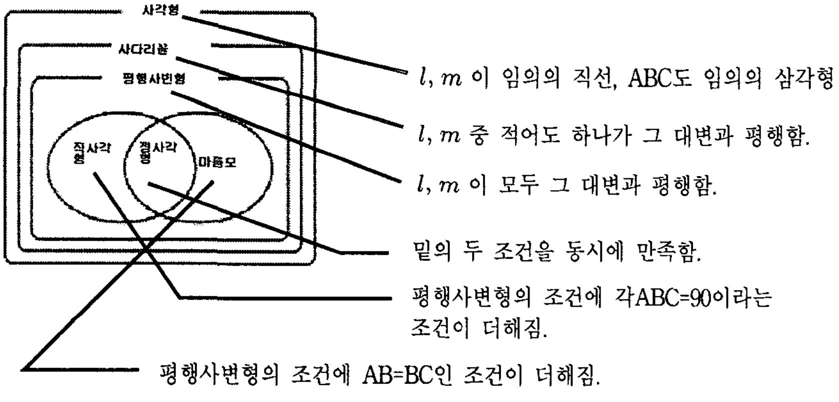
삼각형 ABC가 하나 주어져 있다. 꼭지점 A를 지나는 직선 l 과 꼭지점 C를 지나는 직선 m 의 교점을 D라고 할 때 다음 물음에 답하여 보자.



6) Van Hiele(1986)의 관점에서 볼 때 이러한 현상은 학생들이 교사와는 서로 다른 수준에서 사고하며 용어나 대상을 교사나 교과서가 의도하는 것과는 다른 방식으로 이해한다는 것을 의미하며, 교과서에 제시된 정의가 학생들이 심상으로 지니고 있는 사다리꼴이나 평행사변형에 대한 기하적 표현과 조화를 이루지 못하기 때문이라고도 볼 수 있다(도종훈, 2006).

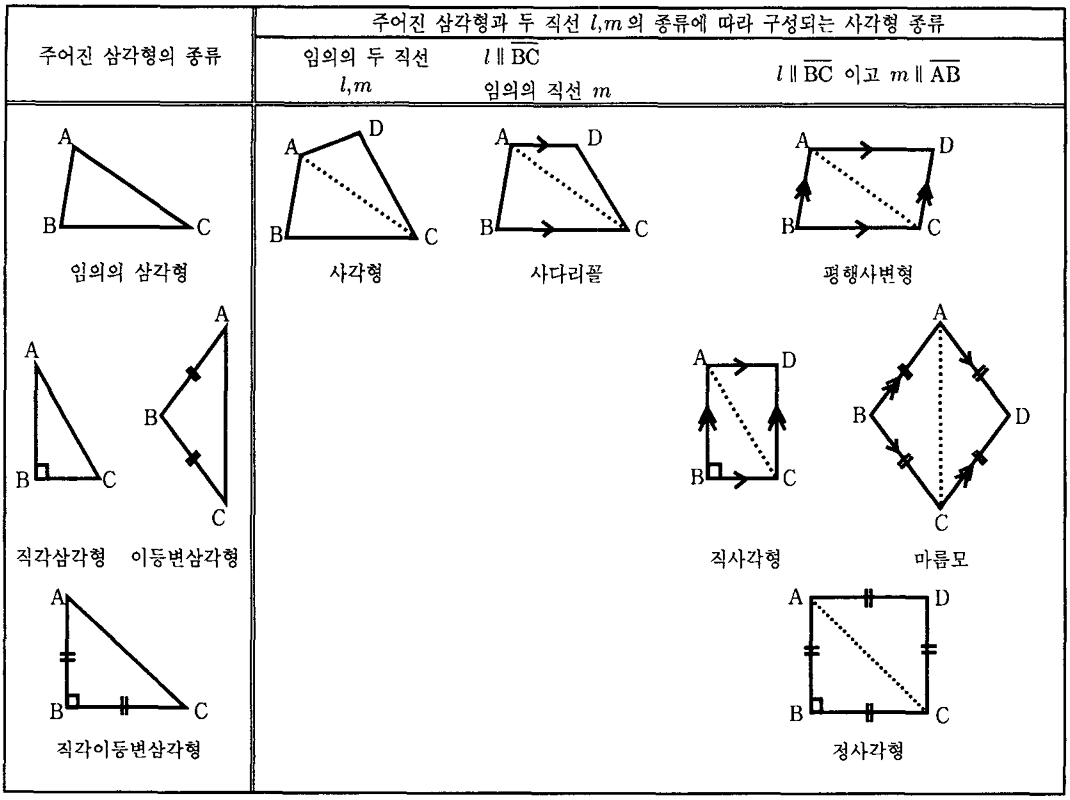
(1) 네 점 A, B, C, D를 이으면 어떤 도형이 만들어지는가?
(2) $l \parallel \overline{BC}$ 일 경우, 네 점 A, B, C, D를 이으면 어떤 도형이 만들어지는가?
(3) $l \parallel \overline{BC}$ 이고 $m \parallel \overline{AB}$ 일 경우, 네 점 A, B, C, D를 이으면 어떤 도형이 만들어지는가?
(4) 주어진 삼각형이 $\overline{BA} = \overline{BC}$ 인 이등변삼각형일 경우, (3)번 물음에 답하여 보자.
(5) 주어진 삼각형이 $\angle B = 90°$ 인 직각삼각형일 경우, (3)번 물음에 답하여 보자.
(6) 주어진 삼각형이 $\overline{BA} = \overline{BC}$ 이고 $\angle B = 90°$ 인 직각이등변삼각형일 경우, (3)번 물음에 답하여 보자.

이 탐구활동 설계에 의하면 임의의 사각형, 사다리꼴, 평행사변형, 직사각형, 마름모, 정사각형은 모두 어떤 삼각형에 변 2개(와 꼭지점 하나)를 추가함으로써 구성할 수 있는데, 이 때 사용되는 삼각형의 종류가 임의의 삼각형, 직각삼각형, 이등변삼각형, 직각이등변삼각형인가의 여부와 추가되는 두 변이 원래 주어진 두 변과 서로 평행인가 아닌가의 여부에 따라 만들어지는 사각형의 종류가 결정된다. 다음은 이 탐구 활동에 대하여 2005학년도 S과학영재교육원 수학분과에 소속된 중학교 1학년 학생이 S과학영재교육원 홈페이지의 주간문제 게시판에 탐구 결과로 제출한 것이다(<그림 5>).



<그림 5> 삼각형으로부터 여러 가지 사각형 구성하기 탐구 결과의 예

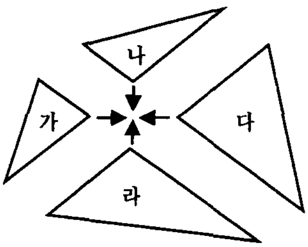
이 탐구활동을 통해 학생들은 주어진 삼각형이 어떤 삼각형이고 추가하는 변이 어떤 변이냐에 따라 사각형의 종류가 결정됨을 이해할 수 있을 뿐 아니라 여러 가지 사각형들 사이의 포함 관계에 대한 이해도 자연스럽게 이루어질 수 있으리라 판단된다. 실제로 "임의의 삼각형"에 추가하는 두 변 중 "적어도 한 변이 대변과 평행일 경우" 사다리꼴이 구성되고, "두 변이 모두 대변과 각각 평행일 경우"에는 평행사변형이 되며, "직각삼각형", "이등변삼각형", "직각이등변삼각형"에 대하여 평행사변형과 같은 작업을 수행하면 각각 직사각형, 마름모, 정사각형이 구성된다(그림 6). 또한 주어진 삼각형의 한 변이 새로이 구성된 사각형의 대각선이 되고 이 대각선을 통해 사각형이 삼각형으로 분할되어 있기 때문에 사각형의 성질을 탐구하는 과정에서 대각선을 보조선으로 하여 사각형을 분할하는 아이디어가 자연스럽게 도출될 수 있다.



<그림 6> 삼각형과 평행선을 이용한 사각형의 구성과 분류

삼각형의 관점에서 여러 가지 사각형을 분류하고 그 성질을 탐구하는 활동의 다른 예로서 다음과 같이 사각형의 두 대각선에 의해 분할된 네 개의 삼각형 조각의 크기와 모양에 대한 정보로부터 원래 사각형이 어떤 종류의 사각형이었는지 탐구하는 활동을 고려할 수 있다.

[탐구활동 2] 네 조각 퍼즐 맞추기
어떤 사각형이 두 대각선에 의해 가, 나, 다, 라 네 개의 삼각형 조각으로 쪼개어졌다고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.



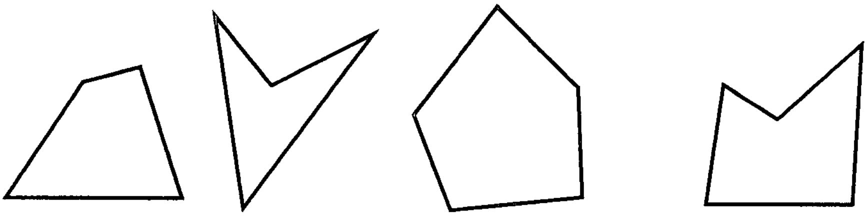
(1) 쪼개어진 네 개의 삼각형 조각 중 마주보는 두 조각 가, 다의 넓이가 같다고 할 때, 원래 사각형은

어떤 모양의 사각형이었을까?
(2) 네 개의 삼각형 조각 중 두 개의 조각 가, 다의 넓이가 같을 뿐 아니라 나, 라의 넓이도 서로 같다고 한다. 그렇다면 원래 사각형은 어떤 사각형이었을까?
(3) 네 개의 삼각형 조각 가, 나, 다, 라의 넓이가 모두 같을 뿐 아니라 네 조각의 삼각형이 모두 합동이라고 한다. 그렇다면 원래 사각형은 어떤 사각형이었을까?
(4) 네 개의 삼각형 조각 가, 나, 다, 라의 넓이가 모두 같을 뿐 아니라 네 조각의 삼각형이 모두 이등변삼각형이라고 한다. 그렇다면 원래 사각형은 어떤 사각형이었을까?
(5) 네 개의 삼각형 조각 가, 나, 다, 라의 넓이가 모두 같을 뿐 아니라 네 조각의 삼각형이 모두 합동인 이등변삼각형이라고 한다. 그렇다면 원래 사각형은 어떤 사각형이었을까?

이 탐구활동은 내용의 도입 단계보다는 여러 가지 사각형의 성질을 학습한 후 학습한 내용을 다시 한 번 정리하고 점검하는 데에 보다 적합하다고 할 수 있다. 이 활동을 수행하기 위해서는 삼각형의 넓이와 합동에 대한 이해 뿐 아니라 여러 가지 사각형의 정의, 성질, 사각형들 사이의 관계 등에 대한 이해가 통합적으로 요구된다. 이 탐구활동에서 두 대각선에 의해 네 조각으로 분할된 삼각형 가, 나, 다, 라 중 마주보는 두 조각(가와 다 혹은 나와 라)의 넓이가 같다고 하면 원래 사각형은 사다리꼴이 되고, 네 조각의 넓이가 모두 같으면 주어진 사각형은 평행사변형이 됨을 알 수 있다.

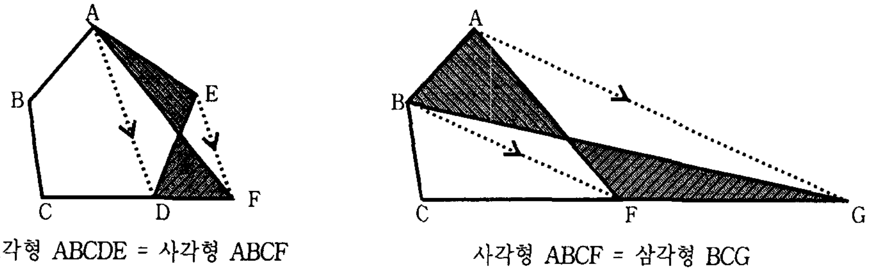
3. 삼각형의 넓이와 다각형의 넓이 공식

삼각형은 넓이 공식이 있어서 어떠한 모양의 삼각형이던지 한 변의 길이와 높이를 알면 넓이를 구할 수 있다. 또, 사다리꼴, 평행사변형, 직사각형, 정사각형과 같은 특정한 모양의 사각형들도 각 도형의 선분 2개의 길이로 구성된 넓이 공식이 있다. 그런데 그 밖의 일반적인 모양의 사각형이나 오각형, 육각등 등의 다각형들은 왜 넓이 공식이 없는 걸까? 넓이 공식이 없다면 이런 도형의 넓이는 어떻게 구할 수 있을까? 라는 질문을 제기할 수 있다(<그림 7>).



<그림 7> 넓이 공식이 없는 다각형의 예

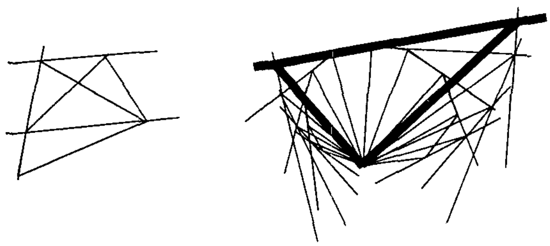
이 질문으로부터 넓이 공식이 알려져 있지 않은 사각형이 하나 주어졌을 때 이 사각형과 넓이가 같은 삼각형을 찾는 탐구활동을 설계할 수 있으며, 이를 일반화하여 n각형이 하나 주어졌을 때 주어진 n각형과 넓이가 같은 $(n-1)$각형, $(n-2)$각형, …, 삼각형을 찾는 탐구활동을 설계할 수 있다. <그림 8>은 오각형이 하나 주어졌을 때, 주어진 오각형과 넓이가 같은 삼각형을 찾는 탐구 과정을



<그림 8> 오각형과 넓이가 같은 삼각형 탐구의 예

간략하게 예시한 것이다. 즉, 평행한 두 직선 사이의 거리는 언제나 일정하다는 성질을 이용하면 주어진 오각형 ABCDE와 넓이가 같은 사각형 ABCF를 작도할 수 있고, 같은 방법으로 사각형 ABCF와 넓이가 같은 삼각형 BCG를 작도할 수 있다. 이를 일반화하면 어떠한 모양의 n각형이 주어지더라도 주어진 n각형과 넓이가 같은 삼각형을 작도할 수 있고, 이 삼각형의 넓이를 구함으로서 주어진 n각형의 넓이를 구할 수 있게 된다. 실제로 2005학년도 S과학영재교육원 수학분과에 소속된 중학교 1학년 학생이 n각형과 넓이가 같은 삼각형을 작도하는 문제에 대하여 다음과 같은 탐구 결과를 S과학영재교육원 홈페이지의 주간문제 게시판에 제시하였다.

그림에서 볼 수 있듯이, n각형을 삼각형들 n-2개로 나눈 후 붙어있는 삼각형들을 외곽부터 차례로 다음과 같이 삼각형으로 하나하나 변환시켜주면 된다. 그렇게 되면 n개의 삼각형들이 서로서로 맞춰져 마침내는 하나의 삼각형이 되어 버린다. 재미로.... 12각형을 삼각형으로 만들기!!!!



이와 같은 탐구활동을 통해 학생들은 다각형 넓이에 관한 문제는 결국 삼각형 넓이에 관한 문제로 환원될 수 있으며 따라서 일반적인 모양의 다각형 넓이 공식은 굳이 필요하지 않음을 인식할 수 있게 될 것이다.

Ⅳ. 결 론

수학교육은 교과서를 중심으로 이루어진다. 학생들이 학습하는 교과서 내용은 그 자체로서 수학적

탐구 활동에 필요한 배경지식의 역할을 할 뿐 아니라 수학의 학문적 특성과 아름다움을 인식할 수 있는 통로의 역할을 한다. 그러므로 교과서에 제시되는 각각의 수학 내용은 양질의 것이어야 할 뿐 아니라 그 구성과 전개 방법에 있어 여러 가지 수학적인 개념, 원리, 법칙(혹은 그 응용 등)의 집합적인 모음이나 나열의 형태를 벗어나 내용들 간의 관계와 구조가 가능한 한 명료하게 드러나도록 조직되어 학생들에게 제시될 필요가 있다. 교사는 교과서에 통상 제시되어 있는 내용들이 어떠한 개념이나 내용을 기본 요소로 하고 있고 어떠한 수학적 아이디어를 중심으로 구성되어 있는지 분석할 필요가 있으며, 이러한 분석에 기초하여 필요하다면 해당 내용의 근간이 되는 기본 요소와 그 속에 내재된 수학적 아이디어가 명료하게 드러나도록 교과서 내용을 재구성할 수 있어야 한다.

이러한 관점에서 연구자는 특히 우리나라 중학교 수학 교육과정의 도형 영역 중 평면도형에 관한 내용에 초점을 맞추어 평면도형 탐구의 기본 요소는 무엇이고, 그것으로부터 평면도형의 내용들을 일관성 있게 구성할 수는 없는가? 라는 질문을 던지고, 이에 대하여 평면도형 탐구의 기본 요소가 삼각형이라는 관점을 제시하였다. 그리고 삼각형을 중심으로 한 평면도형 탐구 활동 설계 및 교과서 내용 재구성 아이디어의 몇 가지 예를 제시하였으며, 삼각형의 관점에서 재구성한 내용이나 활동이 기존의 내용과 비교해서 수학교육적으로 어떤 의미를 지니는지 살펴보았다.

이 글에서 제기한 질문은 도형 영역 뿐 아니라 학교수학에서 가르치고 배우는 그 밖의 다른 내용 영역에 대하여 동일하게 제기될 수 있다. 교사는 가르치고자 하는 내용의 기본 요소가 무엇인지를 파악하고 어떤 관점에서 어떤 수학적 아이디어를 중심으로 교수-학습을 계획할 것인지 고려해야 하고, 학생들은 내용을 학습하는 과정에서 해당 내용의 기본 요소와 그 속에 내재된 수학적 아이디어가 무엇인지 이해하고, 기본 요소를 기반으로 내용이 어떻게 구조화되어 있는지 파악할 수 있어야 할 것이다. 이를 위해서는 교사가 설계한 교수-학습 자료가 그 내용 전개의 중심이 되는 기본 요소와 이를 토대로 한 내용의 구조가 학생들이 파악하기 용이하도록 가능한 한 명시적으로 드러나게 구성되어야 하고, 필요하다면 교사 스스로 새로운 탐구활동을 설계할 수 있어야 할 것이다. 이 글에서 제시한 몇 가지 예들은 이에 대한 본보기가 될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

도종훈 (2006). 학생이 지닌 기하적 심상과 문제해결과정에서의 오류. 한국학교수학회 시리즈 E <수학교육 논문집>, **9(2)**, pp.195-208.

신금림 (1993). 삼각분할에 대한 문헌 연구. 이화여자대학교 대학원 석사학위 논문.

신항균 (2001). 중학교 수학 8-나 교사용 지도서. 형설출판사.

Carmo, M. P. (1976). *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall, Inc.

Chern (1979). From triangles to manifolds. *The American Mathematical Monthly* **86(5)**, pp.339-349.

Dörre, H. (1965). 100 great problems of elementary mathematics : Their history and solution. Dover Publications, Inc.

Heath, T. L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements Vol.1.* Dover Publications, Inc.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight.* Academic press, Inc.

Revisiting Triangle : a Foundational Element of Plane Geometry

Do, Jonghoon

Korea Institute of Curriculum and Evaluation, Seoul, Korea

jhoondo@kice.re.kr

What is a foundational element of plane geometry? Isn't it possible to constitute the contents of plane geometry from that element? In this paper, we suggest a view point that triangle is a foundational element of plane geometry. And take some examples of reconstruction of usually given contents and mathematical activity centered on the triangle in plane geometry.