

# 웨이브렛 기반의 혼합된 잡음제거 알고리즘에 관한 연구

김 남 호\* · 배 상 범\*

\*부경대학교 공과대학 전기제어공학부

## A Study on Mixed Noise Removal Algorithm based on Wavelet

Nam-Ho Kim\* · Sang-Bum Bae\*

\*School of Electrical and Control Eng., Pukyong National Univ.

E-mail : nhk@pknu.ac.kr

### 요 약

다양한 매체를 통해 전달되는 멀티미디어 정보신호를 처리하는 과정에서 시스템 내·외부적인 원인에 의해 잡음이 발생하고 있으며, 이러한 잡음은 정보신호에 대한 인지도를 저하시킨다. 따라서 잡음을 제거하고 신호를 복원하기 위한 많은 연구들이 진행되고 있으며, 최근에는 웨이브렛의 시간-주파수 국부성을 이용한 잡음제거 방법들이 많은 응용분야에 적용되고 있다. 한편, 두 개의 웨이브렛 기저가 힐버트 변환쌍을 형성하도록 설계될 때, 웨이브렛은 신호의 특징을 검출하기 위해 보다 효과적으로 적용될 수 있다. 따라서 본 논문에서는 잡음에 의해 훼손된 신호를 복원하기 위해, 웨이브렛의 힐버트 변환쌍을 이용한 잡음제거 알고리즘을 제안하였다.

### ABSTRACT

In the step processing multimedia information signals transmitted by a variety of mediums, noises are generated by the internal or exterior causes of systems and these noises degrade the perception about information signals. Therefore, in order to remove noises and restore signals a great number of researches have been progressed and recently, many noise removal methods using time-frequency localization of wavelet have been applied in wide applications. Moreover, when two wavelet bases are designed to accomplish the Hilbert transform pair, wavelet can be efficiently applied to detect characteristics of signals. Therefore, in this paper, in order to restore the corrupted signal by noises, a noise removal algorithm using the Hilbert transform pair of wavelet was proposed.

### 키워드

noise, time-frequency localization, wavelet, Hilbert transform

### 1. 서 론

잡음은 신호를 획득하고 처리하는 과정에서 다양한 원인에 의해 발생하고 있으며, 신호에 대한 인지도를 저하시키거나, 데이터를 송수신하는 과정에서 심각한 오류를 발생시킨다. 따라서 잡음에 의해 훼손된 신호를 복원하기 위한 연구들이 신호처리의 여러 분야에서 활발히 진행되고 있다.

잡음에는 발생원인과 분포형태에 따라 많은 종류가 있으며, AWGN(additive white Gaussian noise)과 임펄스 잡음이 가장 대표적이다. AWGN은 신호를 송수신하고 처리하는 과정에서 다양한 채널을 통해 신호에 중첩되며, 평균필터는 이러한 AWGN을 제거하기 위한 가장 간단한 선형필터이다. 그러나 신호에 대한 평활화 과정을 통해 잡

음을 제거함에 따라, 신호에서 급격한 크기 변화를 나타내는 에지성분에서는 블러링현상이 발생한다. 그리고 신호처리분야에서 가장 대표적으로 응용되고 있는 푸리에변환에 기반한 방법은 잡음 제거 특성을 개선시키기 위해 적용되고 있으나, 신호를 주파수축상에서만 표현함에 따라, 임의의 주파수 성분에 대한 시간정보를 제공하지 않는다.

또한, 임펄스 잡음을 제거하기 위해, 일반적으로 median 필터와 같은 비선형필터가 적용되고 있으며, 인접 데이터의 최대값과 최소값을 이용하는 min-max 기반의 방법들에 대한 연구들도 활발히 진행되고 있다.

한편, 최근에는 다중해상도 분석과 우수한 시간-주파수 국부성을 나타내는 웨이브렛 기반의 잡음제거 방법들이 제안되어, 기존의 선형 및 비선

형 필터를 대신하고 있다. Donoho는 wavelet shrinkage에서 DWT(discrete wavelet transform)를 AWGN을 제거하기 위해 사용하였다[1]. 또한 모든 웨이브렛 스케일에서 동일한 수의 웨이브렛 계수를 갖는 SWT(stationary wavlet transform)는 breakdown-point 검출과 잡음제거 등의 분야에서 더욱 향상된 결과를 나타내었다[2].

그리고 두 개의 웨이브렛 기저가 힐버트 변환 쌍을 형성할 때, 웨이브렛은 신호의 특징을 검출하기 위해 보다 효과적으로 적용될 수 있다. 따라서 본 논문에서는 복합적인 잡음에 의해 훼손된 신호를 복원하기 위해, 웨이브렛의 힐버트 변환쌍을 이용한 잡음제거 알고리즘을 제안하였다.

## II. 웨이브렛 기반 잡음제거 알고리즘

신호를 시간-주파수 공간상에서 나타내기 위한 이산적인 웨이브렛 변환 방법으로 DWT와 SWT가 대표적이다. 이러한 방법들은 식 (1)과 같이 mother wavelet  $\psi(t)$ 을 dyadic sampling한 형태의 baby waelet을 사용한다[2].

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in Z \quad (1)$$

식으로부터,  $j$ 는 scale factor이며,  $k$ 는 translation factor이다. 그리고 다중해상도 분석에서는 정규직교 기저를 형성하는 스케일 함수  $\phi(t)$ 를 이용하여, 두 스케일 사이의 관계를 아래의 식 (2) 및 식 (3)과 같이 표현한다.

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_k g(k) \phi(2t - k) \quad (2)$$

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k h(k) \phi(2t - k) \quad (3)$$

여기서,  $g(\cdot)$ 와  $h(\cdot)$ 는 각각 대역통과와 저역통과 특성을 나타내는 quadrature mirror 분해 필터이다. 그리고 Mallat에 의해 제안된 DWT 알고리즘에서는 식 (4)와 식 (5)를 이용하여 신호를 분해하였다.

$$a_{j,k} = \sum_l h(l - 2k) a_{j-1,l} \quad (4)$$

$$d_{j,k} = \sum_l g(l - 2k) a_{j-1,l} \quad (5)$$

위의 두 식으로부터,  $a_{j,k}$ 와  $d_{j,k}$ 는 각각 스케일  $j$ 와 위치  $k$ 에서의 웨이브렛 근사계수와 상세계수를 나타내며, 이때 초기조건으로  $a_{0,k}$ 는 신호  $f$ 와 같다. 그리고 스케일  $j$ 에서의 근사계수  $a_{j,k}$ 는 스케일  $j+1$ 에서의 근사계수와 상세계수로부터 식 (6)에 의해서 계산되며, 이러한 과정에 의해 신호  $f$ 가 복원된다.

$$a_{j,k} = \sum_l h(k - 2l) a_{j+1,l} + \sum_l g(k - 2l) d_{j+1,l} \quad (6)$$

위의 식들에서, DWT의 기본적인 계산이 down-sampling에 의해서 이루어짐에 따라, 고속의 연산으로 각 스케일의 계수값을 얻을 수 있다. 그러나 이러한 과정에서 DWT가 전이불변성을 상실함에 따라, 잡음제거 등의 분야에서는 SWT가 보다 유용하게 적용된다. SWT는 신호를 down-sampling하는 대신, 필터의 각 계수들 사이에  $2^j - 1$ 개의 zero를 삽입하여, 필터의 대역폭을  $1/2^j$ 로 감소시키는 것에 의해 계산된다. SWT에서의 근사계수와 상세계수, 그리고 복원과정은 각각 식 (7), 식 (8), 식 (9)와 같다.

$$a_{j,k} = \sum_l h_{j-1}(l - k) a_{j-1,l} \quad (7)$$

$$d_{j,k} = \sum_l g_{j-1}(l - k) a_{j-1,l} \quad (8)$$

$$a_{j,k} = \sum_l h_{j+1}(k - l) a_{j+1,l} + \sum_l g_{j+1}(k - l) d_{j+1,l} \quad (9)$$

Donoho와 Johnstone은 웨이브렛을 이용하여 AWGN을 제거하기 위해, 아래의 두 식과 같이 임계값에 기반한 방법을 제안하였으며, 가장 일반적으로 사용되고 있다[1].

$$T_{\lambda}^{soft}(d_{j,k}) = \begin{cases} d_{j,k} - \lambda \operatorname{sgn}(d_{j,k}), & |d_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |d_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (10)$$

$$T_{\lambda}^{hard}(d_{j,k}) = \begin{cases} d_{j,k}, & |d_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |d_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (11)$$

식으로부터,  $\operatorname{sgn}(\cdot)$ 는 sign function이며, 현재 임계값  $\lambda$ 를 결정하기 위한 많은 연구들이 진행되고 있다. Donoho와 Johnstone은 universal threshold에서  $\lambda = \sigma \sqrt{2 \log N}$ 을 적용하였으며,  $\sigma$ 는 추정된 잡음의 표준편차이고,  $N$ 은 신호의 길이이다.

## III. 제안한 알고리즘

두 개의 웨이브렛 기저가 근사적으로 힐버트 변환 쌍을 형성하도록 설계될 경우, 웨이브렛 기저는  $90^\circ$ 의 위상차를 갖고 동일한 진폭 스펙트럼을 나타낸다. 이러한 관계는 신호의 특징을 검출함에 있어서 기존의 DWT보다 우수한 결과를 나타내며,  $\tau$ -sample 지연을 갖는 전역통과 필터는 아래의 식 (12)와 같다[3].

$$A(z) = \frac{z^{-N} D(1/z)}{D(z)} \quad (12)$$

$$D(z) = 1 + \sum_{n=1}^N d(n) z^{-n} \quad (13)$$

$$d(n) = (-1)^n \binom{M}{n} \frac{(\tau - N)_n}{(\tau + 1)_n} \quad (14)$$

위의 식으로부터,  $(\cdot)_n$ 는 rising factorial을 나타낸다. 또한  $N$ 은 필터의 차수이며, 일반적으로 전역통과 필터의 계수값이  $n$ 의 증가에 따라 급격히 감소하므로,  $M \geq N$ 인 차수  $M$ 을 선택한다. 그리고 웨이브렛 기저가 힐버트 변환쌍을 형성하도록 하기 위해, 전역통과 필터를 포함하여 설계한다.

$$\hat{H}(z) = H(z) \frac{z^{-N} D(1/z)}{D(z)} \quad (15)$$

여기서  $\hat{H}(z)$ 와  $H(z)$ 는 힐버트 변환 관계를 형성하는 저역통과 필터이다. 그리고 식 (15)는 vanishing moment  $K$ 를 포함하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} H(z) &= Q(z)(1+z^{-1})^K D(z) \\ \hat{H}(z) &= Q(z)(1+z^{-1})^K z^{-N} D(z) \end{aligned} \quad (16)$$

또한  $\hat{H}(z)$ 와  $H(z)$ 는 자기상관함수에 대한  $z$ 변환 영역에서, 식 (17)과 같이 동일하게 표현된다.

$$C(z) = R(z) S(z) \quad (17)$$

위의 식으로부터,  $S(z) = (z + 2 + z^{-1})^K D(z) D(1/z)$ 로서 파라메타  $K$ ,  $M$ ,  $N$ 을 사용하여 얻을 수 있으며,  $R(z) = Q(z) Q(1/z)$ 는 반대역 조건을 만족하기 위한  $\delta(n) = [\downarrow 2](s * r)(n)$ 으로부터 얻어진다. 따라서  $R(z)$ 의 스펙트럼 인수분해를 통해  $Q(z)$ 를 구한 후, 각각의 필터계수를 계산한다. 이때 식 (14)에서,  $\tau = 1/2$ 를 선택할 경우 근사적으로 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$\Psi_{\hat{H}}(\omega) = \begin{cases} -j\Psi_H(\omega), & \omega > 0 \\ \Psi_H(\omega), & \omega < 0 \end{cases} \quad (18)$$

여기서,  $\Psi(\omega)$ 는  $\psi(t)$ 의 푸리에변환이며, 이러한 과정으로부터 얻어지는 웨이브렛 쌍에 의한 계수는 근사적으로 half-sample 지연 관계를 형성한다.

신호의 특징으로부터, 예지는 웨이브렛 근사계수의 임의 지점에서 계수값의 큰 변화를 나타내며 긴 지속시간을 유지한다. 그리고 AWGN은 연속적이고 불규칙한 변화를 나타내며, 임펄스 잡음은 임의 지점에서 계수값의 큰 변화를 나타내지만 곧 이전의 상태로 복귀한다. 따라서 이러한 신호의 특징과 웨이브렛의 힐버트 변환 쌍을 이용하여, 그림 1과 같은 과정을 통해, noisy 신호로부터 복합적인 잡음성분을 제거한다.

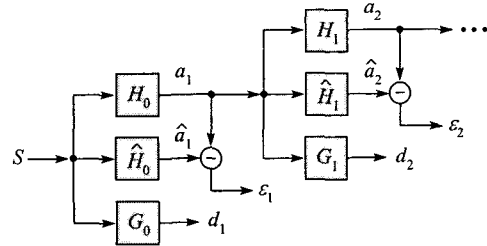


Fig. 1. Decomposition process.

저역통과 필터  $h_{j-1}$ 과  $\hat{h}_{j-1}$ 에 의해 얻어지는 근사 계수  $a_{j,k}$ 와  $\hat{a}_{j,k}$ 에 대한 차신호  $\epsilon_{j,k}$ 는 식 (19)와 같으며, 잡음과 신호의 에지를 분리하기 위해 차신호에  $2\sigma \sim 3\sigma$  사이의 임계값을 적용한다.

$$\epsilon_{j,k} = a_{j,k} - \hat{a}_{j,k} \quad (19)$$

그리고 식 (20)과 같이 임계값을 초과하는 차신호  $\epsilon_{j,k}$ 와 이 지점으로부터 음과 양의 방향으로 기울기의 부호변화가 발생하는 지점의 차신호  $\epsilon_{j,k-m}$  및  $\epsilon_{j,k+p}$ 의 관계를 이용하여, 각 스케일의 웨이브렛 상세계수  $d_{j,k}$ 에서 복합적인 잡음성분을 제거한다.

$$T_{\lambda}^{pro}(d_{j,k}) = \begin{cases} d_{j,k}, & |\epsilon_{j,k}| \geq \lambda, \\ |\epsilon_{j,k-m}| < 0.5 |\epsilon_{j,k}|, \\ |\epsilon_{j,k+p}| < 0.5 |\epsilon_{j,k}| \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (20)$$

#### IV. 시뮬레이션 및 결과

본 논문에서는 복합적인 잡음에 의해 훼손된 신호를 복원하기 위해, 웨이브렛의 힐버트 변환쌍을 이용한 잡음제거 알고리즘을 제안하였다. 그리고 성능평가를 위해 테스트 신호로서 주파수변조 신호를 사용하였으며, 이때 신호의 길이는 2048 sample이다. 또한 웨이브렛 기저를 생성하기 위해 사용된 파라메타는 각각  $K=N=3$ ,  $M=N+1$ 이며, 웨이브렛 분해 레벨은  $j=3$ 을 적용하였다.

그림 2는 테스트 신호에 대한 잡음제거 결과이다. 그림 2(a)는 원신호이며, 그림 2(b)는 각기 다른 크기와 부호를 갖는 임펄스 잡음과 SNR 10 [dB]의 AWGN이 복합적으로 중첩된 noisy 신호로서, 전체 SNR은 6.92[dB]이다. 또한 그림 2(c)에서 그림 2(e)는 각각 DWT와 SWT, 그리고 본 논문에서 제안한 방법에 의한 결과이며, 잡음제거 후 DWT와 SWT의 SNR은 각각 12.46[dB]와 9.90 [dB]를 나타내었다. 그러나 본 논문에서 제안한 방법에 의한 결과는 대부분의 잡음성분을 제거하여, 15.01[dB]를 나타내었다. 그림 3은 noisy 신호의 SNR에 따른 잡음제거 결과를 비교한 것이다.

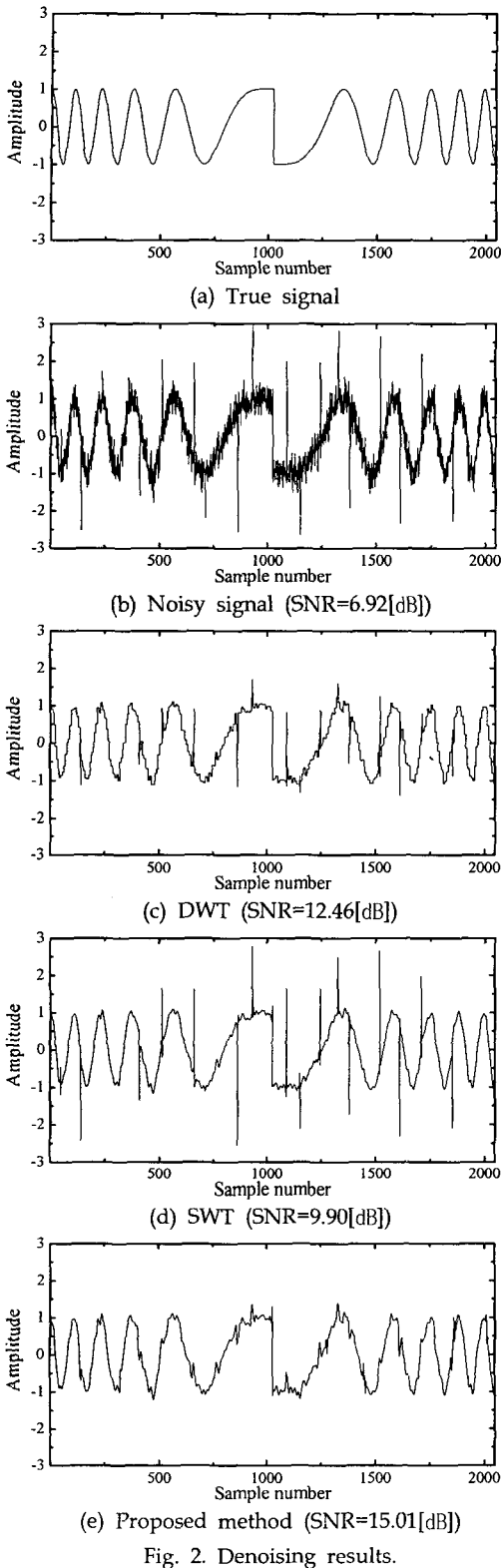


Fig. 2. Denoising results.

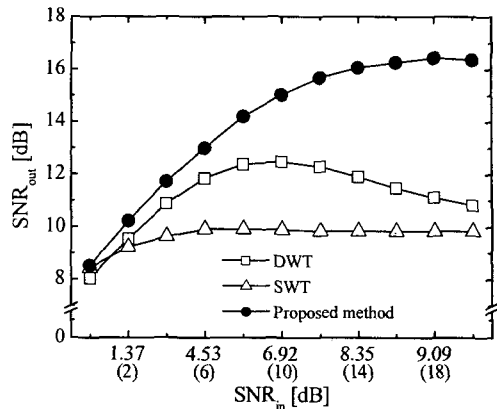


Fig. 3. SNR of reconstructed signal.

그림에서,  $SNR_{in}$ 과  $SNR_{out}$ 은 각각 noisy 신호와 복원된 신호의 SNR이며, (·)는 AWGN에 대한 SNR이다. 결과로부터 제안한 방법이 모든 영역에서 기존의 방법들보다 우수한 결과를 나타내었다.

### V. 결 론

본 논문에서는 웨이블릿의 힐버트 변환쌍을 이용한 복합적인 잡음제거 알고리즘을 제안하였다. 결과로부터, 기존의 방법들은 복합적인 잡음성분과 신호의 에지성분을 분리하기 위한 판단기준을 제시하지 않음에 따라, 전체적인 잡음제거 효과가 저하하였으며, 특히 SWT는 전이불변성에 의해 DWT보다 낮은 SNR 특성을 나타내었다.

그러나 본 논문에서 제안한 방법은 힐버트 변환쌍에 의한 웨이블릿 기저를 적용하여, noisy 신호로부터 복합적인 잡음성분을 효과적으로 분리함에 따라 우수한 SNR 특성을 나타내었다. 따라서 제안한 방법은 잡음환경에서 획득되는 신호를 처리하기 위해 유용하게 적용되리라 사료된다.

### 참 고 문 헌

- [1] D. L. Donoho and I. M. Johnstone, "Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage", *J. Amer. Statist. Assoc.*, vol. 90, no. 432, pp. 1200-1224, 1995.
- [2] R. J. Brychta, S. Tuntrakool, M. Appalsamy, N. R. Keller, D. Robertson, R. G. Shiavi, and A. Diedrich, "Wavelet methods for spike detection in mouse renal sympathetic nerve activity", *IEEE Trans. Biomedical Engineering*, vol. 54, no. 1, pp. 82-93, Jan. 2007.
- [3] I. W. Selesnick, "Hilbert transform pairs of wavelet bases", *IEEE Signal Processing Lett.*, vol. 8, no. 6, pp. 170-173, June 2001.