

# 변형된 창함수를 이용한 FIR 디지털 필터의 성능 향상에 관한 연구

김 남 호\* · 구 본 석\*

\*부경대학교 공과대학 전기제어공학부

## A Study on Performance Improvement of FIR Digital Filter using Modified Window Function

Nam-Ho Kim\* · Bon-Seok Ku\*

\*School of Electrical and Control Eng., Pukyong National Univ.

E-mail : nhk@pknu.ac.kr

### 요 약

디지털 신호처리 기술은 음성 및 영상 처리와 스펙트럼 분석 등과 같은 폭넓은 분야에서 활용되고 있다. 이에 따라 디지털 필터가 아날로그 필터를 대신하여 주파수 선택적 연산을 수행하기 위해 사용되고 있으며, 급준한 필터특성을 실현할 수 있다. 비재귀형으로 구성되는 FIR 디지털 필터는 항상 안정하고 선형위상응답 특성을 나타내므로, 데이터 전송과 같이 파형정보를 중요시하는 분야에 사용된다. 그리고 불연속점 부근에서 발생하는 깃스현상을 감소시키기 위해, 창함수 기법을 통해 필터를 설계한다. 따라서 본 논문에서는 FIR 필터의 성능을 향상시키기 위해, 변형된 창함수를 적용하였으며, 시뮬레이션에서 최대부엽의 크기와 천이특성을 이용하여 기존의 방법과 비교하였다.

### ABSTRACT

Digital signal processing technique is applied in wide fields such as speech processing, image processing and spectrum analysis. Therefore, in order to do frequency selective operation digital filter is used in stead of analog filter and sharp filter characteristics can be implemented. Since finite impulse response (FIR) digital filter as nonrecursive type represents linear phase response characteristics and is always stable and is used in fields regarding wave information importantly such as data transmission. And due to frequency characteristics, in order to remove the Gibbs phenomenon generating around a discontinuous point, filter is designed through window function method. Therefore, in this paper to improve performance of FIR digital filter, a modified window function was applied. And the proposed method was compared with conventional methods using peak side-lobe and transition properties in simulations.

### 키워드

digital signal processing, FIR digital filter, Gibbs phenomenon, window function

### 1. 서 론

디지털 신호처리 기술은 음성 및 영상 처리와 스펙트럼 분석 등과 같은 폭넓은 분야에서 활용되고 있다. 이에 따라 디지털 필터가 아날로그 필터를 대신하여 주파수 선택적 연산을 수행하기 위해 사용되고 있으며, 급준한 필터특성을 실현할 수 있다. 디지털 필터는 일반적으로 IIR(infinite impulse response) 필터와 FIR(finite impulse response) 필터로 구분된다[1].

IIR 디지털 필터는 낮은 차수로서 우수한 진폭 특성을 얻을 수 있으나, 비선형위상응답 특성을 보인다. 또한 궤환경로가 존재함에 따라 안정성을 보장할 수 없으며, 양자화 오차에 대한 누적현상이 발생한다. 이에 반해, FIR 디지털 필터는 IIR 필터와 동일한 진폭특성을 얻기 위해 높은 차수의 필터가 요구되지만, 안정성이 보장되며 구현이 용이하다. 또한 선형위상응답 특성을 나타내므로, 데이터 전송과 같이 파형정보를 중요시하는 분야에 사용된다.

FIR 디지털 필터의 설계 방법 중, 창함수 설계 기법은 이상적인 필터의 무한 임펄스 응답을 유한 임펄스 응답으로 근사화하는 방법이다. 즉, 이상적인 필터의 푸리에급수 전개로부터 인과성을 만족시키기 위해 계수를 절단하게 되며, 이때 주파수 특성상 불연속점 부근에서 발생하는 깁스현상(Gibbs phenomenon)을 감소시키기 위해 창함수를 적용한다.

본 논문에서는 FIR 디지털 필터의 성능을 향상시키기 위해 변형된 창함수를 제안하였다. 그리고 제안한 모델의 성능을 평가하기 위해, 최대부엽의 크기와 천이특성을 사용하여 기존의 창함수에 의한 디지털 필터와 비교하였다.

## II. 디지털 필터

이산시간 선형시불변시스템에 다음의 식 (1)과 같이 표현되는 단위임펄스 신호  $\delta[n]$ 이 입력될 경우의 출력  $y[n]$ 을 임펄스 응답(impulse response)이라 하며,  $h[n]$ 으로 나타낸다[2].

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (1)$$

그리고 선형시불변시스템에 식 (2)와 같은 이산신호  $x[n]$ 이 입력되었을 경우의 출력  $y[n]$ 은 식 (3)과 같이 된다.

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n] \delta[n-k] \quad (2)$$

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_k[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n] h[n-k] \end{aligned} \quad (3)$$

여기서,  $h_k[n]$ 은  $n=k$ 에서 단위 임펄스가 인가될 때의 임펄스 응답이다. 그리고 선형시불변시스템에서 IIR 필터의 시스템 함수는 다음의 식 (4)와 같다.

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}} \quad (4)$$

식으로부터,  $b_N \neq 0$ 인 경우, 필터의 차수는  $N$  ( $N \geq M$ )이 되며, 이러한 IIR 필터의 차분방정식 표현은 식 (5)와 같다.

$$y[n] = \sum_{k=0}^M a_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N b_k y[n-k] \quad (5)$$

위의 식으로부터,  $a_k$ 와  $b_k$ 는 필터계수로서 시스템의

특성을 결정짓는 파라메타이다. 또한 식 (5)는 현재의 출력이 현재 및 과거의 입력과  $N$ 개의 과거 출력에 의해 결정되는 것을 의미하며, 이와 같은 형태의 필터를 재귀형 디지털 필터라고 한다. 또한, 식 (5)로부터  $b_k=0$ 일 경우 식 (6)과 같이 된다.

$$y[n] = \sum_{k=0}^M a_k x[n-k] \quad (6)$$

식 (6)의 출력  $y[n]$ 은 현재 또는 과거의 입력에 의해서만 결정되며, 과거 출력에 대한 피드백 성분이 존재하지 않는다. 따라서 이러한 형태의 필터를 비재귀형 디지털 필터 또는 FIR 디지털 필터라고 한다.

선형시불변시스템에 복소지수신호  $e^{j\omega n}$ 이 입력될 경우, 출력  $y[n]$ 은 식 (7)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} y[n] &= \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} \\ &= H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \end{aligned} \quad (7)$$

식으로부터,  $H(e^{j\omega})$ 는 시스템의 주파수 응답으로서, 크기응답  $|H(e^{j\omega})|$ 와 위상응답  $\angle H(e^{j\omega})$ 을 이용하여 식 (8)과 같이 표현된다.

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \angle H(e^{j\omega}) \quad (8)$$

FIR 디지털 필터가 선형위상응답 특성을 갖기 위해서는 식 (9)와 같이,  $\angle H(e^{j\omega})$ 가  $\omega$ 에 대해서 선형인 조건이 필요하다.

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\tau_p \omega, \quad -\pi < \omega \leq \pi \quad (9)$$

여기서,  $\tau_p$ 는 고정 위상 지연(constant phase delay)이며, 이러한 특성을 실현하기 위해서는 식 (10)과 같이 임펄스 응답이 시간축 상의 중심에 대해 우대칭이어야 한다.

$$h[n] = h[M-n], \quad 0 \leq n \leq M \quad (10)$$

또한, FIR 디지털 필터가  $\omega$ 에 대해서, 일정한 군지연 특성을 갖기 위해서는 식 (11)과 같은 조건이 요구된다.

$$\frac{d \angle H(e^{j\omega})}{d\omega} = -\tau_g, \quad -\pi < \omega \leq \pi \quad (11)$$

식으로부터,  $\tau_g$ 는 고정 군지연(constant group delay)이며, 이러한 형태의 선형위상응답 특성을 위해 식 (12)와 같이 임펄스 응답이 기대칭이어야 한다.

$$h[n] = -h[M-n], \quad 0 \leq n \leq M \quad (12)$$

### III. 창함수를 이용한 FIR 필터 설계

임펄스 응답과 필터 계수의 관계가  $h[n]=a_n$ 이므로, 임펄스 응답이 주어질 경우 FIR 필터의 계수를 얻을 수 있다. 이때, 식 (7)의 시스템 주파수 응답  $H(e^{j\omega})$ 이 무한개의 임펄스 응답으로 구성되어 있으므로, 인과성을 만족시키는 유한차수의 임펄스 응답을 얻기 위해, 필터 계수에 대한 절단이 필요하다. 그러나 이러한 계수 절단에 의해, 주파수 특성상 불연속점 부근에서 깃스현상이 발생한다[3].

이와 같은 깃스현상은 창함수  $w[n]$ 을 적용하여 완화할 수 있으며, 창함수 연산이 수행된 후의 임펄스 응답  $h_w[n]$ 을 식 (13)과 같이 정의한다[4].

$$h_w[n] = h[n] w[n] \quad (13)$$

이때, 인과성을 만족하는 차수  $M$ 의 1차원 창함수  $W(e^{j\omega})$ 는 아래의 식 (14)와 같다.

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M w[n] e^{-j\omega n} \quad (14)$$

주파수 영역에서 인과적 FIR 디지털 필터의 응답  $H_w(e^{j\omega})$ 는 식 (15)와 같이, 이상적인 필터의 주파수 응답  $H(e^{j\omega})$ 와 창함수의 주파수 응답  $W(e^{j\omega})$ 의 주기적 컨벌루션으로 표현된다.

$$\begin{aligned} H_w(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega}) \otimes W(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{j\phi}) H(e^{j(\omega-\phi)}) d\phi \end{aligned} \quad (15)$$

그리고 위의 식 (15)에 상응하는 FIR 디지털 필터의 전달함수는 식 (16)과 같이,  $w[n]$ 과  $h[n]$ 의 곱으로부터 얻어진다.

$$H_w(z) = \sum_{n=0}^M (h[n] w[n]) z^{-n} \quad (16)$$

영상처리를 위해, 필터의 전달함수는 식 (17)과 같이 2차원으로 확장된다.

$$\begin{aligned} H_w(z_u, z_v) \\ = \sum_{u=0}^M (h[u] w[u]) z^{-u} \sum_{v=0}^N (h[v] w[v]) z^{-v} \end{aligned} \quad (17)$$

여기서,  $w[u]$ 와  $w[v]$ 가 환상대칭이라면, 2차원 창함수는 Huang의 방법에 의해, 1차원 창함수의 사양으로부터, 식 (18)과 같이 얻을 수 있다[5].

$$w[m, n] = w[\gamma]_{\gamma = \sqrt{m^2 + n^2}} = w[\sqrt{m^2 + n^2}] \quad (18)$$

주파수 영역에서 표현되는 창함수의 주엽폭은 천이대역폭을 결정하며, 최대부엽의 크기는 통과대역과 저지대역에서 리플의 크기를 결정한다. 따라서 주엽폭과 최대부엽의 크기를 최소화하는 형태의 창함수가 설계되어야 한다. 현재, 아래의 식들과 같이 표현되는 창함수들이 보편적으로 사용되고 있다.

$$w_{hn}[n] = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right), & -\frac{M}{2} \leq n \leq \frac{M}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (19)$$

$$w_{hm}[n] = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right), & -\frac{M}{2} \leq n \leq \frac{M}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (20)$$

$$w_{bl}[n] = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right), & -\frac{M}{2} \leq n \leq \frac{M}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (21)$$

위의 식으로부터,  $w_{hn}[n]$ 은 Hanning,  $w_{hm}[n]$ 은 Hamming, 그리고  $w_{bl}[n]$ 은 Blackman window를 나타낸다.

본 논문에서는 천이대역폭과 최대부엽의 크기 특성을 향상시키기 위해, 아래의 두 식과 같은 변형된 창함수 모델을 제안하였다.

$$w_{p1}[n] = \begin{cases} 0.575 + 0.434 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) - 0.009 \cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right), & -\frac{M}{2} \leq n \leq \frac{M}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (22)$$

$$w_{p2}[n] = \begin{cases} 0.587 + 0.426 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) - 0.013 \cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right), & -\frac{M}{2} \leq n \leq \frac{M}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (23)$$

### IV. 시뮬레이션 및 결과

본 논문에서는 FIR 디지털 필터의 성능을 향상시키기 위해, 변형된 창함수를 제안하였으며, 기존의 Hanning, Hamming, Blackman window를 이용한 디지털 필터와 비교하였다. 이때, 성능평가의 기준으로는 천이대역폭과 최대부엽의 크기 특성을 사용하였으며, 창함수의 차수를  $M=48$ 로 설정하여 차단주파수  $\omega_c=0.2$ 인 저역통과필터를 설계하였다.

그림 1은 기존의 창함수와 본 논문에서 제안한 창함수의 모양을 함께 나타낸 것이다.

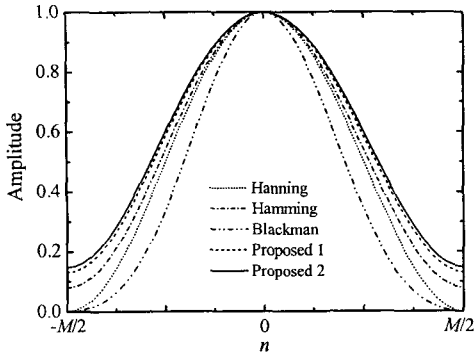


Fig. 1. Profiles of each window function.

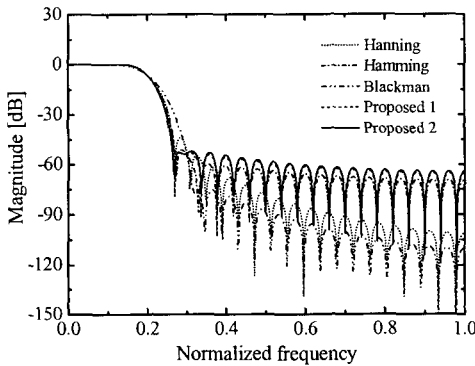


Fig. 2. Frequency characteristics of designed lowpass filter by window functions.

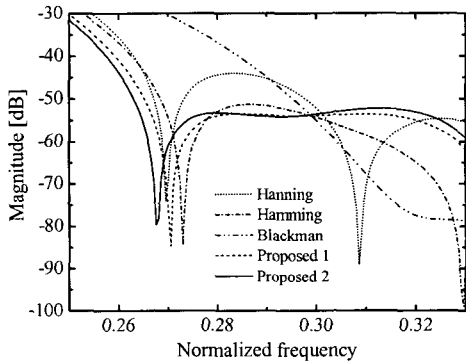


Fig. 3. Peak side-lobe characteristics.

그림 2는 각 창함수들을 비교하기 위해, 차단 주파수  $\omega_c=0.2$ , 차수  $M=48$ 인 저역통과필터를 설계하여, 주파수특성을 시뮬레이션한 것이다. 그리고 그림 3은 저역통과필터에 대한 최대부엽의 크기특성을 분석하기 위해, 그림 2의 일부를 확대한 것이다. 또한 표 1은 창함수에 의해 설계된 필터의 특성을 최대부엽의 크기와 천이대역폭으로 비교한 것이다.

Table 1. Characteristics of each window function

	Hanning	Hamming	Blackman	Proposed 1	Proposed 2
$ps$ [dB]	44.0238	51.3234	75.3684	53.3385	52.1297
$\Delta F$	0.0831	0.0856	0.1383	0.0815	0.0786

표로부터,  $ps$ 는 최대부엽의 크기를 나타내며,  $\Delta F$ 는  $-3$ [dB]인 주파수로부터, 천이대역 상에서  $ps$ 와 동일한 크기를 갖는 주파수까지의 폭을 나타낸다.

시뮬레이션 결과로부터, 기존의 방법들에서 Hamming window가 상대적으로 좁은  $\Delta F$ 와 우수한  $ps$  특성을 나타내었다. 그러나 본 논문에서 제안한 두 종류의 변형된 창함수에 의한 결과는  $\Delta F$ 와  $ps$  모두에서 기존의 창함수에 의한 결과보다 우수한 특성을 나타내었으며, 특히  $ps$ 에서는 Proposed 1,  $\Delta F$ 에서는 Proposed 2가 더욱 개선된 결과를 나타내었다.

### V. 결 론

본 논문에서는 FIR 디지털 필터의 성능을 향상시키기 위해, 변형된 창함수를 제안하였으며, 시뮬레이션에서 천이대역폭과 최대부엽의 크기를 이용하여 기존의 창함수와 비교하였다.

시뮬레이션 결과로부터, 본 논문에서 제안한 두 종류의 변형된 창함수에 의한 필터특성이 기존의 창함수 모델을 사용한 경우보다 모두 우수한 결과를 나타내었다. 또한 제안한 두 모델은 천이대역폭과 최대부엽의 크기특성 중, 하나의 특성에서 좀 더 개선된 결과를 나타내므로 각종 통신 및 방송 기기 분야 등에서 선택적으로 적용되리라 사료된다.

### 참 고 문 헌

- [1] A. Peled and B. Liu, Digital Signal Processing, John Wiley & Sons, 1976.
- [2] V. K. Ingle and J. G. Proakis, Digital Signal Processing Using MATLAB, PWS Publishing Company, 1998.
- [3] L. R. Rabiner and B. Gold, Theory and Application of Digital Signal Processing, Prentice-Hall, New Jersey, 1975.
- [4] T. Saramaki, "A class of window functions with nearly minimum sidelobe energy for designing FIR filters", IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems, vol. 1, pp. 359-362, May 1989.
- [5] T. S. Huang, "Two-dimensional windows", IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, vol. 20, pp. 88-89, March 1972.