

# 완변수심상 지진해일 전파 모의를 위한 분산보정 유한요소모형

Dispersion-Correction Finite Element Model for Simulation  
of Tsunami Propagation over Slowly Varying Depth

임채호\*, 전영준\*\*, 배재석\*\*\*, 윤성범\*\*\*\*

Chae Ho Lim, Young Joon Jeon, Jae Seok Bae, Sung Bum Yoon

## 요지

수치기법이 복잡한 Boussinesq 방정식 대신 간단한 선형 Boussinesq 형태의 파동방정식으로 사용하면서도 완변수심상 지진해일 전파시 요구되는 물리적 분산효과를 정도 높게 고려할 수 있는 분산보정 지진해일 전파 유한요소모형을 개발하였다. 수심이 변하는 지형에서의 분산보정능력을 검증하기 위해 수중 원형천퇴상을 전파하는 Gaussian 형상의 가상지진에 대해 수치모의를 수행하고, 그 결과를 선형 Boussinesq 방정식에 의해 계산된 수치해와 비교하였다. 그 결과 개발된 유한요소모형이 수심이 변하는 지형에서도 상당히 정확하다는 것이 입증되었다.

핵심용어 : 완변수심, 지진해일, 분산보정, 유한요소모형, Boussinesq 방정식

## 1. 서 론

일본 근해에서 발생되어 동해로 전파되는 지진해일은 그 파원폭이 작고, 먼 거리를 전파하기 때문에 물리적인 분산효과를 고려하여 해석해야 한다. 그러므로 물리적인 분산항을 포함하고 있는 Boussinesq 방정식이 지배방정식으로 가장 적합하다. FUNWAVE(Wei and Kirby, 1995; Kirby et al., 1998)와 같은 Boussinesq 계열 파방정식의 수치모형을 이용하여 파의 전파과정을 수치모의 할 경우 지배방정식 자체에 물리적 분산항이 존재하므로 수치적인 분산오차를 최소화해야 한다. 이를 위해서는 매우 작은 격자를 채용하여야 하므로 실제적인 문제를 다루기에는 현실적으로 거의 불가능하다. 이로인해 일반적으로 지진해일 전파 수치모형은 천수방정식을 지배방정식으로 사용하고, 수치적인 분산오차를 이용하여 물리적인 분산효과를 고려하고 있는 실정이다. Imamura et al.(1988)의 유한차분모형을 이용하는 경우 분산효과를 정도 높게 고려하기 위해서는 수심이 연속적으로 감소함에 따라 격자간격도 연속적으로 작아져야 한다. 그러나 유한차분법의 특성상 2차원 전파의 경우 하나의 계산영역 내에서는 격자간격을 자유롭게 조절하지 못하므로 수심이 변하는 실제 지형에 대해서는 이러한 개념의 적용이 곤란하다. 이에 Yoon and Liu(1992)는 변화수심에서도 이러한 개념을 적용할 수 있도록 천수방정식을 지배방정식으로 하는 양해법의 유한요소모형을 개발하고, 수치분산오차의 특성을 파악하여 이를 이용하기 위한 조건식을 제시하였다. 그러나 일반적으로 천수방정식에 대한 유한요소모형은 leap-frog 유한차분모형에서와 같은 공간교호격자(staggered mesh)를 사용할 수 없으므로  $2\Delta x$  파가 발생할 가능성이 높다. 이에 윤성범과 임채호(2005)는 수치기법이 복잡한 Boussinesq 방정식 대신 간단한 선형 Boussinesq 형태의 파동방정식을 지배방정식으로 사용하면서도 지진해일 전파시 요구되는 물리적인 분산효과를 정도 높게 고려할 수 있는 능동적인 분산보정 지진해일 전파 유한요소모형을 개발한 바 있다. 이 유한요소모형은 수치적인 분산오차를 제거함과 동시에 물리적인 분산효과를 고려하기 위해 주어진 수심과 격자 및 시간간격에 의해 계산된 분산보정계수를 이용한다. 또한 임의로 구성된 유한요소망과 순수양해법을 사용

\* 정회원·한양대학교 토목공학과 박사후 과정·E-mail : limch@hanyang.ac.kr

\*\* 정회원·한양대학교 토목공학과 석사과정·E-mail : aqua1123@hanyang.ac.kr

\*\*\* 정회원·한양대학교 토목공학과 석사과정·E-mail : bjjae194@hanyang.ac.kr

\*\*\*\* 정회원·교신저자·한양대학교 공학대학 토목환경공학과 교수·E-mail : sbyoon@hanyang.ac.kr

하기 때문에 신속하게 해를 구할 수 있는 장점이 있다. 등수심상을 전파하는 가상 지진해일에 대한 수치해와 해석해의 비교를 통해 이 수치모형의 정확성이 검증된 바 있지만 사용된 분산보정기법이 수심이 일정하다는 가정하에 유도되었기 때문에 실제 지형에 적용하기 위해서는 먼저 완변수심에 대한 검증이 이루어져야 할 것이다.

본 연구에서는 기존의 등수심상에 대한 능동적인 분산보정 지진해일 전파 유한요소모형을 완변수심상에 서도 적용 가능하도록 확장한 후 수심이 변하는 지형에서의 분산보정능력 및 적용성을 검증하고자 한다. 이를 위해서 완변수심에 대한 해석해가 없기 때문에 개발된 완변수심 지진해일 전파 유한요소모형을 이용하여 수중 원형천퇴상을 전파하는 Gaussian 형상의 가상지진에 대해 수치모의를 수행하고, 그 결과를 FUNWAVE(Kirby et al., 1998)에 포함되어 있는 선형화된 Nwogu의 Boussinesq 방정식(1993)에 의해 계산된 수치해와 비교하여 개발된 유한요소모형의 정확성을 제시하고자 한다.

## 2. 지배방정식

천수에서 약한 분산효과를 고려할 수 있는 2차원 선형 Boussinesq 방정식은 수심이 완만히 변한다는 가정하에 다음과 같은 선형 Boussinesq 파동방정식으로 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( gh \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right] - \frac{h^2}{3} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( gh \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( gh \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right\} \right] = 0 \quad (1)$$

여기서  $\zeta$ 는 정수면으로부터의 수면변위(m),  $g$ 는 중력가속도( $m/s^2$ ),  $h$ 는 정수면으로부터 바닥까지의 수심(m)이다.

또한 선형 Boussinesq 파동방정식 (1)은 다음의 선형 Boussinesq 형태의 파동방정식으로 변형할 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( gh \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right] + \gamma \Delta x^2 \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( gh \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( gh \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right\} \right] = 0 \quad (2)$$

여기서  $\gamma$ 는 분산보정계수이다. 식(2)의 3번째항 계수  $\gamma \Delta x^2$ 를 식(1)의 3번째항 계수  $-h^2/3$ 으로 대치하면 식(2)는 수심이 완만히 변한다는 가정하에 유도된 선형 Boussinesq 파동방정식 (1)과 완전히 일치하게 된다. 수치분산오차를 줄이기 위해 작은 격자간격을 사용해야 하는 식(1)과는 달리 식(2)를 지배방정식으로 사용하는 경우 분산보정계수  $\gamma$ 를 적절히 선정하면 수치적으로 발생되는 분산오차는 제거할 수 있고, 물리적인 분산효과는 정도 높게 고려할 수 있다.

식(2)에 포함된 4차 공간미분항을 시간에 대하여 2단계로 나누어 2차 공간미분항으로 줄이면 식(3)과 (4)로 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( gh \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v - \gamma \Delta x^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

여기서  $v$ 는 임시변수이다. 완변수심상을 전파하는 지진해일에 대한 지배방정식 (3)과 (4)의 해는 식(2)의 해와 같고, 식(2)와는 달리 공간미분항이 2차이므로 선형보간함수를 사용할 수 있는 장점이 있다.

### 3. 유한요소식 및 분산보정기법

완변수식에 대한 2차원 Boussinesq 형태의 과동방정식 (3)과 (4)에 대한 유한요소식은 가중함수와 Galerkin의 가중간차법을 사용하여 이산화하면 다음과 같이 유도된다.

$$[M_{ab}^C] \left\{ \frac{\partial v_b}{\partial t} \right\} + [K_{ab}^\zeta] \{ \zeta_b \} = 0 \quad (5)$$

$$[M_{ab}^C] \left\{ \frac{\partial \zeta_b}{\partial t} \right\} - [M_{ab}^C] \{ v_b \} - [K_{ab}^v] \{ v_b \} = 0 \quad (6)$$

여기서 첨자  $a$  (또는  $b$ )는 요소내 절점번호를 표시하며, 본 연구에서는 영역 내부에 위치하는 내부요소에 대한 식만을 다룰 예정이므로, 경계면에서의 법선방향 미분항은 무시하였다. 또한  $[M_{ab}^C]$ 는 원래질량행렬,  $[K_{ab}^\zeta]$ 와  $[K_{ab}^v]$ 는 강성행렬로 다음과 같다.

$$[M_{ab}^C] = \int_{\Omega} [\{N_a\}^T \{N_b\}] d\Omega \quad (7)$$

$$[K_{ab}^\zeta] = \int_{\Omega} \left[ \left\{ gh \frac{\partial N_a}{\partial x} \right\}^T \left\{ \frac{\partial N_b}{\partial x} \right\} + \left\{ gh \frac{\partial N_a}{\partial y} \right\}^T \left\{ \frac{\partial N_b}{\partial y} \right\} \right] d\Omega \quad (8)$$

$$[K_{ab}^v] = \gamma \Delta x^2 \int_{\Omega} \left[ \left\{ \frac{\partial N_a}{\partial x} \right\}^T \left\{ \frac{\partial N_b}{\partial x} \right\} + \left\{ \frac{\partial N_a}{\partial y} \right\}^T \left\{ \frac{\partial N_b}{\partial y} \right\} \right] d\Omega \quad (9)$$

여기서  $\{N\}$ 은 삼각형 요소에 대한 가중함수(weighting function)로 본 연구에서는 선형함수를 사용하며, 보간함수(interpolation function)는 가중함수와 동일한 형태를 사용한다. 또한 하첨자  $\Omega$ 는 계산영역을 의미하고,  $\Delta x$ 는 삼각형 요소의 한변의 길이를 의미한다.

순수양해법을 사용하기 위해 식(5)와 (6)에서  $\zeta$ 와  $v$ 의 시간단계를 엇갈려 배치하고, 원질량행렬(consistent mass matrix) 대신 집중질량행렬(lumped mass matrix)을 사용하여 전체 요소에 대해 조합하면 다음과 같은 절점에 대한 계산식이 유도된다.

$$v_a^{n+1/2} = v_a^{n-1/2} - \Delta t \frac{[K_{ab}^\zeta]}{[M_{ab}^L]} \zeta_b^n \quad (10)$$

$$\zeta_a^{n+1} = \zeta_a^n + \Delta t v_a^{n+1/2} + \Delta t \frac{[K_{ab}^v]}{[M_{ab}^L]} v_b^{n+1/2} \quad (11)$$

여기서  $[M_{ab}^L]$ 은 집중질량행렬을 의미한다.

한편 윤성범과 임채호(2005)는 등수심상의 지진해일 전파 수치모의시 발생되는 수치적인 분산오차를 제거하고, 물리적인 분산효과를 고려하기 위해 분산보정계수  $\gamma$ 에 대한 식을 다음과 같이 제시한 바 있다.

$$\gamma = \frac{1}{48} \left\{ 3 - \frac{4(4h^2 + gh\Delta t^2)}{\Delta x^2} \right\} \quad (12)$$

식(12)에서 분산보정계수  $\gamma$ 는 정삼각형 요소를 사용하고, 수심  $h$ 가 일정하다는 가정하에 유도된 것으로 주어진 수심  $h$ , 시간간격  $\Delta t$  그리고 절점간격  $\Delta x$ 에 의해 결정된다. 식(12)를 완만히 변하는 수심 지형에 적용 가능하도록 확장하면 다음과 같다.

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{48} \left\{ 3 - \frac{4(4\bar{h}^2 + g\bar{h}\Delta t^2)}{\Delta x^2} \right\} \quad (13)$$

여기서 over-bar는 삼각형 요소를 구성하는 3개 절점에 대한 평균값을 의미한다. 수심  $h$ 와 절점간격  $\Delta x$ 의 변화가 심하지 않다면 식(13)에 의해 계산된 평균 분산보정계수  $\bar{\gamma}$ 를 이용하여 완변수심상을 전파하는 지진 해일에 대한 수치모의시 정도 높은 분산보정이 가능할 것으로 판단된다.

#### 4. 유한요소모형의 검증

본 연구에서 개발한 완변수심 분산보정 유한요소모형의 정확성을 검증하기 위해 수중 원형천퇴상을 전파하는 Gaussian 형상의 가상 지진해일에 대해 수치모의를 수행하였다. 완변수심상을 전파하는 지진해일에 대한 해석해가 없는 관계로 FUNWAVE에 포함되어 있는 선형화된 Nwogu의 Boussinesq 방정식에 의해 계산된 수치해와 비교하였다. 그림 1은 수심 3000m에서 300m까지 변하는 수중 원형천퇴와 초기조건 및 수면변위 이력을 얻기 위해 설치한 wave gages의 위치를 보여주는 개념도이다.

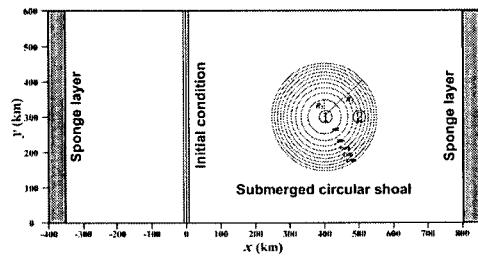


그림 1. 초기조건, 수면변위 측정위치 및 수중 원형천퇴에 대한 개념도

그림 2는 1, 2지점에서  $\Delta x=500\text{m}$ 의 격자를 이용한 FUNWAVE와 수심변화에 따라  $4500\text{m}$ 에서  $500\text{m}$ 의 다양한 요소간격을 이용한 유한요소모형에 의해 계산된 수면변위 이력을 비교한 것이다. 그림 2(a)는 수심  $300\text{m}$ 의 원형천퇴 정상부 1지점에서의 수면변위 이력을 나타낸 것으로  $4000\text{sec}$  이후에 도달하는 파가 FUNWAVE의 결과에 비해 약간의 위상차이를 보이는 경향이 있지만 FUNWAVE와 유사한 정도의 정확도를 주고 있다. 그림 2(b)는 수심  $1300\text{m}$ 의 원형천퇴 배후에 위치한 2지점에서의 수면변위 이력을 비교한 것이다. 두개의 서로 다른 파가 만나는 곳으로 천퇴 외부 깊은 수심상을 전파하다가 천퇴의 수심변화로 인해 굴절된 파가  $3500\text{sec}$  이후에 먼저 도달하고,  $5000\text{sec}$  이후에 천퇴 전면으로부터 정상부 1지점을 통과한 파와 합쳐지는 형상이 잘 재현되고 있다. 개발된 완변수심 분산보정 유한요소모형의 결과가 대체적으로  $500\text{m}$ 의 매우 작은 격자간격을 사용한 FUNWAVE 결과와 매우 잘 일치하고 있다.

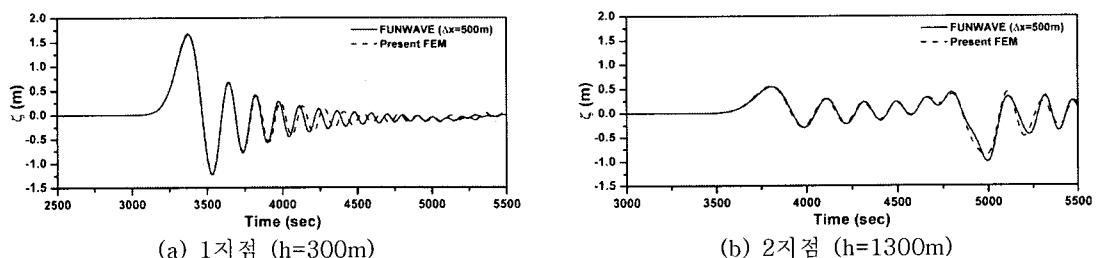


그림 2. 원형천토상을 전파하는 지진해일에 대해 1, 2지점에서 계산된 수면변위 이력 비교

## 5. 결 론

종래의 분산보정 유한요소모형은 요소크기를 조정하여 분산효과를 얻을 수는 있으나, 이 방법은 수심이 변하는 실제 해역에서 주어진 조건을 만족시키는 정확한 유한요소망의 생성이 어려워 현실적으로 적용이 거의 불가능한 실정이다. 이에 본 연구에서는 윤성범과 임채호(2005)의 등수심 분산보정 유한요소모형을 확장하여 수심이 변하는 경우에도 적용이 가능하도록 개선하고, 원변수심에 대해 평균 분산보정계수를 사용하는 분산보정 유한요소모형을 개발하였다. 이 수치모형은 수심이 완만히 변하는 해역을 전파하는 지진해일 수치모의시 임의로 구성된 유한요소망을 그대로 사용하면서도 복잡한 Boussinesq 방정식과 같은 정도의 물리적 분산효과를 고려할 수 있다. 또한 간단한 Boussinesq 형태의 파동방정식과 순수양해법을 사용하기 때문에  $2\Delta x$  파의 발생 가능성이 낮고 해를 신속하게 구할 수 있어 매우 효율적이다. 수심이 변하는 지형에서의 분산보정 능력을 검증하기 위해 수중 원형천퇴상을 전파하는 Gaussian 형상의 가상지진에 대해 수치모의를 수행하고, 그 결과를 FUNWAVE에 포함되어 있는 선형화된 Nwogu의 Boussinesq 방정식에 의해 계산된 수치해와 비교하였다. 그 결과 개발된 유한요소모형이 수심이 변하는 지형에서도 상당히 정확한 결과를 주고 있음이 검증되었다.

## 감 사 의 글

본 연구의 수행은 한국전력공사 전력연구원의 연구용역 ‘한반도 해안 지진해일 전산해석’의 지원으로 수행되었습니다.

## 참 고 문 헌

1. 윤성범, 임채호 (2005). 지진해일 전파 수치모의를 위한 2차원 유한요소모형의 능동적 분산보정기법. 한국해안·해양공학회지, 제17권, 제1호, pp. 1-8.
2. Imamura, F., Shuto, N. and Goto, C. (1988). Numerical simulation of the transoceanic propagation of tsunamis. Proc. of 6th Congress Asian and Pacific Regional Division, IAHR, Japan, 265-271.
3. Kirby, J. T., Wei, G., Chen, Q., Kennedy, A. B. and Dalrymple, R. A. (1998) *Fully nonlinear Boussinesq wave model*. User Manual. Rep. No. CACR-98-06, Univ. of Delaware.
4. Nwogu, O. (1993) Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation. *J. Waterw. Port Coast. Ocean Eng.*, ASCE, Vol. 119, No. 6, pp. 618-638.
5. Wei, G. and Kirby, J. T. (1995). A time-dependent numerical code for the extended Boussinesq equations. *J. Waterw. Port Coast. Ocean Eng.*, ASCE, Vol. 121, No. 5, pp. 251-261.
6. Yoon, S.B. and Liu, P.L.-F. (1992). Numerical simulation of a distant small-scale tsunami. Recent Advances in Marine Science and Technology, PACON92, Pacific Congress on Marine Science & Technology, Kona, Hawaii, 67-78.