Cut-cell 기법을 이용한 2차원 흐름의 수치해석

Numerical Analysis of Two-Dimensional Flow using Cut-cell method

김형준* , 김수진* *, 이승오*** , 조용식*** *
Hyung-Jun Kim, Sujin Kim, Seung Oh Lee, Yong-Sik Cho

요 지

수치해석분야에서 가장 난해한 부분은 복잡한 지형을 표현할 수 있는 격자망을 쉽고 간편하게 생성하고 수치모형에 적용하는 것이다. 가장 쉽고 널리 적용되던 직사각형격자망의 한계를 극복하기 위하여 곡선좌표계를 이용하거나, 삼각형 또는 사각형의 불규칙 격자망을 적용하여 복잡한 지형을 표현하는 연구들이 시도되었다. 그러나, 곡선좌표계를 이용하여 지배방정식을 변환하는 방법은 지배방정식이 매우 복잡하고 수치모형의 구성이 난해하며, 불규칙 격자망을 이용한 방법은 계산영역을 적절히 표현하는 격자망을 구성하기 위해서 상당한 노력과 시간이 소요되는 단점이 있다. 이에, 직사각형의 격자망과 비구조 격자망의 장단점을 보완하여 수치격자 구성이 간편하고 지형을 정확히 표현할 수 있는 기법에 대한 연구가 필요한 단계에 이르게 되었다. 본 연구에서는 직사각형 격자를 기본으로 지형을 따라 계산격자를 분할하는 기법인 cut-cell기법을 이용하여 계산격자망을 구성하고, 그 적용성을 검토하였다.

핵심용어: 유한체적법, 2차원 Saint-venant 방정식, Cut-cell 기법

1. 서 론

2차원 천수방정식은 조석 및 풍파와 같은 해수의 유동, 강우-유출에 의한 홍수범람, 댐붕괴문제, 천이부에서의 도수현상과 같은 하천의 흐름을 모의하는데 적용되고 있다. 천수방정식을 수치기법을 이용하여 모의하는 방법은 실험적 방법이 가진 단점을 보완하고 고효율의 결론을 도출하므로 매우 유용하다.

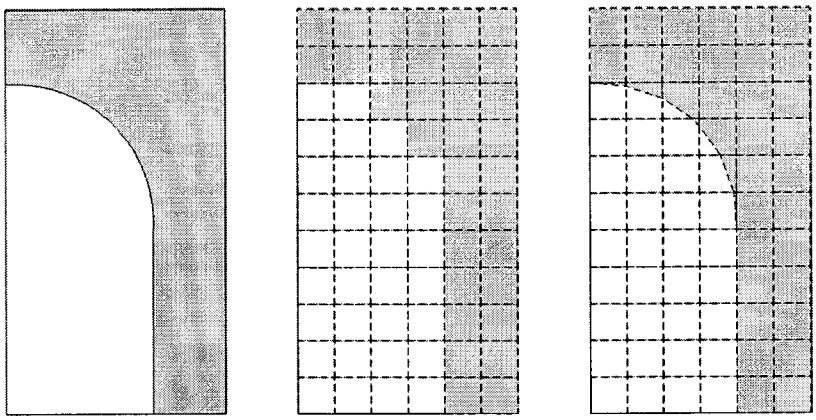
지배방정식인 2차원 천수방정식을 수치화하는 방법은 유한차분법, 유한요소법 및 유한체적법 등이 일반적으로 사용된다. 유한차분기법은 수치모형의 수립이 다른 모형에 비해 간단하고, 검증된 연구자료가 매우 풍부하다. 그러나, 직사각형의 계산격자를 이용하여 수치영역을 나타내므로, 복잡한 지형을 표현하기 어려우며 특정한 영역의 상세한 결과를 나타내기 위해서는 부가적인 기법을 적용해야하는 단점이 있다. 비구조격자를 이용하여 수치영역을 표현할 수 있는 유한요소법과 유한체적법은 복잡한 곡선형의 계산영역을 정확히 나타내고 물리적 성질이 급변하는 댐붕괴 문제 및 도수현상을 정확히 계산하는 장점을 지니고 있으나, 정확한 수치모의를 위한 격자망의 생성에 많은 시간이 소요되는 단점이 있다.

Cut-cell 기법은 모형의 적용성이 우수하고 수치격자의 구성이 간단한 수치모형을 구성하기 위하여 개발되었다. 직사각형의 수치격자를 기반으로 격자의 침윤여부를 판단하고 지형을 따라 격자를 분할하여 분균일격자망을 간단하게 생성하는 방법이다. Cut-cell 기법은 potential 흐름을 모

* 정회원 · 한양대학교 대학원 토목공학과 박사과정 · E-mail : john0705@hanyang.ac.kr
** 정회원 · 한양대학교 대학원 토목공학과 석사과정 · E-mail : greensjk@hanyang.ac.kr
*** 정회원 · 한양대학교 대학원 토목공학과 박사후과정 · E-mail : seungoglee.lee@gmail.com
**** 교신저자 · 정회원 · 한양대학교 대학원 토목공학과 부교수 · E-mail : ysc59@hanyang.ac.kr

의하기 위하여 개발되었으나, 이후 Euler방정식의 해법(Berger et al., 1989)과 천수방정식을 위한 수치격자의 생성(Causon et al., 2003)에 성공적으로 적용되었다.

본 연구에서는 직사각형 격자망을 기반으로한 cut-cell 기법을 설명하고, 수치격자에 적용할 유한체적기법에 대하여 서술하였다. 곡선형의 지형에 대한 cut-cell 격자망과 직사각형 격자망의 생성결과를 비교하여, cut-cell 기법의 정확성을 판단하였다.



(a) 흐름영역 (b) 사각형 격자 (c) Cut-cell 격자

그림 1. Cut-cell기법을 이용한 격자망

2. 수치기법

Cut-cell 기법을 이용하여 분할된 격자는 삼각형, 사각형 및 오각형 등의 다양한 형태를 지니게 되므로, 분할된 격자를 이용하여 유체의 흐름을 수치모의 하기 위해서는 유한체적법을 이용하여야 한다.

지배방정식인 비선형 천수방정식은 식(1)과 같이 보존형의 방정슥으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y}=\mathbf{S} \tag{1}$$

보존형 변수 벡터 U와 $x-$축 및 $y-$축 방향의 flux 벡터 E와 G 및 생성항 S는 각각 다음과 같다.

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix},\ \mathbf{E}=\begin{pmatrix} hu \\ hu^2+gh^2/2 \\ huv \end{pmatrix},\ \mathbf{E}=\begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2+gh^2/2 \end{pmatrix},\ \mathbf{S}=\begin{pmatrix} 0 \\ ghS_{ox}-ghS_{fx} \\ ghS_{oy}-ghS_{fy} \end{pmatrix} \tag{2}$$

식 (2)에서 h는 수심이며, u와 v는 각각 $x-$축 및 $y-$축 방향의 수심평균 유속을 나타낸다. 생성항에 포함된 S_o와 S_f는 각각 하상경사와 마찰경사를 나타내며, 마찰경사는 Manning 공식 또는 Chezy 공식을 이용하여 적용할 수 있다.

불규칙한 격자망에 대하여 식 (1)을 이산화하기 위하여 식 (3) 및 (4)과 같이 적분하여 유한체적법을 적용한다.

$$\frac{\partial}{\partial t}\oint_{A}\mathbf{U}dA+\oint_{\Omega}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}d\Omega+\oint_{\Omega}\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y}d\Omega=\oint_{\Omega}\mathbf{S}\,d\Omega \tag{3}$$

3. Cut-cell 기법

Cut-cell 격자망을 생성하기 위해서는 각 격자를 분할할 분할점의 위치 및 분할점의 진행방향을 알아야 한다. 지형의 형상 및 흐름 특성에 의하여 정의가 가능한 분할점은 진행방향에 따라 분할한 격자의 흐름 특성을 정의한다(그림 2). 분할점의 진행방향이 반시계방향이 경우, 원중심에 가까운 영역의 분할격자는 흐름특성을 가지는 격자(flow cell)가 되며 원호 외부의 격자는 흐름이 없는 상태의 격자(solid cell)로 정의된다. 분할점이 시계방향으로 진행하며 Cut-cell 격자망을 생성한다면, 원중심에 가까운 영역의 격자는 흐름이 없는 상태의 격자로 정의되며, 원호 외부의 격자는 흐름 격자로 정의된다.

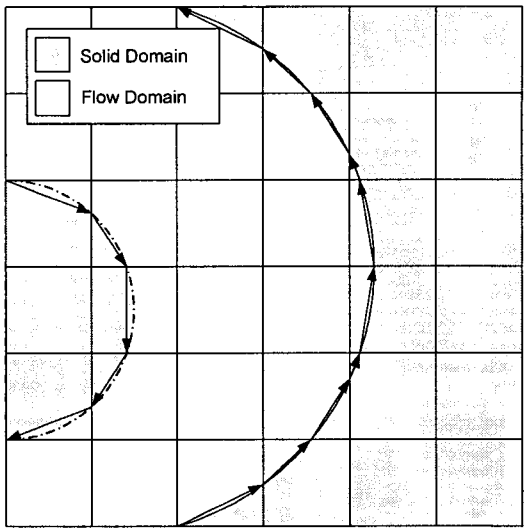


그림 2. Cut-cell 격자망의 분할

일반지형의 하천에서는 그림 2에서와 같이 분할점을 일일이 정의하는 것은 불가능하다. 이와 같은 단점을 해결하기 위하여 Ingram 등(2003)은 지형선을 하나의 ploy-line으로 나타낸 후, 각 지점의 사이에 위치한 분할점을 추적하여 cut-cell 격자망을 생성하는 방법을 제안하였다.

$$P_{i=}\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_j, y_j), \cdots, (x_n, y_n)\} \quad (1)$$

Poly-line P_i를 따라서 수치격자를 분할하기 위하여 (x_i, y_i)와 (x_{j+1}, y_{j+1})를 시점 (x_s, y_s)와 종점 (x_e, y_e)으로 하는 선분을 추적하고, 선분과 직사각형격자가 겹치는 부분인 분할격자점을 계산한다. 지형을 나타내는 poly-line P_i를 포함한 격자망의 번지수에 대입하기 위하여 식 (2), (3)과 같이 계산하여 시작점과 끝점의 격자망의 위치 (I_s, J_s)와 (I_e, J_e)를 계산한다. 여기서, (x_0, y_0)는 계산영역의 원점의 x 및 y좌표를 의미한다.

$$I_s = \mathrm{int}\left(\frac{x_s - x_o}{\Delta x}\right) + 1, \quad J_s = \mathrm{int}\left(\frac{y_s - y_o}{\Delta y}\right) + 1 \quad (2)$$

$$I_e = \mathrm{int}\left(\frac{x_e - x_o}{\Delta x}\right) + 1, \quad J_e = \mathrm{int}\left(\frac{y_e - y_o}{\Delta y}\right) + 1 \quad (3)$$

Cut-cell 격자망을 구성하기 위한 분할격자점의 위치 (x_a, y_a)등은 간단한 수식에 의하여 쉽게 결정할 수 있다. 격자분할은 시점과 종점의 위치에 따라서 총 48가지의 경우의 수가 발생한다. 분할된 격자망은 그 형태가 3각형에서부터 5각형의 형태를 이루게 된다. 수치기법에 cut-cell 격자망을 적용하기 위해서는 분할된 격자망 내의 유체가 거동하는지의 여부에 따라서 격자망을 구분하여야 한다.

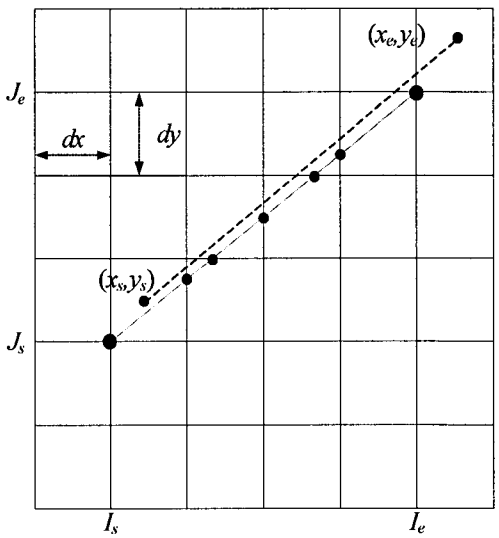


그림 3. 분할점의 추출

4. Cut-cell 격자 생성

Cut-cell 기법을 이용하여 생성한 격자망의 정확성을 알아보기 위하여, 그림 4에 나타낸 바와 같은 곡선수로에서의 직사각형격자와 cut-cell 격자의 생성결과를 비교하였다.

한변의 길이가 $100m$인 정사각형의 영역에서 내부의 반경이 $50m$이고 외부의 반경이 $90m$인 원형의 곡선수로에 대하여 수치격자를 생성하였다. 직사각형의 격자는 $\Delta x = \Delta y = 10m$로 하여, $NI \times NJ = 10 \times 10$의 균일 격자를 생성하였다. 균일하게 생성된 직사각형의 격자를 기반으로 하고, 추출된 분할점을 이용하여 cut-cell 격자망을 생성하였다.

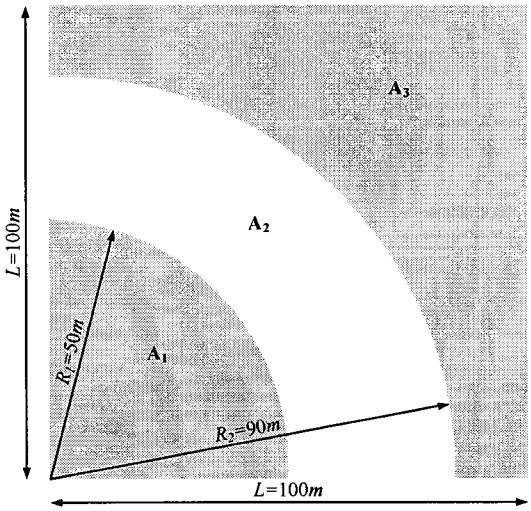
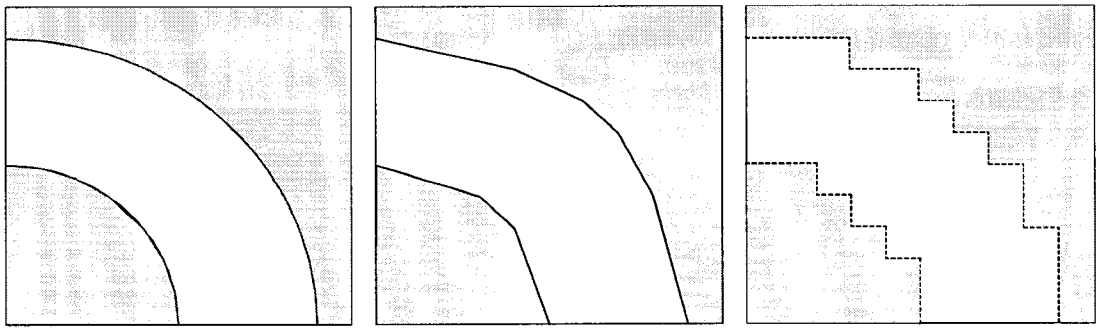


그림 4. 곡선수로

직교격자망과 원호가 교차하는 지점의 정보를 추출하여 분할점을 추출한 경우(CUT_1)와 직교격자망과의 교차점 일부를 추출하여 Ingram 등(2003)이 제시한 방법을 이용하여 cut-cell격자망을 구성한 경우(CUT_2)를 직교격자망의 구성결과를 형태(그림 6. 참고)와 각 영역의 면적을 계산(표 1. 참고)하여 비교하였다.



(a) CUT_1 (b) CUT_2 (c) Cartesian

그림 5. 격자망 구성 결과

표 1. 각 계산영역의 면적 비교

	A_1	A_2	A_3
CUT_1	$1946.31m^2$	$4403.09m^2$	$3650.60m^2$
CUT_2	$1850.00m^2$	$4150.00m^2$	$4000.00m^2$
Cartesian	$2000.00m^2$	$4400.00m^2$	$3600.00m^2$
Analytical	$1963.50m^2$	$4398.22m^2$	$3638.28m^2$

5. 결 론

직사각형 격자망의 단점을 보완함과 동시에 정확한 지형정보를 신속하고 간편하게 표현할 수 있는 cut-cell 기법을 이용하여 수치격자를 생성하였다. 곡선수로에 대하여 2가지 cut-cell격자를 생성하고 직사각형격자와 형태 및 계산영역의 면적을 비교하였다.

모든 분할점의 정보를 취득하여 생성한 cut-cell 격자망(CUT_1)은 계산영역을 매우 정확히 표현할 수 있는 것으로 나타났다. 제한된 분할점을 이용하여 미지의 분할점을 추출하여 구성한 격자망(CUT_2)은 각 영역의 면적에서 약간의 오차를 보이지만, 계산영역의 형태는 직교좌표계를 이요하여 구성한 격자망보다 우수한 결과를 나타내었다.

본 연구에서 구성한 cut-cell 격자망 유한체적기법을 이용한 수치모형과 연계하여 유체거동을 모의한다면, 지형의 형태를 정확하고 신속히 반영한 격자망을 이용한 수치모형이 구축될 것이다.

감 사 의 글

본 연구는 한국학술진흥재단(KRF 2006-311-D00887)의 지원에 의해서 수행되었습니다.

참 고 문 헌

1. Berger, M., LeVeque, R. (1989), An Adaptive Cartesian Mesh Algorithm for the Euler Equations in Arbitrary Geometries, *AIAA paper, 89-1930-CP.*
2. Causon D., Ingram D., Mingham C., Yang G., Pearson R. (2000), Calculation of shallow water flows using a Cartesian cut cell approach, *Adv. Water Resour.* Vol. 23, pp.545-562.
3. Ingram, D.M., Causon, D.M., Mingham C.G. (2003), Developments in Cartesian cut cell methods, *Mathematics and Computers in Simulation* Vol. 61, pp. 561-572