Riemann 근사해법을 이용한 수리해석모형의 비교 연구

Comparative Study of Hydraulic Analysis Models Using Riemann Approximate Solver

김지성*, 한건연**, 안기홍***

Ji Sung Kim, Kun Yeun Han, Ki Hong Ahn

요 지

댐·제방 붕괴파는 갑작스러운 유량의 증가가 발생하여 불연속적인 흐름특성을 가지는 충격파(shock wave)가 전파되며, 갈수기·저수기에는 중소하천의 상류, 여울과 소에서의 흐름 또는 낙차공이나 보, 댐 여수로 등의 수공구조물에서 부분적인 사류 흐름이 발생된다. 이 때 흐름은 한계수위를 통과하게 되므로 기존 수치해법의 적용에 어려움이 존재한다. 본 연구에서는 실제하천에 적용될 수 있는 1차원 HLL, Roe Riemann 근사해법들을 간단히 소개하고, 시간공간적으로 2차의 고정확도 기법으로 확장하는 방법에 대하여 소개하였다. 각 기법을 정확해가 존재하는 댐붕괴 및 마른하도 전파의 경우에 적용하여 각 기법의 적용성 및 정확성을 비교하였다. 그리고 기존 Lax-Friedrichs 기법과 Lax-Wendroff 기법의 적용결과를 비교하였다. 적용결과 Lax-Friedrichs 기법을 제외한 모든 기법이 정확해와 잘 일치하였으며 특히 HLL 기법을 2차 정확도로 확장한 WAF 기법이 가장 높은 정확도로 계산되었다. 그러나 비선형 생성항이 존재하는 실제하천에 있어서 MUSCL 기법을 이용한 2차 정확도 기법이 합리적일 것으로 판단된다.

핵심용어 : Riemann 해법, 유한체적기법, 댐붕괴, 마른하도

1. 서 론

하천에서 부정류를 포함한 모든 흐름의 문제를 해결하기 위해서 일반적으로 적용되고 있는 Preissmann 기법의 1차원 유한차분모형은 실제 자연조건에서 비교적 합리적인 계산결과를 제공하고는 있으나, 상류-사류의 천이류 구간, 급변 부정류의 선단부 해석, 수공구조물 주변에서의 해석 등에 있어서는 수치적인 불안정성을 나타내고 있다. 따라서 하천에서의 흐름현상에 대한 정확한 해석과 이에 연관된 이송-확산 해석, 하상변동예측 등 종합적인 수자원 관리 측면에서 보다 정교한 동역학적 수리해석 모형이 요구되고 있는 상황이다.

1990년대 후반에 공기동역학 분야의 국외 연구자들은 불연속적인 흐름해석을 위하여 Riemann 근사해법을 이용하여 확장한 새로운 수치해석기법들을 개발하였고, 개발된 기법을 수리 분야에 적용한 연구들은 수면의 급구배나 불연속 흐름에서조차 정확하고 안정된 해를 제공하였다. 그러나, 대부분의 연구가 하상경사가 수평이고 균일한 직사각형 단면에서만 수치실험 되었으며, 복잡한 자연하천 단면에 이러한 기법들이 적용되었을 때, 여전히 수치해석의 어려움을 극복해야할 필요성이 있다. 이러한 어려움 때문에 이미 개발된 다양한 흐름율 계산 기법 중에서 단지 몇 가지 기법만이 실제 하천에 적용될 수 있다.

본 연구에서는 실제하천에 적용될 수 있는 Riemann 근사해법들을 간단히 소개하고, 정확해가 존재하는 댐붕괴 및 마른하도 전파의 경우에 적용하여 각 기법의 적용성 및 정확성을 비교하였다. 또한 개발된 기법을 2차 정확도 이상의 고정확도 기법으로 확장하는 방법에 대하여 소개하고 적용 결과를 비교 분석하였다.

*정회원·한국건설기술연구원 수자원연구부 Post-Doctor·E-mail : jisungk@kict.re.kr
**정회원·경북대학교 공과대학 토목공학과 교수 E-mail : kshanj@knu.ac.kr
***정회원·경북대학교 공과대학 토목공학과 박사과정 E-mail : khahnew@empal.com

2. 지배방정식

본 연구의 지배방정식인 Saint-Venant 방정식을 벡터 형태로 나타내면 Eq. (1)과 같다.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = S(U) \tag{1}$$

여기서, 흐름 변수(U)와 흐름율(F), 그리고 생성항(S)은 Eq. (2)와 같다.

$$U=\begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix} \qquad F(U)=\begin{bmatrix} Q \\ Q^2/A + gI_1 \end{bmatrix} \qquad S(U)=\begin{bmatrix} 0 \\ gI_2 + gA(S_0 - S_f) \end{bmatrix} \tag{2}$$

여기서 A는 흐름단면적, Q는 유량, g는 중력가속도이고, I_1, I_2는 각각 단면에서의 정수압력과 단면변화로 인하여 생성된 측면 정수압력을 나타낸다. S_0, S_f는 중력을 고려하기 위한 하상경사와 마찰력을 설명하기 위한 마찰경사로 경험공식인 Manning 식으로부터 계산될 수 있으며, 다음 Eq. (3a)~(3d)에 보인 바와 같다.

$$I_1 = \int_0^{h(x)} [h(x)-\zeta]\,\sigma(x,\zeta)\,d\zeta \tag{3a}$$

$$I_2 = \int_0^{h(x)} (h-\zeta)\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right]_{h=h_0} d\zeta \tag{3b}$$

$$S_0 = -\frac{\partial z}{\partial x} \tag{3c}$$

$$S_f = \frac{n^2 Q|Q|}{R^{4/3}A} \tag{3d}$$

여기서, h는 수심이고, σ는 수심 ζ일 때의 수면폭이며, z는 하상표고를 의미한다.

3. Riemann 근사해법

3.1 HLL Riemann 근사해법

HLL 해법은 Harten(1983)에 의해서 개발된 1차 정확도의 기법으로 흐름율은 Eq. (4)와 같다.

$$F^{HLL}_{i+1/2} = \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_L S_R (U_R - U_L)}{S_R - S_L} \tag{4}$$

여기서, S_L과 S_R은 각각 쌍곡선형의 편미분방정식에서 정의되는 두 특성속도를 의미한다.

3.2 Roe Riemann 근사해법

Roe Riemann 근사해법은 수공학 분야에서 가장 많이 사용되고 있는 1차 정확도의 Riemann 근사해법이다. Roe 근사해법은 Eq. (1)의 비선형 연립방정식을 Jacobian을 이용하여 선형화 하는 것으로부터 시작된다. Roe 근사해법에 의한 흐름율은 Eq. (5)와 같다.

$$F^{Roe}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(F_L + F_R) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} \tilde{\alpha}^k |\tilde{\lambda}^k| \tilde{r}^k \tag{5}$$

여기서 λ는 Jacobian의 고유치이고, r은 고유벡터의 행요소이며, $\widetilde{\alpha}^k$는 k번 파의 계수(wave strength)이다.

Roe의 근사해법은 팽창파 영역 내부에 격자의 경계면이 속하는 경우, 즉 경계면에서 한계류 조건이 발생하는 경우 비선형의 팽창파 영역을 하나의 선형 특성선으로 고려함으로 인하여 발생하는 엔트로피를 위배하는 해가 계산된다. 따라서 Harten과 Hyman(1983)은 어떠한 특성속도도 0에 가까이 있을 수 없도록 Eq. (6)의 $|\tilde{\lambda}|$ 값을 교정하는 방정식을 다음과 같이 제안하였다.

$$|\tilde{\lambda}| = \begin{cases} |\tilde{\lambda}| & \text{if } |\tilde{\lambda}| \geq \varepsilon \\ \dfrac{\tilde{\lambda}^2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon} & \text{if } |\tilde{\lambda}| < \varepsilon \end{cases} \tag{6}$$

여기서 ε은 매우 작은 양의 값이다.

3.3 2차 정확도를 위한 기법의 확장

Godunov 유형의 수치해법에서 1차 정확도 기법을 2차 정확도의 기법으로 확장하기 위해서는 Riemann 근사해법을 이용하여 계산된 흐름율을 2차 정확도로 수정하는 방법이 사용된다. 이를 위하여 2차 정확도를 가지는 Lax-Wendroff 기법에 Riemann 근사해법을 이용하여 확장하는 방법을 이용하거나, WAF 기법이나, MUSCL 기법을 이용하게 된다. 2차 정확도의 수치해는 매우 정확한 해를 제공하지만 불연속 지점에서 수치진동이 발생된다. 이러한 수치진동을 제거하기 위하여 TVD 기법이 적용된다.

① Roe 기법의 Lax-Wendroff 확장

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2}\sum \alpha_k |\lambda_k| r_k + \frac{1}{2}\sum \alpha_k |\lambda_k| \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}|\lambda_k|\right) r_k \tag{7}$$

② HLL 기법의 WAF 기법

$$F^{WAF}_{i+1/2} = \sum_{k=1}^{3} W_k F^k_{i+1/2} \tag{8}$$

③ MUSCL 기법

$$F^{MUSCL}_{i+1/2} = F(U^{L*}_{i+1/2}, U^{R*}_{i+1/2}) \tag{9}$$

④ 총변동량 제어 기법(TVD)

- 전처리 기법 : 다양한 수치기법을 통하여 흐름율을 계산하기 이전에 수치진동을 제어하기 위하여 자료를 재구성하는 기법으로 MUSCL 기법의 경우에 해당되며 전처리에 사용되는 TVD 제한자를 경사 제한자(slope limiter)로 부른다.
- 후처리 기법 : 계산 과정 중에서 수치진동이 발생할 수 있는 지점에 1차 정확도의 흐름율이 사용된다면 수치진동을 제어할 수 있다. WAF 기법이 후처리 기법에 해당되며, 이러한 TVD 제한자를 흐름율 제한자(flux limiter)로 부른다.

본 연구에 설명된 각 기법에 관한 유도과정과 다양한 TVD 제한자들은 Toro(2001), LeVeque(1992)에 상세히 설명되어 있다.

4. 댐 붕괴 및 마른 하도의 적용

각 흐름율 계산기법의 수치적 적용성을 비교하기 위하여 Table 1과 같이 2가지의 경우를 살펴보았다 (Toro, 2001). 모든 경우에서, 하도 길이는 50m이고 직사각형 단면으로 구성된 직선 수평 하도이며, 초기조건으로 댐 붕괴 조건과 같이 불연속 수위/유속 조건으로 구성되고, Toro(2001)에 의해 제안된 방법으로 정확해를 계산하였다.

Table 1. Cases for Numerical Experiment

Test	$h_L(m)$	$u_L(m/s)$	$h_R(m)$	$u_R(m/s)$	$x_0(m)$	$t_{out}(s)$
1	1.0	2.5	0.1	0.0	10.0	7.0
2	0.0	0.0	1.0	0.0	30.0	4.0

여기서, h는 수위, u는 유속, x_0는 초기 불연속수위 지점이고, t_{out}은 계산된 결과의 출력 시점이다. 5가지 경우의 수치실험을 위하여 계산거리 간격은 $0.1\,m$ 로 100개의 격자를 사용하였으며, 각 흐름율 계산 기법을 적용한 수치실험의 결과를 Fig. 1~2에 나타내었다. 고정확도 계산에서 수치진동을 제어하기 위하여 모든 경우에 동일하게 *minmod* 제한자를 사용하였다.

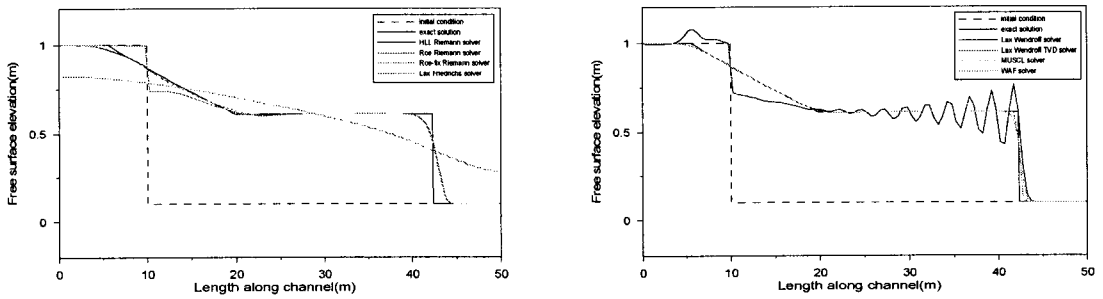

Fig. 1. Water Depth Profiles of Test 1

Test 1은 오른쪽 방향을 전파되는 강한 충격파와 초기 불연속지점에서 한계류 조건이 존재하는 예제이다. 해석결과, Lax-Friedrichs 기법은 수치감쇠가 매우 커서 단파의 위치 및 크기를 정확히 해석할 수 없으며, Roe Riemann 해법은 엔트로피의 보정이 없다면 팽창파 영역 내 한계류 발생지점에서 비물리적인 해를 나타내게 된다. 2차 정확도의 Lax-Wendroff 기법의 경우, 불연속적인 지점에서 수치진동이 발생하고 있음을 알 수 있으며, 이는 2차 정확도 이상의 기법에서 일반적으로 나타나는 현상이다. 이러한 수치진동을 제어하기 위하여 Lax-Wendroff 기법, MUSCL 기법, WAF 기법에는 TVD 조건을 적용하였고, 정확해와 거의 일치함을 확인할 수 있다.

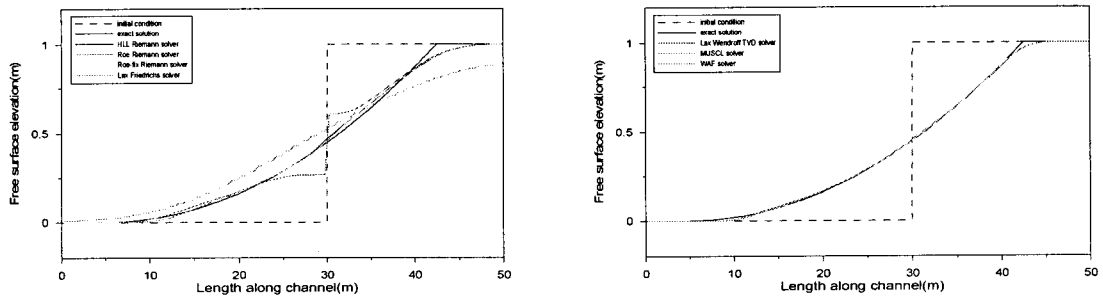

Fig. 2. Water Depth Profiles of Test 2

Test 2는 개발된 수치모형이 마른 하도로의 전파를 해석할 수 있는가를 평가하기 위함이다. 마른하도로 전파되는 파를 해석함에 있어서 발생할 수 있는 수치적 어려움은 파의 선단에서 발생된다. 그 중 하나는 정확한 파의 전파 속도이고, 나머지 하나는 수치해석상에서 불가피하게 발생될 수밖에 없는 선단 유속의 불연속으로, 불연속은 수치진동을 유발할 수 있다. Lax-Friedrichs 기법은 여전히 수치감쇠가 크게 나타났으며, Roe Riemann 해법은 엔트로피의 보정이 없다면 팽창파 영역 내 한계류 발생지점에서 비물리적인 해를 나타내게 된다. 엔트로피 보정 후의 Roe Riemann 해법과 HLL 기법은 거의 같은 해석결과를 나타내고 있으며, 마른하도로 진행하는 파에 의한 수심 증가부가 후퇴되는 파에 의한 수심 감소부보다 정확해와 잘 일치되는 결과를 보이고 있다. 2차 정확도의 Lax-Wendroff 기법의 경우 해가 발산하였으며, Roe 기법과 HLL 기법을 2차 정확도로 확장한 Lax-Wendroff, MUSCL, WAF 기법은 마른하도의 적용에서도 정확해와 잘 일치되는 결과를 보이고 있다.

5. 결 론

1차 및 2차 정확도의 Riemann 기법을 이용한 댐 붕괴파 및 마른하도 전파의 수치실험으로부터 얻은 결론은 다음과 같다.

1. Roe Riemann 기법은 엔트로피를 보정하지 않는다면 한계류가 발생할 수 있는 팽창파 영역에서 비물리적인 결과를 나타내게 되며, 이는 Roe Riemann 기법이 비선형인 흐름율을 선형화함에 의해 한계류 영역을 정확히 반영하지 못하기 때문이다.
2. 1차 정확도의 HLL 기법과 엔트로피 보정 후 Roe 기법은 수심이 급격히 변하는 지점에서 계산된 수면형의 감쇠가 나타나지만 전반적으로 정확해와 잘 일치하는 결과를 보임으로서 불연속흐름에 Riemann 해법의 적용성을 확인할 수 있다.
3. Roe 기법과 HLL 기법을 2차 정확도로 확장한 Lax-Wendroff, MUSCL, WAF 기법의 경우, 전반적으로 매우 높은 정확도를 나타내고 있으며, HLL 기법을 2차 정확도로 확장한 WAF 기법은 가장 높은 정확도로 계산됨을 알 수 있다.
4. WAF 기법은 흐름율의 계산에 비선형항의 가중평균을 포함하고 있으므로 흐름율과 균형을 맞출 수 있는 비선형 생성항 계산이 필요하다. 따라서, 생성항을 포함한 실제하천의 적용을 위해서는 HLL 기법을 2차 정확도로 확장한 MUSCL 기법이 정확도와 적용성에서 합리적일 것으로 판단된다.

감 사 의 글

이 연구는 소방방재청 자연재해저감기술개발사업(과제명:내배수 침수재해 저감기술개발) 연구비 지원으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. Harten, A. (1983). "High resolution schemes for hyperbolic conservation laws." *Journal of Computational Physics*, Vol. 49, No.3, pp. 357-393.
2. Harten, A. and Hyman, J.M. (1983). "Self-adjointing grid method for one-dimensional hyperbolic conservation laws." *Journal of Computational Physics*, Vol. 50, pp. 235-269.
3. Leveque, R.J. (1992). "Numerical methods for conservation laws." Birkhauser Verlag.
4. Toro, E.F. (2001). "Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows." John Wiley & Sons.