창함수 설계 기법을 이용한 FIR 디지털 필터의 성능 향상에 관한 연구

이 경 효* · 배 상 범* · 김 남 호*

*부경대학교 공과대학 전기제어공학부

A Study on an Performance Improvement of FIR Digital Filter using Window Function Design Method

Kyung-Hyo Lee* · Sang-Bum Bae* · Nam-Ho Kim*

*School of Electrical and Control Eng., Pukyong National Univ.

E-mail : nhk@pknu.ac.kr

요 약

현대 사회에서 디지털 처리 기술은 다양한 분야에서 응용되고 있다. 대표적으로 음성 및 영상 처리에 관한 신호 처리 기술을 들 수 있으며, 이러한 신호 처리를 위한 필터는 크게 FIR 필터와 IIR 필터로 나눌 수 있다. FIR 필터는 IIR 필터에 비해 높은 차수로써 구현이 되어지는 단점이 있으나, 안정적이며 구현하기에 용이하다는 장점을 가진다. 또한 선형 위상 응답 특성을 가지고 있어, 파형 정보 특성이 중요시되는 곳에 사용되어지고 있다. FIR 필터 구현에 있어 주요한 문제점은 깁스현상을 최소화시키는 것이다. 따라서 본 논문에서는 변형된 창함수를 이용한 FIR 디지털 필터를 사용하여 기존에 제시된 방법과 비교하였다.

ABSTRACT

In recent years, digital processing techniques have been applied diversity of fields. Typical signal processing techniques are speech processing and image processing. And filters for the signal processing can be divided in FIR (finite impulse response) filter and IIR (infinite impulse response) filter. Compared with IIR filter, the FIR Filter has a defect of high-degree, but has a merit of stability and uses simply. Futhermore, FIR filter also has linear phase response characteristics, it is using in fields regarding wave information importantly. To FIR Filter design, the main issue is to remove the Gibbs phenomenon. Therefore, in this paper I was proposed a method using FIR digital filter applied a modified window function and the method was compared with conventional methods.

키워드

signal processing, FIR digital filter, Gibbs phenomenon, window function

Ⅰ. 서 론

현대 사회에서 디지털 처리 기술은 다양한 분야에서 응용되고 있다. 대표적으로 음성 및 영상 처리에 관한 신호 처리 기술을 들 수 있으며, 이러한 신호 처리를 위한 필터는 크게 FIR (finite impulse response) 필터와 IIR (infinite impulse response) 필터로 나누어진다[1].

IIR 필터는 무한구간 임펄스 응답을 나타내며, 이러한 임펄스 응답들 중 일부는 유리계수 시스템 함수 또는 이와 동등한 차분 방정식에 의해서 구성된다. 이러한 필터들은 자기 회귀적 이동 평균 또는 재귀적 필터라고 한다. IIR 필터는 낮은 차수로 우수한 진폭특성을 얻을 수 있으나, 비선형위상응답 특성을 나타내며, 안정성을 보장할 수 없다. 이에 반해, FIR 필터는 동일한 진폭특성을 얻기 위해, IIR 필터와 비교하여 높은 차수로써 구현되는 단점이 있으나, 안정적이며 구현하기에 용이하다는 장점을 가진다. 또한 선형위상응답 특성을 나타내므로, 파형 정보 특성이 중요시되는 분야에 사용되고 있다.

FIR 필터의 설계 기법에는 창함수를 이용한 설계 기법을 비롯하여, 주파수 표본화를 통한 설계 및 최적 등리플 설계 기법들이 존재한다. 그 중, 창함수 설계 기법은 이상적인 필터의 무한 임펄스 응답을 유한 임펄스 응답으로 근사화하는 가

장 간단한 방법으로서, 계수절단에 의해 불연속점에서 발생하는 깁스현상 (Gibbs phenomenon)을 감소시킨다.

본 논문에서는 창함수 설계 기법을 이용하여 FIR 디지털 필터의 성능을 향상시키기 위해, 새로운 창함수 모델을 제시하였다. 그리고 제안한 창함수 모델의 성능을 평가하기 위해, 기존의 창함수에 의해 설계된 디지털 필터와 비교하였으며, 이때 판단기준으로 최대부엽의 크기와 천이특성을 사용하였다.

II. 디지털 필터

일반적으로 선형시불변시스템에서 IIR 필터의 시스템 함수는 다음의 식 (1)과 같이 정의된다[2].

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{\sum_{n=0}^{M} b_n z^{-n}}{\sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n}} \qquad (1)$$

$$=\frac{b_0+b_1 z^{-1}+\cdots+b_M z^{-M}}{a_0+a_1 z^{-1}+\cdots+a_N z^{-N}}$$

식으로부터, b_n과 a_n는 필터의 계수를 나타내며, $a_0=1$이다. 그리고 만약 $a_n \neq 0$라면 IIR 필터의 차수는 N이 되며, 이때 IIR 필터의 차분방정식 표현은 식 (2)와 같다.

$$y(n)=\sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m)-\sum_{m=1}^{N} a_m y(n-m) \qquad (2)$$

여기서, $x(n)$은 시스템의 입력이며, $y(n)$은 출력을 나타낸다. 또한, FIR 필터는 아래의 식 (3)과 같이, 위의 식 (1)에서 $a_n=0$로 가정함으로서 얻을 수 있다.

$$H(z)=b_0+b_1 z^{-1}+\cdots+b_{M-1} z^{1-M}$$

$$=\sum_{n=0}^{M-1} b_n z^{-n} \qquad (3)$$

이에 따라, 임펄스 응답 $h(n)$은 식 (4)와 같이 표현되며, 차분방정식 표현은 식 (5)와 같다.

$$h(n)=\begin{cases} b_n, & 0\le n\le M-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (4)$$

$$y(n)=b_0 x(n)+b_1 x(n-1)+\cdots$$

$$+b_{M-1} x(n-M+1) \qquad (5)$$

많은 응용 분야에서 주파수 선택적 연산을 실행을 실행하기 위해, 디지털 필터를 사용한다. 이때 필터의 크기와 위상 응답과 같은 주파수 영역에서의 사양이 요구되며, 일반적으로 통과대역에서는 선형위상응답 특성을 가져야 한다. 시스템의 주파수 응답 $H(e^{j\omega})$은 크기응답 $|H(e^{j\omega})|$와 위상응답 $\angle H(e^{j\omega})$을 이용하여 다음의 식 (6)과 같이 표현된다.

$$H(e^{j\omega})=|H(e^{j\omega})|\,\angle H(e^{j\omega}) \qquad (6)$$

이때 FIR 디지털 필터가 선형위상응답 특성을 갖기 위해서는 식 (7)과 같이, $\angle H(e^{j\omega})$가 ω에 대해서 선형인 조건이 필요하다.

$$\angle H(e^{j\omega})=-\tau_p\,\omega, \qquad -\pi<\omega\le\pi \qquad (7)$$

여기서, τ_p는 고정 위상 지연이며, 이러한 특성을 실현하기 위해서는 식 (8)과 같이 임펄스 응답이 시간축 상의 중심에 대해 우대칭이어야 한다.

$$h(n)=h(M-1-n), \qquad 0\le n\le M-1 \qquad (8)$$

또한, FIR 디지털 필터에서 τ_p가 고정 위상 지연은 아니지만, 일정한 군지연 특성을 갖기 위해서는 식 (9)와 같은 조건이 요구된다.

$$\frac{d\angle H(e^{j\omega})}{d\omega}=-\tau_g, \qquad -\pi<\omega\le\pi \qquad (9)$$

식으로부터, τ_g는 고정 군지연이며, 이러한 형태의 선형위상응답 특성을 위해 식 (10)과 같이 임펄스 응답이 기대칭이어야 한다.

$$h(n)=-h(M-1-n), \quad 0\le n\le M-1 \qquad (10)$$

이와 같이, 우대칭 또는 기대칭을 이루는 모든 경우에 대해서 대칭의 중심지점은 $(M-1)/2$이다.

III. 창함수 설계 기법을 이용한 FIR 필터

이상적인 주파수 선택적 필터의 응답은 통과대역에서의 이득의 크기가 1이며, 선형위상응답 특성을 갖고, 저지대역에서의 응답은 0이다. 이러한 필터에서, 대역폭이 $\omega_c<\pi$인 이상적 저역통과 필터는 식 (11)과 같이 표현된다.

$$H_d(e^{jw})=\begin{cases} 1\cdot e^{-j\alpha\omega}, & |\omega|\le\omega_c \\ 0, & \omega_c<|\omega|\le\pi \end{cases} \qquad (11)$$

여기서, α는 표본 지연을 나타내며, ω_c는 차단주파

수를 의미한다. 그러나 식 (11)과 같이 표현되는 필터는 식 (12)와 같이 무한개의 임펄스 응답으로 구성되어 있다.

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)} \tag{12}$$

따라서, 인과성을 만족시키는 유한차수의 임펄스 응답을 얻기 위해, 필터 계수에 대한 절단이 필요하다. 그러나 이러한 계수 절단에 의해, 주파수 특성상 불연속점 부근에서 깁스현상이 발생한다. 이와 같은 깁스현상은 창함수 $w(n)$을 적용하여 완화할 수 있으며, 창함수 연산이 수행된 후의 임펄스 응답 $h_w(n)$을 식 (13)과 같이 정의한다[3].

$$h_w(n) = h_d(n)\, w(n) \tag{13}$$

그리고 주파수 영역에서 인과적 FIR 디지털 필터의 응답 $H_w(e^{j\omega})$는 식 (14)와 같이, 이상적인 필터의 주파수 응답 $H_d(e^{j\omega})$와 창함수의 주파수 응답 $W(e^{j\omega})$의 주기적 컨벌루션으로 표현된다.

$$H_w(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \circledast W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} W(e^{j\phi})\, H(e^{j(\omega-\phi)})\, d\phi \tag{14}$$

위의 식 (14)에 상응하는 FIR 디지털 필터의 전달함수는 식 (15)와 같이, $w(n)$과 $h(n)$의 곱으로부터 얻어진다.

$$H_w(z) = \sum_{n=0}^{M} \left(h_d(n)\, w(n)\right) z^{-n} \tag{15}$$

또한 영상처리를 위해, 필터의 전달함수는 식 (16)과 같이 2차원으로 확장된다.

$$H_w(z_u, z_v) = \sum_{u=0}^{M} (h(u)\, w(u))\, z^{-u} \sum_{v=0}^{N} (h(v)\, w(v))\, z^{-v} \tag{16}$$

현재, 가장 보편적으로 사용되고 있는 창함수들은 아래의 식들과 같이 표현된다.

$$w_{hn}(n) = \begin{cases} 0.5 + 0.5\cos\left(\dfrac{2\pi n}{M}\right), & -\dfrac{M}{2} \le n \le \dfrac{M}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{17}$$

$$w_{hm}(n) = \begin{cases} 0.54 + 0.46\cos\left(\dfrac{2\pi n}{M}\right), & -\dfrac{M}{2} \le n \le \dfrac{M}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{18}$$

$$w_{bl}(n) = \begin{cases} 0.42 + 0.5\cos\left(\dfrac{2\pi n}{M}\right) + 0.08\cos\left(\dfrac{4\pi n}{M}\right), & -\dfrac{M}{2} \le n \le \dfrac{M}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{19}$$

위의 식으로부터, $w_{hn}(n)$은 Hanning, $w_{hm}(n)$은 Hamming, 그리고 $w_{bl}(n)$은 Blackman window를 나타낸다.

주파수 영역에서 표현되는 창함수의 주엽폭은 천이대역폭을 결정하며, 최대부엽의 크기는 통과대역과 저지대역에서 리플의 크기를 결정한다. 따라서 주엽폭과 최대부엽의 크기를 최소화하는 형태의 창함수가 설계되어야 하며, 본 논문에서는 아래의 두 식과 같은 변형된 창함수 모델을 제안하였다.

$$w_{p1}[n] = \begin{cases} 0.587 + 0.428\cos\left(\dfrac{2\pi n}{M}\right) - 0.022\cos\left(\dfrac{4\pi n}{M}\right) + 0.007\cos\left(\dfrac{6\pi n}{M}\right), & -\dfrac{M}{2} \le n \le \dfrac{M}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{20}$$

$$w_{p1}[n] = \begin{cases} 0.584 + 0.430\cos\left(\dfrac{2\pi n}{M}\right) - 0.023\cos\left(\dfrac{4\pi n}{M}\right) + 0.009\cos\left(\dfrac{6\pi n}{M}\right), & -\dfrac{M}{2} \le n \le \dfrac{M}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{21}$$

Ⅳ. 시뮬레이션 결과

본 논문에서는 창함수 설계 기법을 이용하여 FIR 디지털 필터의 성능을 향상시키기 위해, 새로운 창함수 모델을 제시하였다. 그리고 제안한 창함수 모델의 성능을 평가하기 위해, 기존의 창함수에 의해 설계된 디지털 필터와 비교하였다. 이때 성능평가의 기준으로 천이대역폭과 최대부엽의 크기특성을 사용하였으며, 차수 $M=48$과 차단주파수 $\omega_c=0.2$인 저역통과필터를 설계하였다.

그림 1은 각 창함수에 의해 설계된 저역통과필터의 특성을 비교한 것이다. 그림 1(a)는 기존의 창함수와 본 논문에서 제안한 창함수 모델의 모양을 나타낸 것이다. 그리고 그림 1(b)는 각 창함수의 특성을 비교하기 위해, 차수 $M=48$과 차단주파수 $\omega_c=0.2$인 저역통과필터를 설계하여 주파수특성을 시뮬레이션한 것이다. 또한 그림 1(c)는 저역통과필터에 대한 최대부엽의 크기특성을 분석하기 위해, 그림 1(b)의 일부를 확대한 것이다.

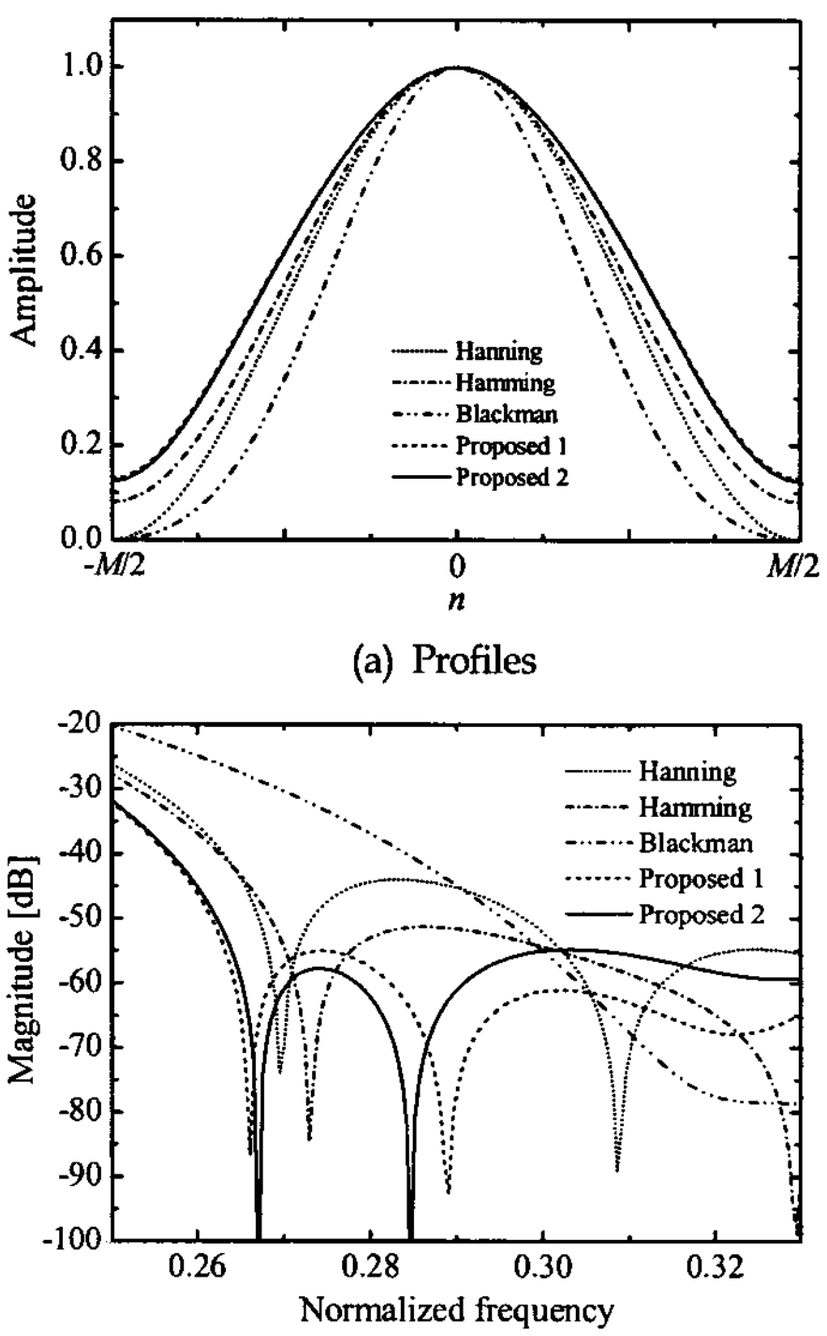

Fig. 1. Lowpass filter designed by each window function.

그리고 그림 1(d)는 각 창함수에 의해 설계된 FIR 디지털 필터의 위상응답 특성을 보이고 있다.

표 1은 창함수에 의해 설계된 저역통과 필터의 특성을 최대부역의 크기특성과 천이대역폭으로 비교한 것이다. 표에서, ps는 저지대역에서 가장 큰 크기를 나타내는 최대부엽을 의미하며, ΔF는 -3[dB]인 주파수로부터, 천이대역 상에서 ps와 동일한 크기를 갖는 주파수까지의 폭을 나타낸다.

시뮬레이션 결과로부터, 기존의 방법들에서 ΔF는 Hanning window, ps 특성은 Blackman window가 우수한 결과를 나타내었으나, 이러한 두 창함수는 서로 다른 특성에서 미흡한 결과를 보였다. 이에 반해, Hamming window는 상대적으로 좁은 ΔF와 우수한 ps 특성을 나타내었다. 그러나 본 논문에서 제안한 두 종류의 창함수 모델에 의한 결과는 ΔF와 ps 모두에서 기존의 창함수에 의한 결과보다 우수한 특성을 나타내었으며, 특히 ps에서는 Proposed 1, ΔF에서는 Proposed 2가 더욱 개선된 결과를 나타내었다.

Table 1. Characteristics of each window function

	Hanning	Hamming	Blackman	Proposed 1	Proposed 2
ps[dB]	44.0238	51.3234	75.3684	55.0063	54.7379
ΔF	0.0831	0.0856	0.1383	0.0785	0.0792

V. 결 론

본 논문에서는 FIR 디지털 필터의 천이대역폭과 최대부엽의 크기특성을 향상시키기 위해, 새로운 창함수 모델을 제안하였으며, 시뮬레이션에서 기존의 창함수 모델과 비교하였다.

시뮬레이션 결과로부터, 본 논문에서 제안한 두 가지 창함수 모델에 의한 필터특성은 기존의 창함수 모델을 적용한 경우와 비교하여, 모두 우수한 결과를 나타내었다. 이에 따라, 제안한 두 창함수 모델을 사용한 FIR 디지털 필터는 각종 통신 및 방송 기기 분야 등에 유용하게 적용되리라 사료된다.

참 고 문 헌

[1] A. Peled and B. Liu, Digital Signal Processing, John Wiley & Sons, 1976.

[2] V. K. Ingle and J. G. Proakis, Digital Signal Processing Using MATLAB, PWS Publishing Company, 1998.

[3] T. Saramaki, "A class of window functions with nearly minimum sidelobe energy for designing FIR filters", IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems, vol. 1, pp. 359-362, May 1989.