

변형률 공간에서 변형률속도 및 온도를 고려한 구성방정식의 개선된 적분방법

조상순¹ · 허 훈[#]

Modified Integration Algorithm on the Strain-Space for Rate and Temperature Dependent Elasto-Plastic Constitutive model

S. S. Cho, H. Huh

Abstract

This paper is concerned with modified integration algorithm on the strain-space for rate and temperature dependent elasto-plastic constitutive relations in order to obtain more accurate results in numerical implementation. The proposed algorithm is integrated analytically using integration by part and chain rule and then is applied to the 2-stage Lobatto IIIA with second-order accuracy. It has advantage that is able to consider the convective stress rates on the yield surface of the strain-space. Also this paper is carried out the iteration procedure using the Newton-Raphson method to enforce consistency at the end of the step. And the performance of the proposed algorithm for rate and temperature dependent constitutive relation is illustrated by means of analysis of adiabatic shear bands.

Key Words : Backward-Euler return method, 2-stage Lobatto IIIA, Rate and Temperature Dependent Constitutive Model

1. 서 론

유한요소법을 이용한 탄소성문제는 각 단계의 응력증분을 계산하기 위하여 비선형 구성 방정식을 수치적분한다. 구성방정식의 적분은 재료의 변형중에 발생하는 소성일이 최대화되도록 응력증분을 계산하여야 하며, 계산된 응력값은 항복면내에 존재하여야 되는 제한조건을 가지고 있다. 이와 같은 탄소성문제의 적분방법은 비선형성과 제한조건 때문에 정해를 구하기 어려워 많은 연구자들에 의해 경제적이고 정확한 수치 적분방법이 연구되었다. 특히 고속변형을 수치해석하기 위한 변형률속도 및 온도를 고려한 구성방정식의 적분은 많은 연구자에 의해 연구가 진행되고 있다.

구성방정식의 적분방법에는 초기 항복면의 법선 벡터방향으로 소성변형률 증분을 취하는 전방 오일러 방법 (Forward-Euler method), 초기 항복면

의 법선벡터와 모든 변형률증분을 탄성이라 가정 한 시도응력(Trial stress)에서 법선벡터의 평균값을 이용하는 일반화중점 방법(Generalized midpoint method), 그리고 시도 응력으로부터 항복면으로 수직으로 회귀하는 반경회귀법(Radial return method)등이 있다.⁽¹⁾

Cho등은 변형률속도에 의존하지 않는 탄소성변형중에 소성변형의 이력을 고려할 수 있는 개선된 적분방법을 제안하였다. 이 적분 방법은 소성 변형율의 시간적분을 해석적으로 수행하여 소성 변형의 이력을 고려할 수 있도록 하였고, 내연적분지-쿠타방법의 2-stage Lobatto IIIA를 적용하여 정확도를 개선하였다.⁽²⁾

위와 같은 구성방정식의 적분방법은 응력공간에서 수행된다. 그러나 응력공간에서의 항복곡면의 불록성과 소성변형률증분 de^p 와 항복곡면과의 직교성은 연화성 재료에는 더 이상 적용되지 않

1. 한국과학기술원 기계공학과

교신저자: 한국과학기술원 기계공학과, hhuh@kaist.ac.kr

으며, 드러커의 공리에 위배된다. 이러한 연화성 거동을 기술하려면 응력공간이 아니라, 변형률 공간에서 소성이론을 정식화해야 한다.

또한 고속변형을 겪는 재료의 경우에는 변형률, 변형률속도 및 온도를 포함하는 구성방정식을 사용해야 한다. 재료가 고속변형을 하면 변형률속도와 온도가 시간에 따라 변화하기 때문에 유효응력도 증가 및 감소를 반복하여 겪는다. 따라서 변형률속도 및 온도를 고려하는 구성방정식의 적분은 변형률 공간에서 적분을 수행해야 한다.

본 논문에서는 변형률속도 및 온도에 의존하는 구성방정식의 수치적분을 위하여 정식화를 변형률 공간에서 수행하였다. 또한 Cho등이 제안한 소성변형의 이력을 고려할 수 있는 개선된 적분방법을 적용하였다. 이는 후방오일러 회귀방법과 마찬가지로 시도 응력과 축차 해와의 반복계산과정으로 항복조건식을 만족시키지만, 반복회귀법과 다르게 시도 응력과 항복면상의 해는 기하학적으로 수직을 이루지 않는다. 또한 내연적 룬지-쿠타 방법(Implicit Runge-Kutta method)의 2-stage Lobatto IIIA를 적용하여 적분을 수행하였으며, 단일전단밴드의 유한요소해석을 통하여 해의 정확도를 확인하였다.

2. 수 식 화

2.1 변형률 공간에서의 정식화

변형률 공간에서 등방성 탄소성에 대한 항복함수는 식(1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\varepsilon}^p, d^p, T) = \sqrt{6\mu^2(\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\varepsilon}^p) : (\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\varepsilon}^p)} - g(\boldsymbol{\varepsilon}^p, d^p, T) = 0 \quad (1)$$

이 식에서 $g(\boldsymbol{\varepsilon}^p, d^p, T)$ 는 유효응력을 나타내며, $\boldsymbol{\varepsilon}^p, d^p$ 와 T 는 각각 유효 소성변형률, 유효 소성변형률속도와 온도를 의미한다. 즉 구성방정식은 변형률속도 및 온도에 의존한다. 그리고 다음 식(2)와 같이 소성변형률속도 텐서는 Prandtl-Reuss 유동법칙을 따른다.

$$\mathbf{D}^p = \frac{1}{2\mu} d^p \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2)$$

또한 변형률속도 텐서는 탄성 변형률속도 텐서와 소성 변형률속도 텐서로 분리할 수 있으므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{D}^e = \mathbf{D} - \mathbf{D}^p = \mathbf{D} - \frac{1}{2\mu} d^p \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3)$$

그리고 항복함수 φ 에 연쇄법칙을 적용하면 식(4)를 얻는다.

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} d\boldsymbol{\varepsilon}^e - \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} d\boldsymbol{\varepsilon}^p + \frac{\partial g}{\partial d^p} d(d^p) + \frac{\partial g}{\partial T} dT \right) = 0 \quad (4)$$

한편 본 논문에서는 고속변형 시 소성변형에 의해 의한 열이 인접 재료로 발산될 충분한 시간적 여유가 없이 단일상태에서 변형이 발생하는 현상을 다룬다. 따라서 열전도를 무시하는 단일과정으로 가정할 수 있기 때문에 재료 내 온도변화는 다음과 같이 표시하였다.

$$\dot{T} = \chi \frac{\sigma_{eff} d^p}{\rho c_p} \quad (5)$$

위 식(5)에서 χ 는 소성변형에 의한 에너지가 열로 전환되는 비율로 보통 0.9를 사용하며, ρ 와 c_p 는 각각 재료의 밀도와 비열을 나타낸다.

위의 식(1)~(5)를 연립하면 아래 식(6)과 같이 유효 소성변형률속도를 구할 수 있다.

$$d^p = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{D}}{3\mu + \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial g}{\partial d^p} + \frac{\partial g}{\partial T} \frac{\beta \bar{\sigma}}{\rho c_p} \right)} = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{D}}{3\mu + H} \quad (6)$$

여기서 H 은 소성변형에서의 항복선도의 기울기를 의미하며, 벡터 \mathbf{a} 는 항복면에 수직인 벡터로서 식(7)과 같이 표현된다.

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (7)$$

소성 유동이 일어날 경우, 응력은 항복면 위에 위치하게 되므로 등방 변형경화를 고려하면 식(2)와 식(3)은 다음과 같이 각각 식(8)과 식(9)로 표현된다.

$$\mathbf{D}^p = \frac{1}{2\mu} d^p \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2\mu} \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{D}}{3\mu + H} \mathbf{a} \quad (8)$$

$$\mathbf{D}^e = \mathbf{D} - \mathbf{D}^p = \mathbf{D} - \frac{1}{2\mu} \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{D}}{3\mu + H} \mathbf{a} \quad (9)$$

따라서 위의 식(9)로부터 식(10)과 같이 응력변

화율을 얻을 수 있다.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C}\mathbf{D}^e \quad (10)$$

위의 식(10)에서 \mathbf{C} 는 탄성계수를 나타낸다.

2.2 개선된 적분방법

소성유동에 의한 소성변형률과 탄성변형률증분을 구하기 위하여 식(9)를 아래 식(11)과 같이 적분한다.

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{D}^e dt = \mathbf{D}\Delta t - \frac{1}{2\mu} \int_t^{t+\Delta t} d^p \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} dt \quad (11)$$

위의 식(11)에서 적분항 내의 d^p 와 \mathbf{a} 는 모두 적분구간에서 시간에 따라 변화하는 변수이다. 따라서 아래 식(12)과 같이 부분적분(Integration by part)과 연쇄법칙(Chain Rule)을 적용할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e &= \mathbf{D}\Delta t - \frac{1}{2\mu} \int d^p \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} dt \\ &= \mathbf{D}\Delta t - \frac{1}{2\mu} \left[\int \frac{d}{dt} \left\{ d^p \Delta t \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right\} dt - \int (d^p \Delta t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial t}) dt \right] \end{aligned} \quad (12)$$

위의 식(12)를 수치 적분하기 위하여 내연적 룬지-쿠타 방법(Implicit Runge-Kutta method)의 2-stage Lobatto IIIA를 적용하여 적분을 수행하였으며, 위의 식(12)의 마지막 적분항은 시간 $\tau = t$ 에서 $d^p \Delta t = 0$ 이기 때문에 모든 변수는 시간 $\tau = t + \Delta t$ 에서의 값으로 아래 식(13)과 같이 표현할 수 있다.⁽³⁾

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e &\cong \mathbf{D}\Delta t - \frac{\Delta t}{2\mu} d^p \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{4\mu} d^p \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} \left(\mathbf{D} - \frac{1}{2\mu} \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{D}}{3\mu + H} \mathbf{a} \right) \right) \end{aligned} \quad (13)$$

식(13) 우변의 첫 번째 항과 두 번째 항만을 가지고 사용하는 기존의 방법은 1차의 정확성을 갖는다. 즉 소성변형률과 법선 벡터 \mathbf{a} 의 곱인 $d^p \mathbf{a}$ 는 시간 $t \leq \tau \leq t + \Delta t$ 동안에 선형적으로 변화하는 경우에만 정해를 가질 수 있으며, 소성변형과 항복면의 변화 이력을 고려할 수 없는 단점을 가지고 있다. 그러나 본 논문에서 제시한 2-stage Lobatto IIIA는 2차의 정확성을 갖으며, 식(13)의

마지막 항은 항복면의 법선벡터의 응력에 대한 미분을 이용하기 때문에 항복면에서 응력의 변화를 고려할 수 있는 응력의 대류속도(Convective velocity)항이 된다. 따라서 변형률 증분동안의 변형이력을 고려할 수 있는 장점을 가지고 있다.

그리고 식(13)은 뉴튼-랩슨 방법을 적용하여 수렴된 해를 구할 수 있다.⁽²⁾

3. 결과

3.1 단열전단밴드의 유한요소해석

재료가 고속 변형을 할 때 소성 변형에 의한 열이 인접 재료로 발산될 충분한 시간적 여유가 없으므로 단열상태에 가깝게 되고 이 열 에너지는 재료의 국부적인 온도 상승을 초래하며, 이 온도 상승은 재료의 유동응력을 저하시키는 방향을 작용하므로 결과적으로 재료는 열적 연화를 경험하게 된다. 이 때 소성변형에 의한 일의 90~95%가 열로 전환되며, 발생된 열의 대부분은 외부로 발산되지 못하고 그 부분의 유동응력을 낮추는데 기여하게 되어 결과적으로 좁은 영역에 큰 변형이 집중되는 국소화 현상을 초래하게 된다. 이와 같은 국소화 현상은 소성변형과 열에 의한 불안정현상의 일종이므로 단열 전단밴드라 부른다.

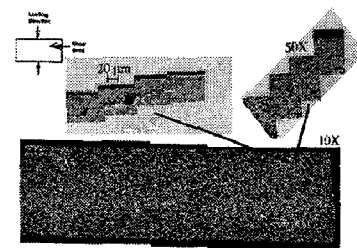


Fig.1 Adiabatic shear bands of W-Fe-Ni alloy subjected to 50% strain in $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \sim 5000/s$

Kim등은 압축형 Hopkinson bar를 이용하여 지름 48mm, 길이 38mm의 원형시편을 약 5000/s의 고속 압축실험을 수행하였으며, Fig. 1은 50% 압축시의 변형형상과 단열전단밴드를 보여준다.⁽⁴⁾

이를 유한요소해석을 수행하기 위하여 Fig.2와 같이 모델링하였고 축대칭요소를 사용하였다. 또한 Hopkinson bar 시험과 유사하게 하기 위하여 Fig. 2(a)와 같이 Hopkinson bar시험기의 입력봉과 출력봉을 고려하였으며, 각 봉의 끝단은 응력파의 반사를 제거하기 위하여 무한요소(Infinite element)를 적용하였다.

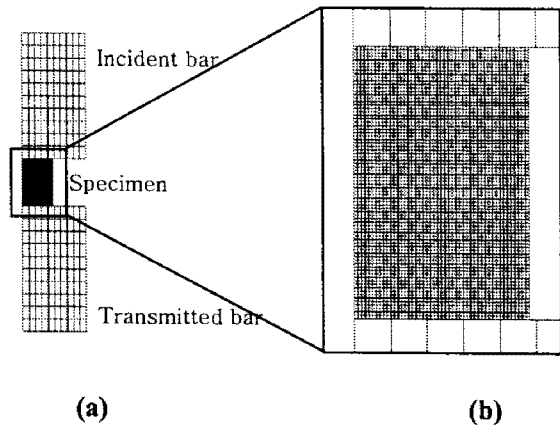


Fig.2 Finite element model for calculation of the adiabatic shear band:
 (a) Specimen, Incident and Transmitted bar;
 (b) Closed view of the specimen

Kim등은 시편으로서 WHA(93W-4.9Ni-2.1Fe)를 사용하였고, 본 논문에서 제안한 개선된 적분방법의 정확성을 확인하기 위하여 아래 식(14)과 같이 WHA의 Johnson-Cook 구성방정식을 이용하였다.⁽⁵⁾

$$\sigma_y = (A + B\epsilon^{p^n})(1 + C \ln(\dot{\epsilon}^p / \dot{\epsilon}_o))(1 - T^*) [MPa]$$

where

$$T^* = (T - T_{ref}) / (T_{melt} - T_{ref}), \dot{\epsilon}_o = 1/s$$

$$A = 1506, B = 177, C = 0.016, n = 0.12, m = 1.0$$

유한요소해석은 먼저 ABAQUS/Explicit만을 이용하여 수행하였고, 다음으로 제안된 적분방법을 ABAQUS/Explicit의 User-subroutine인 VUMAT으로 프로그래밍하여 구성방정식을 적분하였다. 그리고 두 해석 결과를 Kim등의 실험결과와 비교하였다.

Fig.3(a)는 ABAQUS/Explicit만을 이용하였을 경우 변형형상과 유효 소성변형률 분포를 나타낸다. 이 경우 시편 내에 국부적인 소성변형이 발생하지 않는 것을 확인 할 수 있다.

Fig.3(b)은 VUMAT에 개선된 적분방법을 적용한 결과로서 입력봉쪽의 외곽 접촉부로부터 출력봉쪽의 시편내부로 국부적인 소성변형이 전파한 것을 볼 수 있다. 본 해석결과는 Kim등이 Hopkinson bar를 이용하여 관찰한 단열전단밴드와 매우 유사하였다.

위의 결과로부터 개선된 적분 방법이 고속변형중에 발생하는 소성변형 및 국부적인 현상등을 예측하는데 있어서 기존의 방법보다 더 정확한 것을 확인하였다.

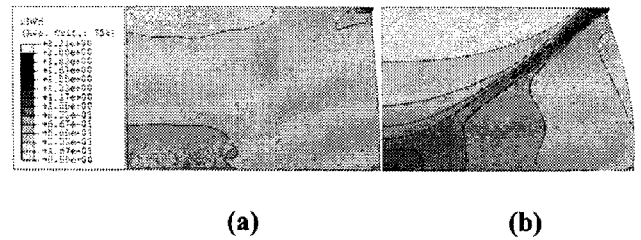


Fig.3 Deformed shape and contours of the effective plastic strain:
 (a) ABAQUS/Explicit;
 (b) ABAQUS/Explicit with VUMAT

4. 결론

본 논문에서는 변형률속도 및 온도에 의존하는 구성방정식의 수치적분을 위하여 정식화를 변형률공간에서 수행하였고, 변형률 공간의 항복면위에서 소성변형의 이력을 고려할 수 있는 개선된 적분방법을 제안하였다. 또한 단열전단밴드의 해석을 통하여 개선된 적분 방법이 고속 변형중에 발생하는 소성 변형등을 예측하는데 있어서 기존의 방법보다 더 정확한 것을 확인하였다.

참고 문헌

- [1] M. A. Crisfield, 1991, Non-linear finite element analysis of solids and structures. Volume 1, John Wiley & Sons, England.
- [2] S.S. Cho, H. Huh, 2006, 응력장에서 탄소성 구성방정식의 개선된 적분방법, 한국소성가공학회 추계학술대회, Vol. 3, pp.133~136
- [3] J. Büttner, B. Simeon, 2002, Runge-Kutta methods in elastoplasticity, Appl. Numer. Math., Vol. 41, pp.443~458
- [4] D.S. Kim, S. Nemat-Nasser, J.B. Isaacs and D. Lischer, 1998, Adiabatic shearband in WHA in high-strain-rate compression, Mech. Mater., Vol. 28, pp.227~236
- [5] J.B. Stevens, 1996, Finite Element Analysis of Adiabatic Shear Bands in Impact and Penetration Problems, MS Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University