

# 굽힘이력을 고려한 원형컵 딥드로잉공정의 유한요소역해석

허지항<sup>1</sup>, 윤종현<sup>1</sup>, 바오이동<sup>1</sup>, 허 훈<sup>#</sup>

## Finite Element Inverse Analysis of the Cylindrical Cup Deep Drawing Process Considering Bending History

J. Huh, J. H. Yoon, Y.D. Bao, H. Huh

### Abstract

This paper introduces a new approach to consider the bending history in finite element inverse analysis of the cylindrical cup drawing. A modified membrane element is adopted to add the bending-unbending energy to the total plastic energy on the bending-unbending region predicted from the geometry of the final shape and tools. The algorithm suggested was applied to a cylindrical cup deep drawing process. The blank shape and the distribution of the thickness strain are compared with those obtained from incremental finite element analysis. The comparison demonstrates the algorithm proposed reduces the difference between the results from inverse analysis and those from incremental analysis when the bending history is considered.

**Key Words** : Finite Element Inverse Analysis, Bending Effect, Deep Drawing Process, Modified Membrane Element

### 1. 서론

박판성형공정의 초기설계단계에서 공정변수를 효율적으로 결정하기 위하여 유한요소역해석(finite element inverse analysis)이 널리 이용되고 있다. 변형이론을 기본으로 유도되는 유한요소역해석은 최종 블랭크 형상으로부터 초기블랭크 형상과 상태변수를 빠르게 계산한다. 이에 대한 연구는 Guo와 Batoz[1], Chung과 Richmond[2], Liu와 Karima[3], Lee와 Huh[4] 등에 의해 이루어졌다.

대부분의 유한요소역해석은 두께 방향의 전단응력과 굽힘 효과를 무시하는 박막이론을 바탕으로 유도된다. 그러나 원형컵 딥드로잉공정과 같이 굽힘효과가 큰 경우 굽힘효과를 무시하고 박막변형만을 고려하면 변형률 계산에 오차가 발생한다. 또한, 원형컵 딥드로잉공정에서는 판재가 다이 어깨부(die shoulder)를 따라 미끄러지면서 굽힘이 일어나고, 다이 어깨부를 지나고 난 후 다시 퍼지는 벤

딩-언벤딩(bending-unbending)이 일어나므로 이에 대한 고려가 필요하다.

본 논문에서는 유한요소역해석을 이용한 원형컵 딥드로잉공정 해석의 정확도를 높이기 위하여 개량박막요소를 도입하여 성형공정에서 소재의 굽힘효과를 고려하였다. 그리고 벤딩-언벤딩을 겪는 벽면부분의 굽힘이력을 고려할 수 있는 방법을 제시하였다. 제안한 기법을 바탕으로 원형컵 딥드로잉공정의 유한요소 역해석을 수행하여 성형과정에서 굽힘효과 및 굽힘이력의 고려에 따른 해석결과를 비교하고 제안한 기법의 타당성과 유용성을 확인하였다.

### 2. 유한요소역해석의 이론적 수식화

#### 2.1 소성포텐셜에너지의 최소화

평형상태의 소성변형체는 소성포텐셜이 최소인 상태에서 존재한다[5]. 본 논문에서는 소성변형에

1. 한국과학기술원 기계항공시스템학부  
# 교신저자: 한국과학기술원 기계항공시스템학부,  
Email: hhuh@kaist.ac.kr

너지와 등가의부일의 차를 식(1)과 같이 소성포텐셜에너지로 정의하였다[4].

$$\min. \Psi(\mathbf{X}) = W_p(\mathbf{X}) - W_f(\mathbf{X}) - W_b(\mathbf{X}) \quad (1)$$

위 식에서 소성변형에너지  $W_p$  는 식(2)와 같이 계산할 수 있으며 외력에 의한 일  $W_f$  는 식(3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$W_p(\mathbf{X}) = \sum_{e=1}^E \int_{A_e} \frac{2\bar{\sigma}}{3\bar{\epsilon}} D_{\alpha\beta} \epsilon_\alpha d\epsilon_\beta t dA \quad (2)$$

$$W_f(\mathbf{X}) = - \sum_{\text{node}} \left[ \mu F_n \tanh(\alpha \|\mathbf{U}\|) \frac{\mathbf{U}}{\|\mathbf{U}\|} \right] \cdot d\mathbf{U} \quad (3)$$

여기서  $F_n$  은 최종상태에서의 재료의 반력이다. 블랭크홀딩력에 의한 마찰일  $W_b$  도 식(3)과 유사한 방법으로 계산할 수 있다. 식(1)을 만족하는 초기좌표는 Newton-Raphson 방법을 이용하여 식(4)로부터 구할 수 있다.

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right]_{(n)} \{d\mathbf{X}\} = -\{\mathbf{R}(\mathbf{X})\}_{(n)} \quad (4)$$

이때  $\mathbf{R}(\mathbf{X})$  는 포텐셜에너지의 초기좌표에 대한 미분값으로 식(5)와 같다.

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}) = \int_{\Omega} \sigma \frac{\partial(d\epsilon)}{\partial \mathbf{X}} d\Omega - \int_{\Gamma_f} \mathbf{t}_f \frac{\partial(d\mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}} d\Gamma - \int_{\Gamma_b} \mathbf{t}_b \frac{\partial(d\mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}} d\Gamma \quad (5)$$

여기서  $d\mathbf{X}$  는 위치 벡터의 증분 방향이며  $n$  번째 축차에 의한  $\mathbf{X}_{n+1}$  은 식(6)과 같이 나타낼 수 있다. 여기서  $\alpha$  는 감속계수(deceleration factor)로 0 부터 1 사이의 값이며 수렴조건은 식(7)와 같다.

$$\mathbf{X}_{(n+1)} = \mathbf{X}_{(n)} + \alpha \cdot d\mathbf{X} \quad (6)$$

$$\frac{\|d\mathbf{X}_{(n)}\|}{\left\| \sum_{n=1}^N d\mathbf{X}_{(n)} \right\|} \leq \delta_1, \quad \|\{\mathbf{R}(\mathbf{X})\}_{(n)}\| \leq \delta_2 \quad (7)$$

### 3. 굽힘이력을 고려한 유한요소역해석

3.1 개량박막요소를 이용한 굽힘에너지항의 수식화

요소의 굽힘변형을 고려하면 소성변형에너지는 식(2)로 나타내어지는 박막변형에너지에 굽힘변형 에너지를 더한 것이 된다. 굽힘변형에너지는 식(8)과 같이 표현된다.

$$\delta W^b = \int_{\Omega} \sigma_y \delta \epsilon_y^b d\Omega = \int_{\Gamma} M_y \delta \kappa_y d\Gamma \quad (8)$$

본 논문에서는 곡률  $\kappa_y$  를 표현하기 위해 Han 과 Huh[6]가 제안한 개량박막요소를 사용하였다. 개량 박막요소는 식(9)와 같이 인접한 두 요소가 이루는 각도를 이용하여 곡률을 근사한다.

$$\kappa_i = \frac{1}{L_i} |w'_{,1} - w'_{,2}| \quad (9)$$

여기서  $L_i$  는 두 요소 중심간의 거리를 말하며,  $w'_{,1}, w'_{,2}$  는 요소경계면에 대한 수직방향으로의 미분을 의미한다. 요소경계면과 주축방향이 일치한다고 가정하고 한 성분의 굽힘모멘트가 그 성분에 해당하는 곡률에만 영향을 준다고 가정하면 유한요소 수식화에 의해 굽힘변형에너지를 식(10)과 같이 표현할 수 있다.

$$W^b(\mathbf{X}) = \sum_{e_b=1}^{E_b} \int_{\Gamma_b} \mathbf{C} \mathbf{B}_b^T \mathbf{B}_b \mathbf{U} d\Gamma \quad (10)$$

이때  $\mathbf{B}_b$  는 식(11)과 같다.  $\mathbf{n}_n$  은 요소면에 수직인 단위벡터,  $\mathbf{n}_t$  는 요소면에 접하고 경계선에 수직인 단위벡터이며,  $\mathbf{H}$  는 형상함수이다. 굽힘강성계수  $C$  는 식(12)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{B}_b = \frac{1}{L_i} \left( \mathbf{n}_n^{(1)} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{n}_t^{(1)}} - \mathbf{n}_n^{(2)} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{n}_t^{(2)}} \right) \quad (11)$$

$$C = \frac{t^3 \bar{\sigma} (1+r)(2+r)}{18 \Delta \bar{\epsilon} (1+2r)} \quad (12)$$

### 3.2 굽힘이력을 고려한 유한요소역해석

딤드로잉공정 중 판재는 다이 어깨부를 따라 미끄러지면서 굽힘을 겪는다. 그리고 다이 어깨부를 지나고 난 후 구부러졌던 부분이 다시 펴지면서 벽면을 형성하게 된다. 본 논문에서는 유한요소역해석에서 벽면부분요소의 굽힘이력을 고려하기 위하여 성형과정에서 요소의 굽힘변형경로를 가정하고 해당요소의 곡률을 계산하여 굽힘에너지를 구

하였다. 먼저 굽힘변형경로는 다음의 세 부분으로 가정하였다.

1. 펀치와 다이 어깨부에 위치한 요소는 벤딩-언벤딩을 겪지 않고 평평한 초기형상에서 굽힘을 받아 최종형상의 곡률을 이루게 된다.

2. 컵바닥부분이나 플랜지 부분에 위치한 요소는 평면박막변형(in-plane membrane deformation)을 한다.

3. 벽면에 위치한 요소는 다이 어깨부를 타고 내려가며 벤딩과 언벤딩을 겪는다. 이때 판재가 다이에 완전히 접촉한다고 가정한다

이렇게 요소의 위치에 따라 변형경로를 구분한 후, 각 요소의 굽힘변형 양에 해당하는 굽힘변형에너지를 식(10)으로부터 계산하였다. 박판이 다이 어깨부에 완전히 접촉한다는 가정으로부터 벽면부에 위치한 요소의 굽힘곡률반경을 식(13)과 같이 얻을 수 있다.

$$\rho = R + 0.5t_f \quad (13)$$

이때  $R$ 은 다이 어깨부의 곡률 반경이며  $t_f$ 는 최종형상의 두께이다. 평면상에 위치했던 두 요소가 굽힘을 받아  $\rho$ 의 곡률을 갖게 되었을 때 해당하는 굽힘에너지는 식(10)로부터 계산할 수 있다.

역해석에서는 재료의 변형경로에 대한 정보를 알 수 없으므로 소성변형에 의한 재료의 경화를 정확히 고려할 수 없다. 따라서 본 연구에서는 소성변형에 의한 재료의 경화를 무시하고 변형이론

을 적용하여  $\rho$ 의 곡률을 이루는 두 요소가 다시 평면으로 돌아오는 데 해당하는 언벤딩에너지가 평면에 위치했던 요소가  $\rho$ 만큼의 곡률을 이루는 데 해당하는 벤딩에너지와 같다고 가정하였다.

#### 4. 수치해석 결과

제 2 장과 3 장에서 유도한 수식화를 이용하여 굽힘이력을 고려한 유한요소역해석 프로그램을 구성하고 이를 원형컵 딥드로잉 문제에 적용하였다. 원형컵의 펀치와 다이의 형상 및 치수는 Fig.1 과 같으며 Fig.2 와 같이 유한요소 모델링하였다. 기하학적 대칭성을 감안하여 블랭크의 1/4 로 모델링하였다. 이때, 원형컵의 플랜지의 폭은 5 mm 이고, 컵높이는 40 mm 이다. 해석에 이용된 재료의 물성치와 성형조건은 Table 1 과 같다.

위와 같은 유한요소모델, 재료상수 및 성형조건을 토대로 박막이론을 적용한 유한요소역해석과 본 논문에서 제시한 대로 굽힘이력을 고려한 유한요소역해석을 수행하였다. 그리고 본 논문에서 제안한 굽힘이력 고려방법의 타당성을 살펴보기 위하여 직접해석을 수행한 후 이를 유한요소역해석 결과와 비교하였다. 직접해석에는 외연적 유한요소해석코드인 LS-DYNA3D 를 이용하였으며 유한요소역해석으로 계산한 초기블랭크형상을 사용하였다. 유한요소역해석을 통하여 얻은 최종상태의 두께분포를 Fig.3 에 도시하였다. 굽힘효과에 대한 정량적

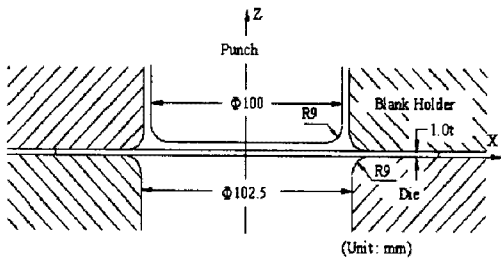


Fig. 1 Geometric description of the tooling for deep drawing of a cylindrical cup

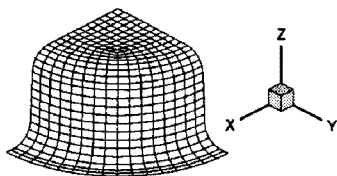


Fig. 2 Finite element mesh geometry of the cylindrical cup : cup height = 40 mm

Table 1 Comparison of measured roughness data

$\bar{\sigma} = 534.1(0.0002 + \bar{\epsilon})^{0.263}$ MPa	
Lankford value	$r = 1.82$
Initial thickness	$t_0 = 1.0\text{mm}$
Friction coefficient	$\mu = 0.1$
blank holding force	$F_b = 40\text{kN}$

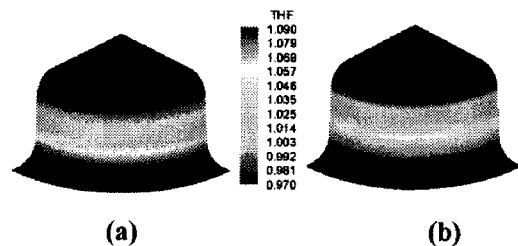


Fig. 3 Final thickness distribution of cylindrical cup drawing; (a) without considering bending history, (b) with considering bending history

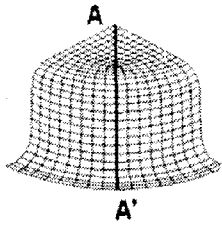


Fig. 4 Designated line to measure strain

차이를 확인하기 위하여 Fig.4 에 도시한 단면에서 두께분포를 비교하고 그 결과를 Fig.5 에 그래프로 나타내었다.

Fig.5 에 도시한 두께분포를 살펴보면 굽힘이력을 고려하였을 때 컵바닥부분과 편치어깨부가 더 얇아지며 직접해석에 근접해가는 경향성을 보이는 것을 확인할 수 있다. 굽힘이력을 고려한 해석에서 벽면에 위치한 요소들은 벤딩과 언벤딩을 겪게 되고 그에 해당하는 굽힘에너지가 추가된다. 굽힘에너지의 추가는 벽면에 위치한 요소들의 강성의 증가로 이어지므로 굽힘을 고려하지 않았을 때보다 벽면부요소의 유입이 작아지게 된다. 벽면부요소의 유입이 작아졌으므로 컵바닥과 편치어깨부는 상대적으로 더 얇아지고 벽면부분은 더 두꺼워진다. 직접해석결과와 유한요소역해석결과를 비교해 보면 벽면부분의 두께에 오차가 발생함을 알 수 있다. 벽면부분은 접촉상태와 변형경로가 복잡하기 때문에 변형이론의 가정에 어긋나 유한요소역해석의 오차가 커지게 된다. 하지만 컵바닥부분의 두께는 정확히 예측하고 있으며 편치 어깨부는 굽힘이력을 고려하지 않았을 때보다 오차가 감소하였다.

## 5. 결론 및 토론

본 논문에서는 딥드로잉공정의 유한요소역해석에서 굽힘이력을 고려할 수 있는 방법을 제시하고 원형컵 딥드로잉공정에 적용하였다. 기존의 유한요소역해석 방법에 개량박막요소를 도입하여 굽힘에너지를 추가하였으며 블랭크의 변형경로를 가정하여 소재의 굽힘이력을 고려할 수 있도록 하였다.

굽힘이력을 고려하여 유한요소 역해석을 수행하였을 때, 편치와 접촉하는 컵바닥과 편치 어깨부에서 최종두께분포의 정확도가 크게 향상되었다. 특히 컵바닥부분의 두께는 직접해석결과와 거의 유사한 결과를 보이는 것을 확인하였다. 편치 어깨부

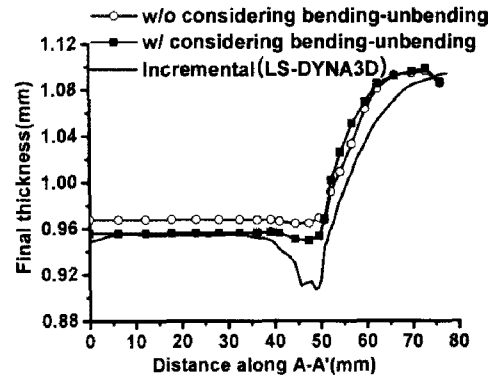


Fig. 5 Final thickness distribution of cylindrical cup drawing analysis

의 두께는 직접해석결과와 오차가 있지만 굽힘이력을 고려하지 않은 유한요소역해석에 비해서는 향상된 결과를 보였다. 이러한 해석결과로 보아 원형컵 딥드로잉공정의 유한요소역해석에서 정확도를 높이기 위하여 굽힘이력의 고려가 필수적이라고 판단된다.

## 참고 문헌

- [1] J. L. Batoz, Y. Q. Guo, F. Mercier, 1997, The inverse approach with simple triangular shell elements for large strain predictions of sheet metal forming parts, *Engineering Computations*, Vol. 15, No. 7, pp. 864~892
- [2] K. Chung and O. Richmond, 1994, The mechanics of ideal forming, *ASME trans: J. of Applied Mechanics*, Vol. 61, pp. 176~181
- [3] S. D. Liu and M. Karima, 1992, A one step finite element approach for production design of sheet metal stampings, *NUMIFORM92*, pp. 497~502
- [4] C.H. Lee and H. Huh, 1997, Blank design and strain prediction of automobile stamping parts by an inverse finite element approach, *J. Mater. Process. Technol.*, Vol. 63, pp. 645~650
- [5] R. Hill, 1958, A general theory of uniqueness and stability in elasto-plastic solids, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.6, pp.236
- [6] H. Huh, S.S. Han and D.Y. Yang, 1994, Modified Membrane Finite Element Formulation considering Bending Effects in Sheet Metal Forming Analysis, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.36, No.7, pp.659-671