분할격자를 이용한 댐붕괴파의 수치해석

Numerical Simulation of Dam-Break Problem with Cut-cell Method

김형준*, 유제선**, 이승오***, 조용식****

Hyung-Jun Kim, Jeseon Yoo, Seung Oh Lee, Yong-Sik Cho

Abstract

A simple, accurate and efficient mesh generation technique, the cut-cell method, is able to represent an arbitrarily complex geometry. Both structured and unstructured grid meshes are used in this method. First, the numerical domain is constructed with regular Cartesian grids as a background grid and then the solid boundaries or bodies are cut out of the background Cartesian grids. As a result, some boundary cells can be contained two numerical conditions such as the flow and solid conditions, where the special treatment is needed to simulate such physical characteristics. The HLLC approximate Riemann solver, a Godunov-type finite volume method, is employed to discretize the advection terms in the governing equations. Also, the TVD-WAF method is applied on the Cartesian cut-cell grids to stabilize numerical results. Present method is validated for the rectangular dam break problems. Initially, a conventional grid is constructed with the Cartesian regular mesh only and then applied to the dam-break flow simulation. As a comparative simulation, a cut-cell grids are applied to represent the flow domain rotated with arbitrary angles. Numerical results from this study are compared with the results from the case of the Cartesian regular mesh only. A good agreement is achieved with other numerical results presented in the literature.

Key words: Cut-cell method, Finite Volume Method, Dam-break problem

1. 서 론

복잡한 형상의 지형을 정확히 표현하여 수치격자를 구성함은 수공학의 수치모의에 있어서 가장 기본적으로 요구되는 사항이다. 구조 또는 비구조 격자체계를 이용하여 정확한 수치격자를 구성하기 위하여 다양한 기법에 대한 연구가 진행되었지만, 효율성과 정확성을 동시에 만족시키는 기법의 개발은 계속 진행 중이다. 이에 본 논문에서는 각각의 격자체계의 장점을 혼합하여 효율적이고 정확한 수치격자 생성이 가능한 분할격자기법을 이용하여 계산격자를 구성하고, 유한체적기법의 수치모형을 적용하여 수치모형을 검증한다.

분할격자기법은 흐름의 혼재하는 격자를 지형의 형상에 맞게 분할하여 흐름영역과 비흐름영역으로 구분하는 간편한 격자생성기법이다 (Qian 등, 2003). 정확한 정보를 이용하여 구성된 분할격자는 곡선좌표계 또는 다각형의 비구조 격자와 같은 정도의 곡선형의 계산격자를 생성할 수 있다 (Qian 등, 2003). 국외의 연구사례로, Zhou 등(2004)은 HLL기법과

* 정회원·한양대학교 대학원 토목공학과 박사과정·E-mail : john0705@hanyang.ac.kr
** 정회원·한양대학교 대학원 토목공학과 박사 후 과정 연구원·E-mail : jeseon.Yoo@hotmail.cpm
*** 정회원·홍익대학교 공과대학 토목공학과 전임강사·E-mail : seungoh.lee@hongik.ac.kr
**** 교신저자·한양대학교 공과대학 도시건설환경공학부 교수·E-mail : ysc59@hanyang.ac.kr

MUSCL-Hancock기법으로 구성된 수치모형을 분할격자망에 적용하고, 45°와 90°로 굴절된 수로에서의 댐붕괴파의 흐름을 모의하여 CADAM (Concerted Action on Dam Break Modelling) 프로젝트(Morris, 2000)의 수리실험결과 비교하였다.

본 연구에서는 제안하는 분할격자는 균일한 구조격자를 분할하여 부분적으로 비구조격자를 생성하게 되므로, 다양한 형태의 격자에 적용이 가능한 유한체적법을 이용하여 지배방정식을 이산화하여 수치모형을 구성한다. 지배방정식인 천수방정식을 이산화하기 위하여 Riemann 근사해법인 HLLC기법을 이용하여 천수방정식의 흐름률을 계산하였으며, 2차 정확도를 확보하기 위하여 TVD-WAF기법을 적용하여 해의 안정성을 기하였다. 본 연구에서는 부분적으로 붕괴하는 댐의 홍수파에 대하여 Cartesian격자체계만으로 모의된 수치모의 결과와 분할격자체계를 이용한 수치결과를 비교하였다.

2. 분할격자체계

복잡한 자연지형에 대하여 정확한 분할격자를 흐름이 변화하는 격자의 분할을 위한 위치정보가 필요하다. 이러한 분할점의 정보는 곡선형의 형상과 일치하므로 간단한 정보를 이용하여 효율적으로 분할격자를 생성할 수 있다. Ingram 등(2003)은 지형선을 하나의 곡선함수로 나타낸 후, 각 지점의 사이에 위치한 분할점을 추적하여 분할격자망을 생성하는 방법을 제안하였다.

$P_i = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_j, y_j), \ldots, (x_n, y_n)\}$ (1)

식 (1)과 같이 정의된 곡선함수 P_i를 따라서 수치격자를 분할하기 위하여 (x_i, y_i)와 (x_{j+1}, y_{j+1})를 시점 (x_s, y_s)와 종점 (x_e, y_e)으로 하는 선분을 추적하고, 선분과 직사각형격자가 겹치는 부분인 분할격자점을 계산한다. 지형을 나타내는 곡선함수 P_i는 실수의 좌표이고 계산격자망을 정수의 좌표를 갖게 되므로 일반적으로 그 위치가 정확히 교차하지 않는다. 시점과 종점을 이동하여 분할점이 포함된 격자망의 번지수에 대입하기 위하여 식 (2)와 같이 계산하여 시작점과 끝점의 격자망의 위치 (I_s, J_s)와 (I_e, J_e)를 계산한다. 여기서, (x_0, y_0)는 계산영역의 원점의 x 및 y좌표를 의미한다.

$$I_s = \mathrm{int}\left(\frac{x_s - x_o}{\Delta x}\right) + 1, \quad J_s = \mathrm{int}\left(\frac{y_s - y_o}{\Delta y}\right) + 1$$
$$I_e = \mathrm{int}\left(\frac{x_e - x_o}{\Delta x}\right) + 1, \quad J_e = \mathrm{int}\left(\frac{y_e - y_o}{\Delta y}\right) + 1 \tag{2}$$

3. 수치모형

지배방정식인 비선형 천수방정식은 식(4)과 같이 보존형의 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{S} \tag{3}$$

보존형 변수 벡터 $\mathbf{U}$와 $x-$축 및 $y-$축 방향의 흐름률 벡터 $\mathbf{E}$와 $\mathbf{G}$ 및 생성항 $\mathbf{S}$는 각각 다음과 같다.

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \\ huv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + gh^2/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ ghS_{ox} - ghS_{fx} \\ ghS_{oy} - ghS_{fy} \end{pmatrix} \tag{4}$$

식 (4)에서 h는 수심이며, u와 v는 각각 $x-$축 및 $y-$축 방향의 수심평균 유속을 나타낸다. 생성항에 포함된 S_o와 S_f는 각각 하상경사와 마찰경사를 나타낸다.

지배방정식을 이산화하기 위하여 HLLC Riemann 근사해법과 TVD형태의 WAF기법을 적용하였다. HLLC기법은 Fraccarollo와 Toro(1995)에 의해 제안되었다. 한방향의 흐름에 대하여 생성항의 영향을 생략하면 지배방정식을 식 (5)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}=0 \tag{5}$$

식 (5)의 $\mathbf{U}$는 세 개의 변수에 대한 벡터로서 세 개의 고유값을 가지며, 식 (7)의 세 개의 파속에 의해 구분되는 네 개의 구간으로 구분되는 식 (6)과 같은 Riemann 해로 구성된다.

$$\tilde{\mathbf{U}}=\begin{cases} \mathbf{U_L} & \text{for} \quad 0 \leqq S_L \\ \mathbf{U_L^*} & \text{for} \quad S_L \leqq 0 \leqq S_* \\ \mathbf{U_R^*} & \text{for} \quad S_* \leqq 0 \leqq S_R \\ \mathbf{U_R} & \text{for} \quad S_R \leqq 0 \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} S_L &= \min\left(u_L-\sqrt{gh_L}, u_*-\sqrt{gh_*}\right) \\ S_* &= u_* = \frac{u_L+u_R}{2}+\sqrt{gh_L}-\sqrt{gh_R} \\ S_R &= \max\left(u_R+\sqrt{gh_R}, u_*+\sqrt{gh_*}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

검사체면에서의 흐름률 벡터 $\mathbf{E}$는 식 (6)과 (7)의 결과를 이용하여 구하며 식 (8)과 같이 주어진다.

$$\mathbf{E}=\begin{cases} \mathbf{E_L} & \text{for} \quad 0 \leqq S_L \\ \mathbf{E_L^*}=\mathbf{E_L}+S_L\left(\mathbf{U_L^*}-\mathbf{U_L}\right) & \text{for} \quad S_L \leqq 0 \leqq S_* \\ \mathbf{E_R^*}=\mathbf{E_R}+S_R\left(\mathbf{U_R^*}-\mathbf{U_R}\right) & \text{for} \quad S_* \leqq 0 \leqq S_R \\ \mathbf{E_R} & \text{for} \quad S_R \leqq 0 \end{cases} \tag{8}$$

1차 정확도의 HLLC기법을 2차 정확도로 전개하고, 2차 정확도의 기법이 수반되는 수치오차를 제어하기 위하여 식 (9)와 같이 TVD 형태의 Weighted Average Flux기법을 적용하였다.

$$\mathbf{E}_{i+1/2}^k=\frac{1}{2}\left(\mathbf{E}_i+\mathbf{E}_{i+1}\right)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} sign\left(c_k\right)\psi_{i+1/2}^k \Delta \mathbf{E}_{i+1/2}^k \tag{9}$$

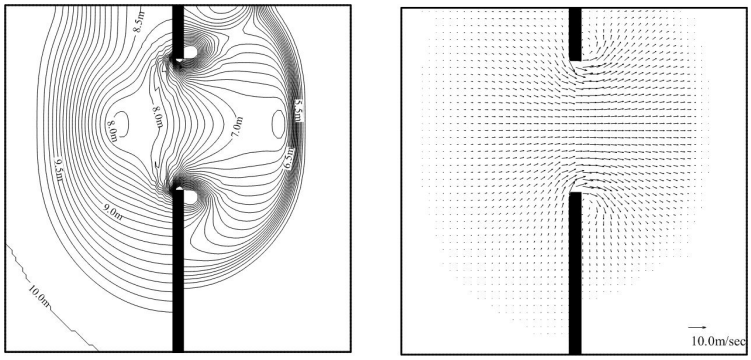
식 (9)의 c_k는 S_k에 대한 Courant 수로서 $\Delta t S_k/\Delta x$이며, $\psi_{i+1/2}^k$는 TVD 제한자, $\Delta \mathbf{E}_{i+1/2}^k$는 특성곡선 S^k에 의한 흐름률의 변화량이다.

4. 2차원 부분 댐 붕괴

본 연구에서는 Fennema와 Chaudhry(1990)이 실시한 2차원 부분 댐 붕괴에 의한 홍수파의 흐름을 균일격자와 분할격자를 이용하여 수치모형에 적용하고 그 결과를 비교하였다. 수치모의는 $200m \times 200m$의 크기의 하상의 경사가 없고 4경계가 닫힌 수조에서 수행된다. 초기의 수심은 $x=100m$에 위치한 댐에 의해 상류는 $10m$, 하류는 $5m$로 구분되어 진다. 중앙에 위치한 댐에서 발생하는 폭 $75m$의 급작스런 붕괴에 의하여 흐름이 발생하기 시작한다.

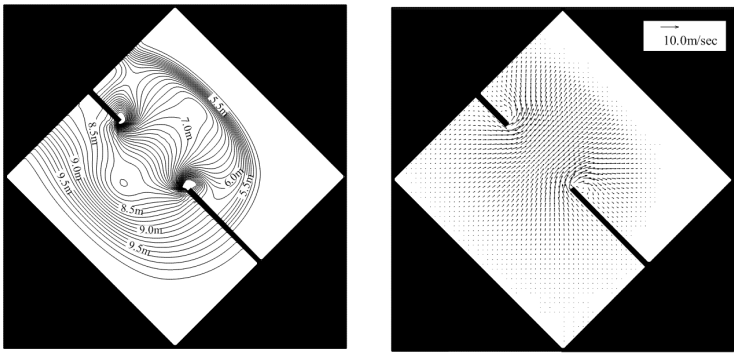
수치모의결과를 비교하기 위하여 붕괴후 $t=7.2\text{sec}$ 경과한 후의 수면의 형상과 유속분포를 도시화 하였다. 그림 (1)는 균일격자에 의한 수치결과이며 수심의 분포와 유속벡터도를 나

타내었으며, 그림 (2)은 흐름영역을 수조의 좌측하단을 중심으로 45° 회전하여 생성한 분할격자체계를 이용하여 도출된 수심과 유속벡터의 결과를 나타내었다. 수치격자는 $\Delta x = \Delta y = 2.0m$로 분할하였으며, 중앙에 위치한 댐의 폭은 $B = 4.0m$로 설정하였다.



(A) 수위분포도 (B) 유속벡터도

그림 1. 구조격자를 이용한 수치모의결과 ($t = 7.2\text{sec}$)



(A) 수위분포도 (B) 유속벡터도

그림 2. 분할격자를 이용한 수치모의결과 ($t = 7.2\text{sec}$)

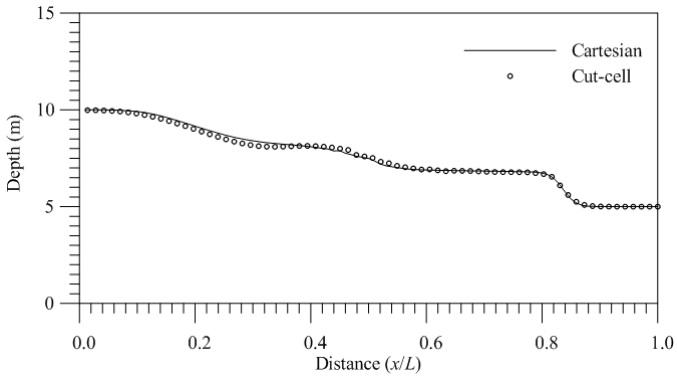


그림 3. 분할격자를 이용한 수치모의결과 ($t = 7.2\text{sec}$)

그림 (1)에서 살펴보듯이, 댐붕괴에 의한 흐름은 하류방향에 충격파를 발생시키며 전파가 진행되고 있으며, 전반적인 수심분포 및 유속벡터의 결과가 기존의 연구성과와 매우 잘 일치하게 나타나고 있다. 그림 (2)의 분할격자체계를 이용한 수치모의 결과는 그림 (1)의 매우

유사한 결과를 나타내고 있다. 이는 본 연구에서 적용한 수치모형이 $x-$축 및 $y-$축 방향의 유속을 매우 논리적으로 계산하고 있음을 나타내며, 본 연구에서 적용한 분할격자체계를 이용하여 급작스런 변화가 발생하는 흐름에 적용이 가능함을 나타내고 있다. 그림 (3)은 붕괴분의 중심을 따라서 수조의 횡방향의 수변형을 구조격자에 의한 결과와 분할격자에 의한 결과를 비교하였다. 두 격자에 의한 수면형의 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 구조격자와 일치하지 않은 형상의 흐름영역을 효율적으로 분할하는 분할격자체계를 이용하여 수치격자를 생성하였으며, HLLC기법과 TVD-WAF기법을 이용하여 지배방정식을 이상화한 수치모형을 적용하여 2차원 부분 댐 붕괴에 의한 홍수파의 흐름을 모의하였다. 수치모의 결과, 균일한 구조격자와 분할격자에 의한 수치모의 결과 모두 기존의 연구결과와 일치하는 흐름특성을 나타내었다. 이는 분할격자기법이 급작스럼 변화가 발생하는 자유수면흐름을 적절히 모의하고 있음을 나타낸다.

추후 다양한 문제에 대한 적용을 통하여 본 연구에서 개발한 모형을 검증하는 작업이 추가적으로 진행될 것이다.

감사의 글

본 연구는 국토해양부 해양수산연구개발사업(지진해일에 의한 동해 연안항 및 무역항 설계해면 산출)의 연구비 지원으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. Fraccarollo, L. and Toro, E. F. (1995). "Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problems." *J. Hydraul. Res.* Vol. 33, pp. 843-864
2. Fennema, R. J. and Chaudhry, M. H., (1990) "Explicit method for 2-D transient free-surface flows." Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 116, No. 8, pp. 1013-1034.
3. Morris, M. (2000). "CADAM: Concerted action on dambreak modeling-Final report." *Rep. No. SR 571*, HR Wallingford.
4. Toro, E. F. (1999). *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Springer.
5. Qian, L., Causon, D. M., Ingram, D. M. and Mingham, C. G. (2003) "Cartesian cut cell two-fuid solver for hydraulic flow problems." *Journal of Hydraulic Engineering.* Vol. 129, pp. 688-696.
6. Zhou, J. G., Causon, D. M., Mingham, C. G. and Ingram, D. M. (2004) "Numerical prediction of dam-break flows in general geometries with complex bed topography." *Hydraulic Engineering*, Vol. 130, No. 4, pp. 332-340.