

### Zolotarev 다항식을 이용한 2-D 노치 필터의 설계

조 광 현, 김 경 재, 남 상 원  
 한양대학교 공과대학 전자컴퓨터통신공학부

#### Design of a 2-D FIR notch filter using the Zolotarev polynomial

K.H. Cho, K.J. Kim, and S.W. Nam  
 Dept. of Electronics and Computer Eng., Hanyang Univ.

**Abstract** - 본 논문에서는 효율적인 2-D FIR 노치필터 디자인 방법을 제안한다. 주파수대역에서 bandstop 필터 형태를 보이는 Zolotarev 다항식을 Chebyshev 다항식으로 확장 적용한 1-D dc 노치필터의 설계 방법, 주파수 이동, 그리고 임펄스 응답의 2-D 선형 컨볼루션을 이용하여 효율적인 2-D FIR 노치 필터설계 방법을 제안한다. 시뮬레이션을 통하여, 설계된 2-D 노치필터 특성을 검증한다.

#### 1. 서 론

노치필터는 광대역 신호로부터 단일 주파수나 협대역 부분을 제거하기 위하여 사용이 된다. 1-D 노치필터의 예로는 통신에서 반송과 제거에 사용되고, 2-D 경우에는 이미지에서 첨가된 정현과 간섭을 없애는데 적용된다 [1]. 특히, 2-D 노치필터는 2-D 주파수 평면에서 특정 대역을 제외하고는 대부분 주파수 대역에서 동일한 크기 응답을 보인다. 특히, 2-D 노치필터를 디자인하는 방법으로는 유한 임펄스 응답(FIR) 필터와 무한임펄스 응답(IIR) 필터가 있다. 구체적으로, 유한 임펄스응답 필터는 선형위상 특성을 보이고 안정성이 보장되지만 많은 연산량이 요구되는 단점이 있다. 그러나 하드웨어의 발전으로 큰 연산량을 빠르게 처리할 수 있게되어, 2-D FIR 노치필터 설계방법이 최근 연구되고 있다. 예로서, Zolotarev 다항식을 이용한 2-D FIR 노치필터 설계방법이 제안되었는데 기존의 Parks-McClellan 기반의 필터 디자인 방법보다 필터 길이가 짧지만 여전히 많은 연산량이 요구된다는 문제가 있다 [2]. 최근 Zolotarev 다항식을 Chebyshev 다항식으로 확장하여 연산량을 줄일 수 있는 1-D DC 노치필터가 제안되었다 [3]. 본 논문은 1-D DC 노치필터의 설계방법, frequency shifting theory, 2-D 선형 컨볼루션을 통하여 기존의 Zolotarev 다항식을 이용한 2-D FIR 노치필터 설계 방법보다 연산량이 감소되고 주어진 filter specification을 만족하는 새로운 2-D FIR 노치필터의 설계 방법을 제안한다.

#### 2. 본 론

##### 2.1 Zolotarev 다항식을 이용한 기존의 2-D 노치필터 설계

Zolotarev 다항식은 Chebyshev 다항식의 확장된 형태로 다음과 같이 표현된다 [4].

$$Z_{p,q}(w) = \frac{(-1)^p}{2} \times \left[ \left( \frac{H\left(u - \frac{p}{n}K(k)\right)}{H\left(u + \frac{p}{n}K(k)\right)} \right)^n + \left( \frac{H\left(u + \frac{p}{n}K(k)\right)}{H\left(u - \frac{p}{n}K(k)\right)} \right)^n \right] \quad (1)$$

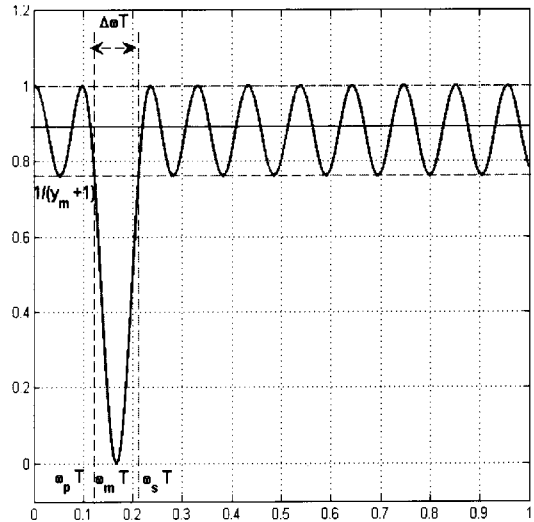
여기서  $p$ 와  $q$ 는  $[-1, a]$ 구간과  $[b, 1]$ 에서 각각 0의 값을 가지는 점의 개수이고, 다항식의 차수는  $p+q=N$ 이다.  $H(u(k))$ 는 Jacobi's elliptic Eta function,  $K(k)$ 는 the complete elliptic integral of the first kind이다. 2-D 노치필터를 설계하기 위해 먼저 식 (1)을 Chebyshev 다항식으로 확장하여 1-D 임펄스응답  $h(n)$ 을 구한다.

$$Z_{p,q}(w) = \sum_{k=0}^{(N-1)/2} a(k) T_k(w) \quad (2)$$

$N=2n+1$ ,  $a(0)=h(n)$ ,  $a(k)=2h(n-k)$ ,  $k=1, 2, \dots, n$ 이고  $T_k(w)$ 는 Chebyshev polynomial of the first kind이다. 식 (2)를 Chebyshev 2차 미분방정식에 대입하여  $a(n)$ 을 구하고 이를 정규화하여  $h(n)$ 을 구한다[4].

$$h(n) = \frac{y_n - a(0)}{y_n + 1}, \quad h(n \pm k) = -\frac{a(k)}{2(y_n + 1)}, \quad k=1, \dots, N \quad (3)$$

식 (3)의 임펄스 응답을 이용하여 디자인된 노치 필터의 주파수 특성은 그림 1과 같다. 식 (3)을 이용하여 원하는 노치 주파수 특성을 보이는 서로 다른 차 수의 두 1-D 임펄스 응답  $h_{1,1}[m]$ ,  $h_{2,2}[n]$ 을 구할 수 있는데, 그러한 두 1-D 임펄스응답을  $m \times n$ 의 매트릭스로 변환한 후 2-D 컨볼루션을 통하여 2-D 노치 필터를 설계할 수 있음이 보고되었다 [2]. 그러나 1-D 노치필터 설계과정에서 임펄스응답을 구하기 위해 사용되는 Jacobi's Zeta function  $y_n$ 를 구하기 위해 사용되는 Jacobi's Eta function의 inverse를 구하는 과정이 매우 복잡하고 연산량이 많이 요구되는 단점이 있다 [5].



<그림 1> Zolotarev 다항식을 이용한 1-D 필터의 주파수응답  
 $(w_p T=0.124\pi, w_m T=0.167\pi, w_s T=0.210\pi, \Delta\omega T=0.043\pi,$   
 $n=19, 10^{0.05a} = 1 - 2/(y_n + 1) = 0.763)$

##### 2.2 제안하는 2-D 노치필터 설계

최근, 기존의 Zolotarev 다항식을 이용한 1-D DC 노치필터가 제안되었다 [3][6]. 이는 기존의 방식에서 Chebyshev 다항식 확장을 통하여 임펄스응답을 구하는 과정을 간단히 하여 동일한 특성을 보이면서도 설계 과정과 필터의 길이를 줄이는 효과를 보인다. 1-D DC 노치필터의 설계과정은 다음과 같다. 특히, 필터의 임펄스응답을 구하고 필터 특성을 맞춰주는 generating 함수는

$$F(w) = T_n(\lambda w + \lambda - 1) = \sum_{m=0}^n A(m) T_m(w) \quad (4)$$

이다.  $T_k(w)$ 는 Chebyshev polynomial of the first kind이다. 실수 변수  $\lambda$ 는 필터의 대역통과 주파수  $w_p T$ 에 의해 결정된다.

$$\lambda = \frac{2}{1 + \cos(w_p T)} \quad (5)$$

Generating 함수  $F(w)$ 에서  $A(m)$ 을 계산하기 위해서 식 (4)를 Chebyshev 2차 미분방정식에 대입하여 전개한다. 전개한 식을 계산하면 간단하고 빠르게  $A(m)$ 을 구하는 반복적 식을 얻어낼 수 있다. 끝으로 1-D DC FIR 노치필터의 임펄스응답은 다음과 같다.

$$\bar{h}(0) = 1 - \frac{A(0)+1}{T_n(2\lambda-1)+1} \quad (6)$$

$$\bar{h}(\pm k) = -\frac{1}{2} \frac{A(k)+1}{T_n(2\lambda-1)+1}, \quad k=1, 2, \dots, n$$

임의의 노치 주파수를 가지는 2-D FIR 노치필터를 만들기 위해서, 필터의 특성을 만족하는 2-D 임펄스응답이 필요하다. 제안하는 설계 절차는 다음과 같다. 먼저 1-D 임펄스응답  $h_1[n]$ 을 구한다. 수정된 분석적 방법을 통해 구해진 dc FIR 노치필터의 임펄스응답에 frequency shifting theory를 이용하여 효과적으로 임의의 노치 주파수를 갖는 필터를 설계한다. 즉, 구하고자 하는 2-D 노치주파수를  $w_1$  그리고  $w_2$ 라고 하면 두 개의 1-D 임펄스응답은 식 (6)을 frequency shifting theory를 통해 얻을 수 있다.

$$h_1[n] = \exp(jw_1 n)h[n], \quad h_2[n] = \exp(jw_2 n)h[n] \quad (7)$$

식 (7)과 같이 임의의 노치 주파수 설정이 가능하다. 또한, 1-D 임펄스응답  $h_1[m]$ ( $m=n$ )와  $h_2[n]$ 을 zero padding하여 2-D 임펄스응답  $h_1[m, n]$ 와  $h_2[m, n]$ 을 구한다. 0이 아닌 계수는 다음과 같다.

$$h_1\left[\frac{M-1}{2}, n\right] = h_1[n], \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (8)$$

$$h_2\left[m, \frac{N-1}{2}\right] = h_2[m], \quad m = 0, 1, \dots, M-1$$

그리고 위에서 얻어진 2개의 2-D 임펄스응답  $h_1[m, n]$ ,  $h_2[m, n]$ 을 2-D 선형 이산 컨볼루션을 통하여 임펄스응답  $h_A[m, n]$ 을 구한다.

$$h_A[m, n] = h_1[m, n] ** h_2[m, n] \quad (9)$$

마지막으로,  $M \times N$  ( $M=N$ ) 크기의 2-D FIR 노치필터 임펄스응답  $h[m, n]$ 은 다음과 같다.

$$h[m, n] = -h_A[m, n], \quad \text{for } m \neq \frac{M-1}{2}, n \neq \frac{N-1}{2} \quad (10)$$

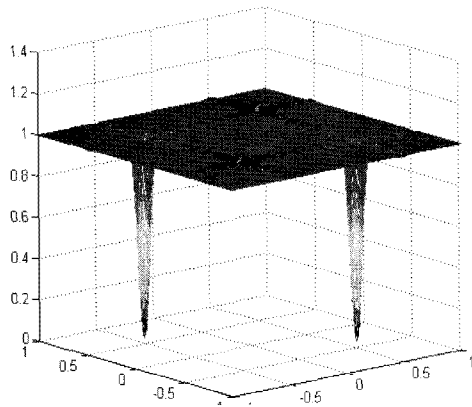
$$h\left[\frac{M-1}{2}, \frac{N-1}{2}\right] = 1 - h_A\left[\frac{M-1}{2}, \frac{N-1}{2}\right]$$

### 2.3 설계 예제와 적용

본 절에서는 2-D FIR 노치필터의 설계 예제와 이미지에서 정현파 간섭을 제거하는 예제를 보인다.

#### 2.3.1 FIR 노치필터 설계

$(w_1, w_2) = (0.5\pi, 0.5\pi)$ , 대역폭은  $0.08\pi$ , 그리고 통과대역 리플  $\alpha_{1,2} = -0.1dB$ 를 만족하는 2-D FIR 노치필터를 설계한다. 2-D 노치필터의 대역폭은 1-D DC 노치필터에서 요구되는  $w_p T$ 의 값의 두 배이다. 제시한 방법으로는 하나의 주파수 대역 특성을 보이기 때문에 2개의 필터를 연결하여 대역의 특성을 갖는 필터를 설계한다 (<그림 2> 참조). 2개를 연결하더라도 2-D 컨볼루션을 통해 얻어지는 필터의 길이는 변화가 없다. 필터의 길이는  $37 \times 37$ 이다.



<그림 2> 제안된 방법으로 설계된 2-D FIR 노치필터의 주파수응답

#### 2.3.2 정현파 간섭의 제거

<그림 3>은  $(w_1, w_2) = (0.5\pi, 0.5\pi)$ 의 정현파 간섭이 첨가된 Lena 이미지이다. 제안된 <그림 2> 필터를 사용하여 정현파 간섭을 제거한다 (<그림 4> 참조). 제안한 방법과 기존의 Zolotarev 방법과 Parks-McClellan 알고리즘(MATLAB 2008)을 이용한 설계 방법과 비교해본다. <표 1>는 동일한 필터 특성을 갖는 2-D 노치필터들의 개수를 비교해 놓은 것이다. <표 1>에서 보여주듯 제안한 방법이 Parks-McClellan 방법보다 53%, 기존의 Zolotarev 방법과는 35%의 필터 길이의 감소를 보인다. 따라서 본 방법은 동일한 특성에서 적은 차수의 필터 설계가 가능하다.

## 3. 결론

본 논문에서는 2-D FIR 노치필터의 새로운 설계 방법을 제안한다. 이 방법은 Chebyshev 다항식의 확장을 통하여 Zolotarev 다항식이 지니는 주파수 특성 형태를 이용하여 1-D 임펄스응답을 구한 뒤, 주파수 이동과 2-D 임펄스응답으로의 변환을 통해서 간단하고 필터길이가 짧은 2-D 노치필터를 디자인할 수 있다.

### [참고 문헌]

- [1] S. C. Pei, W. S. Lu, and C. C. Tseng, "Two-dimensional FIR notch filter design using singular value decomposition," IEEE Trans. Circuits and systems I: Fundamental Theory and Application, vol. 45, pp. 290-294, Mar. 1998.
- [2] Z. Pavel, and S. Boris, "Fast design of 2-D extremely narrow bandstop FIR filters," IEEE Int. Midwest Symp. Circuits and Systems, vol. 2, pp. 69-72, Jul. 2004.

[3] Z. Pavel, and V. Miroslav, "Note on the design an equiripple dc-notch FIR filter," IEEE Trans. Circuits and Systems II: Express Briefs, pp. 196-199, Feb. 2007.

[4] Z. Pavel, and V. Miroslav, "Fast analytical design algorithms for FIR notch filters," IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. 51, no. 3 pp. 608-623, Mar. 2004.

[5] X. K. Chen, and W. P. Thomas, "Analytic design of optimal FIR narrow-band filters using Zolotarev polynomial," IEEE Trans. Circuits and Systems, Signal Processing, vol. 33, pp. 1065-1071, Nov. 1986.

[6] Z. Pavel, and V. Miroslav, "An analytical procedure for critical frequency tuning of FIR filters," IEEE Trans. Circuit and System II: Express Briefs, pp. 72-76, Jan. 2006.

### Acknowledgments

This study was supported by a grant of the Korea Health 21 R & D Project, Ministry of Health & Welfare, Republic of Korea (02-PJ3-PG6-EV08-0001).



<그림 3> 정현파 간섭이 추가된 이미지



<그림 4> 필터통과 후 이미지

<표 1> 필터 길이 비교

비교대상	필터 특성			필터 길이
	노치 주파수	대역폭	리플	
Parks-McClellan	$(0.5\pi, 0.5\pi)$	$0.1\pi$	-1dB	$63 \times 63$
기존의 Zolotarev 방법	$(0.5\pi, 0.5\pi)$	$0.1\pi$	-1dB	$45 \times 45$
제안한 방법	$(0.5\pi, 0.5\pi)$	$0.1\pi$	-1dB	$29 \times 29$