

이산시간 선형 시스템에 대한 전역 최적 슬라이딩 제어기 설계

이재영*, 박진배*, 최윤호**
연세대*, 경기대**

A Design of Global Optimal Sliding Mode Controller for Discrete-Time Linear Systems

Jae Young Lee*, Jin Bae Park*, Yoon Ho Choi**
Yonsei University*, Kyonggi University**

Abstract - 본 논문에서는 궤적이 슬라이딩 평면 밖에 있는 경우에 대해서도 LQ 성능을 보장하는 최적 슬라이딩 모드 제어기 설계 방법을 제안한다. 본 논문에서 제안한 방법에서는 슬라이딩 평면상에 있을 경우뿐만 아니라 슬라이딩 평면 밖에서도 LQ 성능을 보장하기 위해 최적 슬라이딩 평면을 이용하여 제어기에 슬라이딩 변수에 선형적으로 의존하는 항을 추가한다. 또한, 제어기의 강인성을 위해 본 논문에서 제안된 새로운 외란 추정 기법을 제어기와 결합한다. 마지막으로, 컴퓨터 모의 실험을 통해 본 논문에서 제안한 제어기 설계 방법의 효용성을 검증하고자 한다.

Key Words - sliding mode, optimal sliding surface, optimal control, 최적제어, 슬라이딩 모드

1. 서 론

슬라이딩 모드(sliding mode) 제어 기법은 Emelyanov [1]와 Utkin [2]에 의해 처음 제안되었고, 현재까지도 많은 관련 연구가 진행되고 있다. 슬라이딩 모드 제어는 상태변수의 궤적을 슬라이딩 평면 상에 위치시킨 후, 제어기의 스위칭을 통해 그 궤적이 슬라이딩 평면상에 계속 남아 있도록 하는 제어 방법으로, 시스템에 인가되는 외란 및 불확실성이 유계(bounded)인 경우, 강인한 제어성능을 보여준다는 장점이 있다 [3].

한편, 최근까지 슬라이딩 모드 제어기(sliding mode control: SMC)의 최적화에 관한 연구가 진행되고 있는데, 이 중 소수만이 슬라이딩 평면의 최적 설계 방법에 대해 다루고 있다. [5-7] 또한, 제어기 설계에 있어 디지털 컴퓨터의 사용이 증가함에 따라 이산시간에서의 슬라이딩 모드 제어 기법에 대한 연구가 주목받고 있는데, 이에 따른 이산시간에서의 슬라이딩 평면의 최적 설계 방법에 대한 연구결과는 더욱 적은 편이다. 최근에 발표된 Janardhanan [5]의 최적 슬라이딩 평면은 슬라이딩 평면상에 궤적이 위치해 있을 때에 LQ 성능을 보장하도록 설계되었다. Janardhanan은 이를 외란 추정(disturbance estimator) 기법과 다중 출력 궤환(multirate output feedback) 기법과 결합하여 출력 궤환 최적 슬라이딩 제어기를 제안하였고, 모의실험을 통해 그 성능을 입증하였다 [5]. 하지만, Janardhanan의 슬라이딩 평면은 궤적이 슬라이딩 평면상에 있는 경우에만 LQ 성능이 보장된다는 단점이 있다. 즉, 궤적이 슬라이딩 평면 밖에 있는 경우에는 LQ 성능을 보장하지 못한다.

따라서, 본 논문에서는 궤적이 슬라이딩 평면 밖에 있는 경우에 대해서도 LQ 성능을 보장하는 향상된 제어기를 제안한다. 또한, 본 논문에서는 [4]와 [5]에서 제안한 외란추정기를 확장하여 새로운 형태의 외란추정기를 제안하며, 이를 본 논문에서 제안된 제어기와 결합한다. 최종 제어기는 LQ 성능을 보장하는 동시에 강인한 특성을 보여주며, 이를 모의 실험을 통해 검증하고자 한다.

2. 최적 전역 슬라이딩 제어기 설계

2.1 이산 시간 슬라이딩 평면

식 (1)과 같은 이산시간 시불변(time-invariant) 선형 시스템이 주어졌다고 하자.

$$z(k+1) = Fz(k) + Gu(k) + Hd(k) \quad (1)$$

여기서 $z(k) \in R^n$ 와 $u(k) \in R^m$, $d(k) \in R^r$ 는 각각 주어진 시스템의 상태 변수(state variable), 제어 입력(control input), 외란(disturbance)이고, $F \in R^{n \times n}$ 와 $G \in R^{n \times m}$, $H \in R^{n \times r}$ 는 시스템의 특성을 결정하는 행렬들이다. 본 논문에서는 식 (1)과 같은 시스템에 대해 다음과 같이 가정한다.

- 가정 1) 시스템 (F, G)는 제어가능(controllable)하다.
- 가정 2) 시스템 (1)에서의 외란 $d(k)$ 는 정합 조건(matching condition)을 만족한다.

가정 1)에 의해 행렬 H 는 $H = GE_2$, $E_2 \in R^{m \times r}$ 로 표현 가능하다. 또한, $x = [x_1^T \ x_2^T]^T$, $x_1 \in R^{n-m}$, $x_2 \in R^m$ 라 하면, 위 가정 1)과 2)에 의해 식 (1)의 시스템은 식 (2)와 같은 정규형식(normal form)으로 표현할 수 있다 [5].

$$\begin{cases} x_1(k+1) = A_{11}x_1(k) + A_{12}x_2(k) \\ x_2(k+1) = A_{21}x_1(k) + A_{22}x_2(k) + B_2u_{eq}(k) \end{cases} \quad (2)$$

여기서 B_2 는 가역행렬(invertible)이고, $u_{eq}(k)$ 는 식 (3)과 같다.

$$u_{eq}(k) = u(k) + B_2^{-1}E_2 d(k). \quad (3)$$

본 논문에서 제어기 $u(k)$ 의 설계에 이용되는 슬라이딩 평면은 식 (4)와 같다.

$$\begin{aligned} s(k) &:= c^T x(k) \\ &:= [K \ I]x(k) = Kx_1(k) + x_2(k) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 $s(k) \in R^m$, $K \in R^{m \times (n-m)}$ 이고, K 는 2.2절에서 최적으로 설계될 이득 행렬(gain matrix)이다. 우리는 이를 확장하여 위 슬라이딩 평면과 슬라이딩 모드 제어기를 최적관점에서 설계하고, 외란 추정 기법을 이용하여 이를 강인하게 한다.

2.2 최적 슬라이딩 모드 제어

Janardhanan은 $s(k) = 0$ 일 때, 식 (5)와 같이 비용함수(cost function)

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} x^T(k) Qx(k) + u_{eq}^T(k) R u_{eq}(k) \quad (5)$$

를 최소화시키는 슬라이딩 평면 $s^*(k)$ 를 제안하였다. 이 때 $0 \leq Q \in R^{n \times n}$, $0 < R \in R^{m \times m}$ 이다. 본 절에서는 정리 1을 통해 슬라이딩 변수의 값에 관계없이 항상 최적의 제어 성능을 보이는 슬라이딩 평면과 슬라이딩 모드 제어기를 제안한다.

정리 1: 시스템 (2)에 대해 비용함수 (5)를 최소화시키는 최적 제어 입력을 $u_{eq}^* = Fx := [F_1 \ F_2]x$ 라 하자. 만일 슬라이딩 평면의 이득행렬 K 가

$$KA_{12}K + (A_{22} + B_2F_2)K - KA_{11} - (B_2F_1 + A_{21}) = 0 \quad (6)$$

를 만족하고, $P = -KA_{12} - A_{22} - B_2F_2$ 를 만족하는 행렬 P 에 대해 식 (2)의 시스템의 입력 $u_{eq}(k)$ 가

$$\begin{aligned} u_{eq}(k) &= -B_2^{-1}[c^T Ax(k) + Ps(k)] \\ &= -B_2^{-1}[c^T Ax(k) + Pc^T]x(k) \end{aligned} \quad (7)$$

와 같이 주어지면, 위 슬라이딩 모드 제어기는 식 (5)의 비용함수를 최소화시키며, 최소비용 J^* 은 식 (8)과 같이 주어진다.

$$J^*(x) = x^T Lx, \quad L = A^T LA - F^T B^T LBF + Q - F^T R F \quad (8)$$

여기서 B 는 $B = [O^T \ B_2^T]^T$ 로 정의된다.

증명: 지면 제한 관계로 본 정리의 증명은 생략한다.

정리 1의 식 (6)은 Janardhanan이 제안한 최적 슬라이딩 평면 공식 [5]과 일치하는 것을 볼 수 있다. 이는 전체 상태공간상의 어떤 점에서도 최적 이 되기 위해서는 $s=0$ 위에서도 당연히 최적 이 되어야 함을 생각하면, 당연한 결과임을 알 수 있다.

2.3 외란 추정 기법

2.2절의 결과를 통해, 슬라이딩 평면의 이득행렬 K 와 제어기 $u_{eq}(k)$ 를 적절히 설계하면, 식 (8)의 비용함수 J^* 를 최소화할 수 있다는 것을 알 수 있다. 한편, 실제 설계해야 하는 제어 입력은 $u(k)$ 이고, 이는 식 (3)에서 볼 수 있듯이 외란 $d(k)$ 와 $u_{eq}(k)$ 에 의존한다. 한편, $d(k)$ 는 직접 측정할 수 없는 외란이므로, 이를 다른 변수를 이용하여 추정해야만 한다. 본 절에서는 [4]와 [5]에서 제안한 외란 추정 기법을 확장하여 위의 최적 슬라이딩 모드 제어기에 적용한다. 이를 위해 식 (4)를 다시 쓰면, 식 (9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$s(k) = c^T Ax(k-1) + B_2u(k-1) + E_2d(k-1) \quad (9)$$

또한, 식 (3)을 이용하면, 식 (7)은 식 (10)과 같이 변형 가능하다.

$$u(k) = -B_2^{-1}[c^T Ax(k) + Ps(k) + E_2 d(k-1) + E_2 \Delta d(k)] \quad (10)$$

여기서, $\Delta d(k) := d(k) - d(k-1)$ 이다. 식 (9)를 이용하면, 식 (10)은 식 (11)과 같이 변형할 수 있다.

$$u(k) = u(k-1) - B_2^{-1}[c^T A \Delta x(k) + (P + I)s(k) + E_2 \Delta d(k)] \quad (11)$$

3. 결 론

본 논문에서는 슬라이딩 평면 이외의 점에서도 최적의 성능을 보이는 슬라이딩 모드 제어기 설계 방법을 제안하였다. 본 논문에서 제안한 제어기는 새로운 외란 추정기와 결합하여 강인한 성능을 보여주었고, 학습률과 외란에 대한 조건으로부터 전체 시스템의 안정도를 분석하였다. 모의 실험에서는 초기응답성을 향상시키기 위해 학습률을 시간에 따라 변화시켰으며, 모의실험 결과들을 통해 제안한 제어기의 향상된 성능을 보여주었다.

여기서, $\Delta x(k) := x(k) - x(k-1)$ 이다. 이제, 식 (11)에서 유일하게 모르는 값 $E_2 \Delta d(k)$ 를 $\hat{\Delta d} := E_2 \Delta d$ 로 정의한 후, 이 값을 식 (12)와 같은 외란 추정기를 이용하여 추정한다.

$$\hat{\Delta d}(k+1) = \hat{\Delta d}(k) - \eta(k)[Ps(k) - s(k+1)] \quad (12)$$

여기서 $\hat{\Delta d}$ 는 Δd 의 추정치이고, $\eta(k)$ 는 학습률(learning rate)을 나타낸다. 이제 식 (12)를 이용하여 식 (11)을 근사화하여 최종 제어를 구하면, 식 (13)과 같다.

$$u(k) \approx u(k-1) - B_2^{-1}[c^T A \Delta x(k) + (P+I)s(k) + \hat{\Delta d}(k)] \quad (13)$$

기존의 외란 추정기법은 상수값의 외란에 대해서는 전체 폐루프 시스템이 점근적으로 안정하였다 [4-5]. 본 논문에서 제안한 외란 추정기법은 상수값을 갖을 때 뿐만 아니라 선형적으로 변화하는 외란에 대해서도 점근적으로 안정하다는 장점이 있다. 위 제어기를 이용한 폐루프 시스템의 안정도는 $\eta(k)$ 값에 의하여 결정되는데, 다음 정리는 이를 보여준다.

정리 2 : 시스템 (2)의 제어 입력이 식 (12)와 같다고 하자. 만일 외란 $d(k)$ 와 학습률 $\eta(k)$ 가

$$1) \|\Delta^2 d\| \leq M \quad (14)$$

$$2) 0 < \eta(k) < 1 \quad (15)$$

를 만족시키면, 변수 $s(k)$ 와 $\hat{\Delta d}$ 는 궁극적 균등 유계(uniformly ultimately bounded)이다. 여기서 $\hat{\Delta d} := \hat{\Delta d} - \Delta d$ 와 같이 정의되고, $\Delta^2 d(k) := \Delta d(k) - \Delta d(k-1)$ 이다.

증명: 지면 제한 관계로 본 정리의 증명은 생략한다.

2.4 모의실험

본 논문에서 제안한 제어기의 성능을 알아보기 위해 다음과 같은 행렬을 갖는 시스템에 대하여 모의 실험을 수행하였다.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & -6 & -5 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

본 모의 실험에서 행렬 Q, R 은 각각 $Q = I_4, R = I_2$ 와 같이 설정하였고, 제어기 설계를 위해 구한 행렬 L 과 이득행렬 K, P 는 다음과 같이 계산되었다.

$$L = \begin{bmatrix} 35.0460 & -111.7702 & 86.4780 & -54.9261 \\ -111.7702 & 519.8225 & -517.6056 & 205.1326 \\ 86.4780 & -517.6056 & 581.3673 & -180.6868 \\ -54.9261 & 205.1326 & -180.6868 & 108.6926 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.0897 & -0.8598 \\ -0.2461 & 0.2118 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1.0375 & -0.4340 \\ 2.7755 & -1.1897 \end{bmatrix}$$

시스템과 외란추정기의 상태변수 x 와 $\hat{\Delta d}$ 의 초기조건 $x(0)$ 와 $\hat{\Delta d}(0)$ 은 $x(0) = [1 \ 3 \ -3 \ 2]^T$ 와 $\hat{\Delta d}(0) = 0$ 로 설정하였고, 시스템에 인가되는 외란 $d(k)$ 는 다음과 같은 파형으로 가정하였다.

$$d_1(k) = \begin{cases} 0, & 0 \leq k \leq 25 \\ (k-25)/25, & 25 \leq k \leq 50 \\ -(k-50)/12.5 + 1, & 50 \leq k \leq 75 \\ 1, & 75 \leq k \leq 100 \end{cases}$$

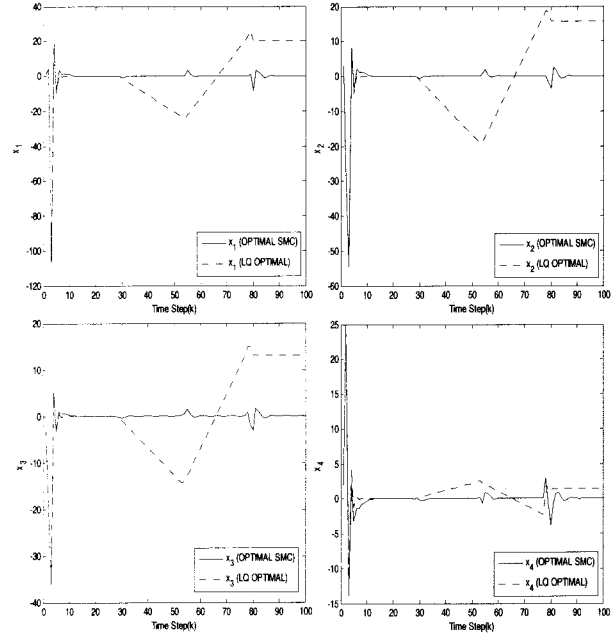
$$d_2(k) = \begin{cases} 0, & 0 \leq k \leq 25 \\ -(k-25)/12.5, & 25 \leq k \leq 50 \\ (k-50)/6.25 + 1, & 50 \leq k \leq 75 \\ 3, & 75 \leq k \leq 100 \end{cases}$$

한편, 초기에는 외란이 "0"이고, $\hat{\Delta d}(0) = 0$ 이므로, 초기의 $\hat{\Delta d}(k)$ 도 "0"이 되어 하지만, 도착 단계(Reaching Phase)에서는 슬라이딩 변수 $s(k)$ 가 0이 아니므로, 식 (12)에 의해 추정오차가 오히려 증가하며, 이는 $s(k) \approx 0$ 이 될 때까지 계속되는 진동을 야기한다. 이는 결국 제어 성능을 저하시키게 되며, 이를 방지하기 위해서는 도착 단계에서의 학습률을 매우 작은 값으로 설정해 주어야 한다. 이를 위해 본 모의실험에서는 학습률을 식 (16)과 같이 설정하여 초기의 도착단계에서의 학습률을 매우 작게 하였다.

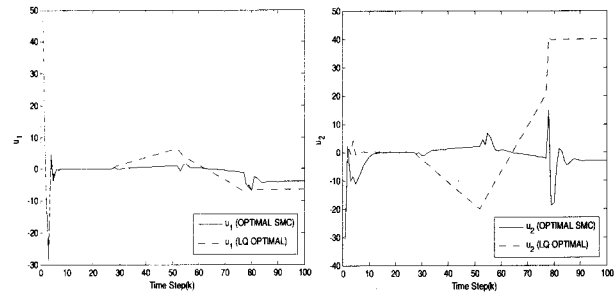
$$\eta(k) = 0.7[1 - \exp(-2k)] \quad (16)$$

한편, 도착 단계 이후에는 학습률이 급수록 외란을 더 빠르게 추정하게 되어 제어기의 성능이 향상되는데, 이를 위해 지수함수를 이용하여 학습률이 단조 증가하도록 학습률을 식 (16)와 같이 설정하였다.

그림 1과 2는 모의실험의 결과를 나타내는데, 그림 1을 보면, 본 논문에서 제안한 제어기를 사용한 경우에 외란에 대해 훨씬 강인한 성능을 보임을 확인할 수 있다. 기존의 LQ 최적 제어 기법을 사용하였을 경우 외란에 의해 매우 큰 섭동(perturbation)이 발생함을 볼 수 있다. 또한, 그림 2를 보면, 최적 SMC의 입력값이 더 작음을 알 수 있는데, 이는 최적 SMC를 사용하면, LQ 최적 제어기의 경우에 비해 더 작은 입력을 가지므로 더 좋은 성능을 낼 수 있다는 것을 확인할 수 있다.



<그림 1> 상태 변수 궤적(최적 SMC vs. LQ 최적 제어)



<그림 2> 상태 변수 궤적(최적 SMC vs. LQ 최적 제어)

[참 고 문 헌]

- [1] S.V. Emelyanov, *Variable structure control systems*, in. Moscow, Russia: Nauka, 1967.
- [2] V. I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes", *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 22, no. 2, pp. 212-222, April, 1997.
- [3] J.-J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1991.
- [4] Y. Eun, J. Kim, K. Kim, and D. Cho, "Discrete-time variable structure controller with a decoupled disturbance compensator and its application to a CNC servomechanism", *IEEE Trans. Control Sys. Tech.*, vol. 7, no. 4, pp. 414 - 423, July, 1999.
- [5] S. Janardhanan and V. Kariwala, "Multirate-rate-output-feedback-based LQ-optimal discrete-time sliding mode control", *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 53, no. 1, pp. 367 - 373, Feb., 2008.
- [6] W. Gao, Y. Wang, and A. Homaifa, "Discrete-time variable structure control systems", *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 42, no. 2, pp. 117 - 122, April, 1995.
- [7] C. Y. Tang and E. A. Misawa, "Sliding surface design for a discrete VSS using LQR technique with a preset eigenvalue", in *Proc. American Control Conference*, San Diego, CA, June, 1999, pp. 520 - 524.