

비선형 시스템의 invariance immersion 적응제어

이의권, 조성수, 이호진, 이금원, 이준모
 관동대학교 공과대학 전자정보통신공학부

Invariance and Immersion Control of Nonlinear System

Eui Kwon Lee, Sung Su Cho, Ho Jin Lee, Keum Won Lee, and Jun Mo Lee
 Division of Electronic Information communication Eng Dept

Abstract - 본 논문에서는 비행기 모델을 대상으로 invariance and immersion 방법을 적용하여 비선형 제어를 설계한다. 이 방법을 사용하면 추정오차에 대한 추정식 형태로 off-the-manifold 좌표축을 정의하고, dynamics를 구하고, 이로부터 파라미터 적응규칙을 유도한다. 제어기는 이와 관련된 파라미터로부터 선형화하지 않고 직접 설정하며, 마지막으로 리아프노프 함수를 통하여 알고리즘의 안정성을 증명한다.

1. 서 론

적응제어분야에서 모델기준 적응제어(MRAC)는 적응제어 분야에서 폭넓게 사용이 되고 있다. 그렇지만, 동시에 플랜트 상태와 파라미터를 추정하기에 추정하는 방법 대신에 직접제어 파라미터법(Direct Control Parameterization)도 연구가 되어 왔다. 이 방법은 플랜트 상태를 직접적으로 추정하지 않고, 제어기 파라미터를 잘 추정하는데 목적을 가지고 있다. 이러한 파라미터방법은 간단하다는 장점이 있다. 아울러 MRAC에서 나타나는 추정오차를 상태방정식형태로 변형하여 상태와 파라미터 추정을 동시에 하는 방법도 있다. 이러한 방법은 Ortega등이 시도한 방법으로서 적응 I&I 방법이라고 한다[1]. 본 논문에서는 적응 I&I 방법을 비선형 시스템인 항공시스템(aeroelastic system)에 적용하여 비선형 구조를 갖는 윙(wing) 부분의 제어에 적용한다. Matlab 시뮬레이션 결과를 제시하여 방법을 유용성을 보인다.

2. Invariance Immersion 적응제어

2.1 시스템 모델

비행체 시스템의 모델로부터 다음과 같은 참고문헌 [2]에서 얻는다.

$$\begin{pmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{pmatrix} u_0 \equiv \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u \quad (1)$$

$$= \begin{pmatrix} f_1 \\ \psi_1^T \theta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u$$

여기서 h 는 플랜지 거리이고, α 는 피치각이다. 또 시스템파라미터는 $b_2 > 0, u = -u_0, b_2 = -b_{20}, b_1 = -b_{10}, \psi_1^T = [h, \alpha, \dot{h}, \dot{\alpha}, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5] \in R^8, \theta_1 \in R^8, b_1^{-1} = \theta_2$ 이다. 또 invariance immersion을 위해서 다음 신호를 정의한다.

$$\begin{aligned} z_1 &= \hat{\theta}_1 + \beta_1 - \theta_1 \\ z_2 &= \hat{\theta}_2 + \beta_2 - b_1^{-1} \end{aligned} \quad (2)$$

이 신호를 사용한 제어신호는

$$u = (\hat{\theta}_2 + \beta_2)v, \hat{\theta}_1 = (\hat{\theta}_{11}, \hat{\theta}_{12}, \hat{\theta}_{13}, \hat{\theta}_{14}, \hat{\theta}_{15}, \hat{\theta}_{16}, \hat{\theta}_{17}, \hat{\theta}_{18})^T \quad (3)$$

와 같이 정의한다. 한편 식 (3)의 좌변에 b_1 를 곱하고 정리하면

$$b_1 u = b_1(\hat{\theta}_2 + \beta_2)v = b_1(z_2 + b_1^{-1})v = b_1 z_2 v + v \quad (4)$$

가 된다. 따라서 식 (1)의 \dot{h} 의 관한 식은 다음과 같이 둘 수 있다.

$$\dot{h} = \psi_1^T \theta_1 + v + b_1 z_2 v \quad (5)$$

2.2 제어기 설계

제어기를 설계하기 위해서 다음과 같은 신호를 정의한다.

$$s = \dot{h} - \dot{h}_r + \lambda(h - h_r) = \dot{z} + \lambda \tilde{h}, \lambda > 0 \quad (6)$$

이와 같이 하는 이유는 피치각 및 피치각속도도 동시에 제어를 하기 위해서이다. 또 제어기를 구성하기 위해서 신호 v 는 다음과 같이 정의한다.

$$v \equiv -\psi_1^T(\hat{\theta}_1 + \beta_1) - ks + \dot{h}_r - \lambda \tilde{h} \quad (7)$$

이 값들은 모두 기지(known)이기 때문에 구현이 가능하다. 한편 이 신호를 사용하면 식 (5)는

$$\dot{h} = \psi_1^T(\theta_1 - \hat{\theta}_1 - \beta_1) - ks + \dot{h}_r - \lambda \tilde{h} + b_1 z_2 v \quad (8)$$

가 된다. 또 식 (6)을 미분하면

$$\dot{s} = -\psi_1^T z_1 - ks + \dot{h}_r - \lambda \dot{\tilde{h}} + b_1 z_2 v - \dot{h}_r + \lambda \dot{\tilde{h}} \quad (9)$$

$$= -\psi_1^T z_1 - ks + b_1 z_2 v$$

가 된다. 여기서 식 (5) 결과를 사용하였다.

2.3 Lyapunov함수

제어기의 안정성을 증명하기 위해서 다음과 같은 Lyapunov함수를 설정한다.

$$V_1 = s^2$$

이 함수를 미분하고, 위의 식 (9)의 결과를 대입하면

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= 2ss = 2s(-\psi_1^T z_1 - ks + b_1 z_2 v) \\ &= -2ks^2 - 2s\psi_1^T z_1 + 2sb_1 z_2 v \end{aligned} \quad (10)$$

를 얻는다. 위 식은 Lyapunov의 안정성 원리를 만족하지 못하기 때문에 다음과 같은 추정기를 만들어 함수를 수정한다.

2.4 추정기

우선 간편히 하기 위해서 필요한 벡터를 다음과 같이 정의한다.

$$z = (z_1^T, z_2^T)^T, \hat{\theta} = (\hat{\theta}_1^T, \hat{\theta}_2^T)^T, \theta = (\theta_1^T, \theta_2^T)^T, \beta = (\beta_1^T, \beta_2^T)^T, \theta, \hat{\theta} \in R^9$$

$$\theta_2, \beta_2 \in R, \beta_1 \in R^8$$

이 정의에 따르면

$$z = \hat{\theta} + \beta - \theta \quad (11)$$

이고, 또 β 는 $(\alpha, h, \dot{\alpha}, \dot{h}, \ddot{h}, \ddot{h}_r, \dot{h}_r, \hat{\theta}_1)$ 의 함수이다. 따라서 z 의 도함수는 다음과 같은 형태로 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \dot{\hat{\theta}} + \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \beta}{\partial h} \dot{h} + \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial \beta}{\partial \dot{h}} \ddot{h} + \frac{\partial \beta}{\partial \dot{\alpha}} \ddot{\alpha} + \frac{\partial \beta}{\partial \ddot{h}} \ddot{\ddot{h}} \\ &= \dot{\hat{\theta}} + \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \beta}{\partial h} \dot{h} + \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial \beta}{\partial \dot{h}} \ddot{h} + \frac{\partial \beta}{\partial \dot{\alpha}} \ddot{\alpha} + \frac{\partial \beta}{\partial \ddot{h}} \ddot{\ddot{h}} + \frac{\partial \beta}{\partial \ddot{h}_r} \ddot{\ddot{h}}_r + \frac{\partial \beta}{\partial \dot{h}_r} \ddot{\dot{h}}_r + \frac{\partial \beta}{\partial \hat{\theta}_1} [\psi_1^T \theta_1 + v + b_1 z_2 v] \end{aligned} \quad (12)$$

2.5 적응규칙

한편 식 (2)에서 $\dot{\hat{\theta}}$ 는 다음과 같은 적응 규칙으로 얻을 수 있다.

$$\dot{\hat{\theta}} = \left(I_{9 \times 9} + \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \right)^{-1} \left[-\frac{\partial \beta}{\partial h} \dot{h} - \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \dot{\alpha} - \frac{\partial \beta}{\partial \dot{h}} \ddot{h} - \frac{\partial \beta}{\partial \dot{\alpha}} \ddot{\alpha} - \frac{\partial \beta}{\partial \ddot{h}} \ddot{\ddot{h}} \{ \psi_1^T(\hat{\theta}_1 + \beta_1) + v \} \right] \quad (13)$$

이 식을 위의 식 (12)에 대입하면

$$\dot{z} = -\frac{\partial \beta}{\partial \theta} \psi_1^T z_1 + \frac{\partial \beta}{\partial h} b_1 z_2 v \equiv -\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \left[\psi_1^T, -b_2 v \right] \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \equiv -\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \psi^T z \quad (14)$$

가 된다. 또

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha} = \gamma_1 \psi_1, \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha} = -\gamma_2 v, \gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0 \quad (15)$$

와 같이 두고, γ_1, γ_2 는 실제 파라미터로 하여 시뮬레이션 시 선택한다. 이 식을 사용하여 식 (7)을 정리하면

$$\dot{z} = -\begin{pmatrix} \gamma_1 \psi_1 \\ -\gamma_2 v \end{pmatrix} \psi^T z = -\begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 b_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ -b_1 v \end{pmatrix} \psi^T z \equiv -\Gamma \psi \psi^T z, \Gamma \equiv \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 b_1^{-1} \end{pmatrix} \quad (16)$$

가 된다. 한편 식 (14)는 리아프노프함수 조건을 만족하지 못하므로 다음 함수를 추가한다.

$$V_2 = z^T \Gamma^{-1} z \quad (17)$$

또 이 함수를 미분하면

$$\dot{V}_2 = 2z^T \Gamma^{-1} \dot{z} = -2z^T \Gamma^{-1} \Gamma \psi \psi^T z = -2z^T \psi \psi^T z = -2(\psi^T z)^2 \quad (18)$$

을 얻는다. 한편 식 (15)에서 β_1 를 구한다.

$$\beta_1 = \gamma_1 \int^h \psi_1 d\lambda = \gamma_1 \left[h, \alpha, \frac{h}{2}, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5 \right]^T h \quad (19)$$

식 (1) 이후에서 정의된 ψ_1 에서 적분변수인 부분과 아닌 부분을 구분하는 데서 얻을 수 있다. 같은 방법으로 β_2 를 구하면

$$\beta_2 = -\gamma_2 \int_0^h v d\lambda = \gamma_2 \int_0^h (\psi_1^T \hat{\theta}_1 + \psi_1^T \beta_1 + ks - \ddot{h}_r + \lambda \dot{h}) d\lambda \quad (20)$$

가 된다.

또 식 (13)에서 필요한 $\frac{\partial \beta}{\partial \theta}$ 를 구하면

$$\frac{\partial \beta}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{8 \times 8} & 0_{8 \times 1} \\ \gamma_2 \gamma_1^{-1} \beta_1^T & 0_{1 \times 1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{9 \times 9}, \hat{\theta} \in \mathbb{R}^9, \beta \in \mathbb{R}^9 \quad (21)$$

가 되어 식 (13)의 우변의 일부분 항은

$$\left(I_9 \times 9 + \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \right) = \begin{pmatrix} I_8 \times 8 & 0_{8 \times 1} \\ \gamma_1^{-1} \gamma_2 \beta_1^T & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{9 \times 9} \quad (22)$$

가 된다. 식 (5)에서

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial t} = -\gamma_2 [-\dot{h}_r^{(3)} - \lambda \ddot{h}_r + k(-\ddot{h}_r - \lambda \dot{h}_r)] \dot{h}, \frac{\partial \beta_1}{\partial t} = 0_{8 \times 1} \quad (23)$$

$$\text{단, } \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_r} \dot{\alpha}_r + \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_r} \dot{\alpha}_r$$

와 같이 구한다. 또

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial h} = [\gamma_1 \dot{h}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \quad (24)$$

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial h} = \gamma_2 \hat{\theta}_{11} \dot{h} + \gamma_1 \gamma_2 h \dot{h}^2 + \gamma_2 \lambda \dot{h} k \quad (25)$$

와 같이 구하고 α 에 관한 편미분은

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha} = \gamma_1 [0, 1, 0, 0, 2\alpha, 3\alpha^2, 4\alpha^3, 5\alpha^4]^T \dot{h} \quad (26)$$

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha} = \gamma_2 (\hat{\theta}_{12} + 2\alpha \hat{\theta}_{15} + 3\alpha^2 \hat{\theta}_{16} + 4\alpha^3 \hat{\theta}_{17} + 5\alpha^4 \hat{\theta}_{18}) \dot{h} + \gamma_2 k \lambda \dot{\alpha} + \gamma_2 \gamma_1 (2\alpha + 4\alpha^3 + 6\alpha^5 + 8\alpha^7 + 10\alpha^9) \frac{\dot{h}^2}{2} \quad (27)$$

와 같이 계산하며, 기타 편미분도 같은 방법으로 구한다.

α 은 가속도계를 사용하여 실제 시스템으로부터 얻는다고 가정한다.

2.6 안정도 해석

V_1, V_2 를 사용한 리아프노프 함수는

$$V = V_1 + k^{-1} V_2 \quad (28)$$

로 정하고, 이를 미분하면

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -2ks^2 - 2s[\psi_1^T, -b_2 v] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} - k^{-1} 2(\psi^T z)^2 \\ &= -2ks^2 - 2s\psi^T z - k^{-1} 2(\psi^T z)^2 \end{aligned} \quad (29)$$

가 되는데, 부등식의 정리를 사용하면 식 (29)는

$$\dot{V} \leq -2ks^2 + ks^2 + \frac{(\psi^T z)^2}{k} - \frac{2(\psi^T z)^2}{k} = -ks^2 - \frac{(\psi^T z)^2}{k} \quad (30)$$

가 된다. 이 식으로부터 시간 $t \rightarrow \infty$ 한계에 따라서, $s \rightarrow 0, \psi^T z \rightarrow 0$ 가 됨을 알 수 있다. 이것은 $\alpha \rightarrow \alpha_r$ 가 됨을 의미한다.

2.7 고전 적응제어

비교를 위해서 일반적인 고전적인 방법의 적응제어를 고려한다. 고전적인 적응제어에서는

$$u = \hat{\theta}_2 v \quad (31)$$

로 제어신호를 정의한다. 여기서

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1 - \theta_1, \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2 - \theta_2 = \hat{\theta}_2 - b_1^{-1} \quad (32)$$

로 정의한다. 비교를 위해서 같은 식 (6)의 정의로부터 이 식을 미분하면

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \psi^T \hat{\theta}_1 + b_2 \hat{\theta}_2 v - \ddot{h}_r + \lambda \dot{h}_r = \psi^T \hat{\theta}_1 + v + b_1 v \hat{\theta}_2 - \ddot{h}_r + \lambda \dot{h} \\ (\because b_1 \hat{\theta}_2 v &= b_1 (\hat{\theta}_2 + b_1^{-1}) v = b_1 \hat{\theta}_2 v + v) \end{aligned} \quad (33)$$

를 얻는다. 식 (31)에서 사용되는 v 는

$$v = -\psi_1^T \hat{\theta}_1 - ks + \ddot{h}_r - \lambda \dot{h} \quad (34)$$

라고 둔다. 식 (34)에 대입하면

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \psi_1^T \hat{\theta}_1 + b_2 \hat{\theta}_2 v - \psi_1^T \hat{\theta}_1 - ks + \ddot{h}_r - \lambda \dot{h} - \ddot{h}_r + \lambda \dot{h} \\ &= -\psi_1^T \hat{\theta}_1 + b_2 \hat{\theta}_2 v - ks \end{aligned} \quad (35)$$

가 된다. 한편 안정도를 판별하기 위해서 리아프노프 함수를 다음과 같이

둔다.

$$W = s^2 + \gamma_1^{-1} \hat{\theta}_1^T \hat{\theta}_1 + b_1 \gamma_2^{-1} \hat{\theta}_2^2 \quad (36)$$

이 함수를 미분하면

$$\dot{W} = 2s[-\psi_1^T \hat{\theta}_1 + b_1 \hat{\theta}_2 v - ks] + 2\gamma_1^{-1} \hat{\theta}_1^T \dot{\hat{\theta}}_1 + b_1 2\gamma_2^{-1} \hat{\theta}_2 \dot{\hat{\theta}}_2 \quad (37)$$

가 되고 식 (35)을 대입하면

$$\dot{W} \leq 2\hat{\theta}_1^T (-s\psi + \gamma_1^{-1} \dot{\hat{\theta}}_1) + 2b_1 \hat{\theta}_2 (sv + \gamma_2^{-1} \dot{\hat{\theta}}_2) - 2ks^2 \quad (38)$$

가 된다.

적용규칙

한편 식 (38)은 리아프노프함수 조건을 만족하지 못하기 때문에 다음의 적용규칙을 만든다.

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \hat{\theta}_1 + \gamma_1 s \psi_1, \dot{\hat{\theta}}_2 = -sv \gamma_2 \quad (39)$$

또, 이 값을 식 (38)에 대입하면 $\dot{W} = -2ks^2 \leq 0 \Rightarrow s \rightarrow 0$ 가 된다. 따라서 $t \rightarrow \infty$ 한계에 따라서 $s \rightarrow 0$ 이 된다.

3. 시뮬레이션

본 논문에서 비행기 모델 시스템은 참고문헌 [2]의 값들을 사용한다. 시스템 파라미터로 $a = -0.6847, U = 25$ 를 사용하는데, 이 값으로는 시스템은 최소위상시스템이 된다. 기타 설계 파라미터 값으로는 $\lambda = 100, \lambda_1 = \lambda_2 = 50, h(0) = 0.01, \alpha(0) = 10(\text{deg}), \dot{\alpha}(0) = \dot{h}(0) = 0$ 를 사용하였고, 추정기에 사용되는 초기값을 모두 0으로 하였다. 또 추종하게 될 기준신호는

$$(s^2 + 2\rho_1 \omega_1 s + \omega_1^2)(s^2 + 2\rho_2 \omega_2 s + \omega_2^2) \ddot{h}_r(t) = 0 \quad (40)$$

목표치는 $h^* = 0$ 으로 하였다. 이때 이 4차 필터의 파라미터로는 $\rho_1 = 1, \rho_2 = 2, \omega_1 = \omega_2 = 1$ 을 사용하였다. 그림 1은 추종오차 및 제어입력을 고전적응제어 결과와 같이 보여주고 있다. 본 논문에 의한 방법이 추종오차가 적으며, 과도기에서 더 적은 제어입력신호 값을 보여 주고 있다.

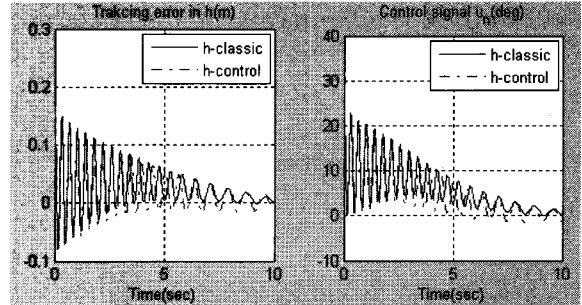


그림 1 추종오차 및 제어입력

4. 결 론

본 논문에서는 I&I(Invariance and Immersion method)를 비행기 모델에 적용하여 적응제어기를 설계하였다. 이 방법은 선형화 과정이 없으며, 적응제어기 설계에서 고주파이득에 대한 정보가 필요없고, off-the-manifold의 거동과 이식에서 기지의 신호는 추정기를 통하여 제어를 하였다. 단순화한 비행기모델에서 플린지 거리제어에 사용하였다. 플린지거리값이 추종하게 될 기준신호는 4차 필터를 구성하여 얻었다. 초기변위 0.01m에서 추종성능을 확인하였다. 특히 고전적인 적응제어기의 결과와 비교해 보면 추종오차가 적으며, 제어신호도 과도기에서 그 크기가 상대적으로 작음을 알 수 있다.

[참 고 문 헌]

- [1] Alessandro Astolfi and Romeo Oreta, "Immersion and Invariance : A New Tool for Stabilization and Adaptive Control of Nonlinear System s," IEEE tr-AC, Vol. 48, No. 4, pp.590-606, April 2003.
- [2] J. Ko, A. J. Kurdila, and T. W. Strganac, "Nonlinear Control of a Prototypical Wing Section with Torsional Nonlinearity," Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 20, No. 6, pp. 1181-1189, 1997.
- [3] D. Aeyels, "Stabilization of a class of Nonlinear systems by smooth feedback control," Syst. Control Lett, Vol. 5, pp. 289-294, 1985.
- [4] D. S. and M. R. Akella, "High-Performance Spacecraft Attitude-Tracking Control Through Attracting-Manifold," Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 31, No. 4, pp. 884-891, 2008.