

**Pade 근사법과 전달함수 축소기법을 이용한 네트워크 기반 제어 시스템 설계**

신동기, 조현철, 한현태, 이진우, 이권순  
부산시 사하구 하단2동 840번지 동아대학교 전기공학과

**Design of Networked based Control Systems using Pade Approximation and Reduction of Higher-order Transfer Function**

Dong Gi Shin, Hyun Cheol Cho, Hyun Tae Han, Jin Woo Lee, Kwon Soon Lee  
Dept of Electrical Engineering Dong-A University 840 Hadan 2-dong Saha-gu Pusan Korea 604-714

**Abstract** - 본 논문은 네트워크 기반 제어시스템(NCS: Networked Control Systems)에 모델매칭 제어기법을 적용한 효율적인 제어알고리즘을 제안한다. 비선형의 특성을 가지는 제어기 및 관측기의 시간지연을 Pade 근사법으로 선형화하여 선형시스템 이론을 적용한 모델매칭 제어기를 설계하였다. 또한, 제어기의 차수를 줄이기 위하여 저차시스템으로 근사화하여 그 타당성을 검증하였다. 제안한 제어알고리즘의 타당성 및 신뢰성을 검증하기 위하여 컴퓨터 시뮬레이션을 실시하였으며 기존의 PID 제어기법과 비교분석하였다.

**1. 서 론**

NCS 기술은 무선 네트워크 통신기술을 이용하여 제어시스템을 구축하는 기술로서 최근 복잡하게 구현되는 시스템의 신뢰성을 높이기 위한 방안으로 눈부시게 발전되고 있다. NCS 구축에 있어 가장 고려되어야 하는 것은 시간지연성으로 인한 제어성능을 고려하여야 하며 또한 전체 시스템 안정도를 유지하는 고급제어 기법이 중요하다. 최근에 이러한 시간지연성을 고려한 NCS 연구가 진행중에 있으며 안정성 해석 또한 발표가 되고 있다.

최근에 NCS의 제어 및 안정성에 관한 개관논문이 발표가 되는 등 다수의 관련 연구보고가 이루어지고 있다. 가장 간단한 NCS 제어시스템의 구성은 augment 모델을 설정하여 선형제어기를 적용하는 방법이다[1]. 또한 큐잉이론을 이용하여 확률 관측기를 개발하여 예측 NCS를 제안하였으며[2], 최적 확률 제어기법을 적용하여 NCS에 대한 확률 제어기를 제안하기도 하였다[3]. 일반적인 제어기법과는 달리 샘플링 시간을 최적의 값으로 선정하여 NCS의 제어성능을 개선한 알고리즘도 최근에 발표되었으며[4], 잘 알려진 PI 선형제어기도 NCS에 적용된 연구가 보고되고 있다[5]. 최근엔 더욱 복잡한 구조를 갖는 NCS에 대하여 고급 제어이론이 적용되고 있으며, 특히 [6]에서 Lyapunov 안정성 이론을 적용하여 다변수 NCS의 제어시스템을 구성하였으며, [7]에서는 선형 상태공간 제어이론을 적용하여 바람직한 제어성능을 실현하였다. 또한, 확률모델인 마코브 체인(Markov chain)을 통해 시간지연을 온라인으로 추정하여 NCS의 제어성능을 향상시키는데 사용되었다[8].

본 논문은 모델매칭 기법을 이용한 NCS의 제어기 설계를 제안한다. NCS의 지수함수로 표현되는 시간지연 항은 Pade 근사법을 이용하여 선형화 하였다. 근사화된 전체 시스템의 전달함수를 구한 후 정의된 모델의 전달함수와 같은 동특성을 가지는 모델매칭 제어기를 설계하였다. 제어기의 차수는 모델과 플랜트의 차수와 그리고 시간지연 전달함수에 비례하며 일반적으로 고차 다항식으로 주어진다. 이러한 고차 전달함수는 실제 시스템 구현에 있어 매우 비실용적이며 따라서 본 논문에서는 저차화 이론을 적용하여 동특성은 매우 비슷하면서도 차수가 현저히 줄어드는 저차 전달함수를 산출한다. 제안한 제어기의 타당성을 검증하기 위하여 Matlab©을 이용하여 컴퓨터 시뮬레이션을 실시하였으며 기존의 PID 제어방식과 비교 분석하여 성능의 우수성을 입증한다.

**2. Pade 근사화 기반 네트워크 기반 제어시스템**

본 논문에서 다루는 NCS 시스템의 블록선도는 그림 1과 같으며, 제어기  $C(s)$ , 플랜트  $G(s)$  그리고 비선형 시간지연  $e^{-\tau_1}$ 과  $e^{-\tau_2}$ 로 구성된다. 여기서  $\tau_1$ 과  $\tau_2$ 는 제어기 및 관측기에 대한 시간지연을 각각 나타낸다. 또한 플랜트와 제어기의 전달함수는 각각 다음과 같다.

$$G(s) = \frac{N_g(s)}{D_g(s)}, \quad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \quad (1)$$

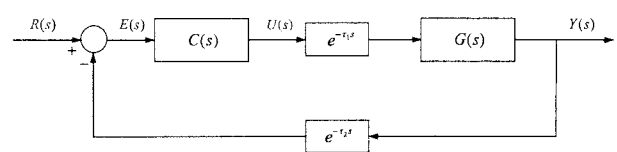
시간지연 항은 비선형 지수함수로 표현되며 선형시스템 이론을 적용하기가 어려우므로 Pade 근사화 기법[9]을 적용하여 다음과 같이 1차 선형함수로 나타낸다.

$$\begin{cases} e^{-\tau_1 s} \cong \frac{1 - \tau_1 s/2}{1 + \tau_1 s/2} = \frac{N_{g_1}(s)}{D_{g_1}(s)} = G_1(s) \\ e^{-\tau_2 s} \cong \frac{1 - \tau_2 s/2}{1 + \tau_2 s/2} = \frac{N_{g_2}(s)}{D_{g_2}(s)} = G_2(s) \end{cases} \quad (2)$$

선형화된 시스템에 대하여 전체 전달함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{C(s)G_1(s)G(s)}{1 + C(s)G_1(s)G_2(s)G(s)} \\ &= \frac{N_c(s)N_{g_1}(s)N_g(s)D_g(s)}{D_c(s)D_{g_1}(s)D_{g_2}(s)D_g(s) + N_c(s)N_{g_1}(s)N_{g_2}(s)N_g(s)} \end{aligned} \quad (3)$$

제어기 설계의 목적은 식 (3)의 시스템 출력이 기준입력  $R(s)$ 를 추종하는 바람직한 제어성능을 가지도록 적절한 제어기 전달함수를 산출하는 것이다. 본 논문은 이러한 복잡한 선형 시스템에 대한 모델매칭 제어기법을 이용하여 제어기를 설계한다.



〈그림 1〉 네트워크 기반 제어시스템의 블록선도

**3. 모델매칭 제어기 설계**

모델매칭 기반 제어기 설계는 식 (3)의 전체 시스템의 동특성이 다음의 모델 전달함수를 갖도록 제어기 전달함수를 산출하는 기법이다.

$$G_M(s) = \frac{N_m(s)}{D_m(s)} \quad (4)$$

즉, 식 (3)의 실제 시스템의 전달함수와 식 (4)의 모델 전달함수가 동일하기 위한 제어기를 설계하는 것으로, 우선 이 두 전달함수를 다음과 같은 방정식으로 정의한다.

$$\frac{N_c(s)N_{g_1}(s)N_g(s)D_g(s)}{D_c(s)D_{g_1}(s)D_{g_2}(s)D_g(s) + N_c(s)N_{g_1}(s)N_{g_2}(s)N_g(s)} = \frac{N_m(s)}{D_m(s)} \quad (5)$$

또한 식 (5)로부터 분자 및 분모의 다항식은 다음과 같으며

$$\begin{cases} D_m(s) = D_c(s)D_{g_1}(s)D_{g_2}(s)D_g(s) + N_c(s)N_{g_1}(s)N_{g_2}(s)N_g(s) \\ N_m(s) = N_c(s)N_{g_1}(s)N_g(s)D_g(s) \end{cases} \quad (6)$$

이 두 방정식을 식 (5)의 제어기 전달함수의 분자와 분모 다항식에 대하여 풀면 그 해는 각각 다음과 같다.

$$\begin{cases} N_c(s) = \frac{N_m(s)}{N_{g_1}(s)N_g(s)D_{g_2}(s)} \\ D_c(s) = \frac{D_m(s)D_{g_2}(s) - N_m(s)N_{g_2}(s)}{D_{g_1}(s)D_{g_2}(s)D_g(s)} \end{cases} \quad (7)$$

최종적으로 제어기의 전달함수는 다음과 같다.

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} = \frac{N_m(s)D_{g_1}(s)D_{g_2}(s)D_g(s)}{N_{g_1}(s)N_{g_2}(s)(D_m(s)D_{g_2}(s) - N_m(s)N_{g_2}(s))} \quad (8)$$

**4. 제어기 전달함수의 저차화**

식 (8)의 제어기 전달함수의 차수는 플랜트와 모델의 전달함수에 따라 달라지며, 일반적으로 분모의 차수가 분자의 차수보다 높은 proper 전달함수[10]일 경우 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{cases} Dim(D_c(s)) = Dim(D_m(s)) + 3 \\ Dim(N_c(s)) = Dim(N_m(s)) + Dim(D_g(s)) + 2 \end{cases} \quad (9)$$

이러한 결과는 제어기의 전달함수가 고차함수로 산출된다는 것을 의미하며 실제 시스템 구현에 있어 적용하기가 어려워진다. 따라서 본 논문은 고차 제어기 전달함수의 저차화를 실시하여 실제 시스템 구현에 있어 그 실용성을 높이고자한다.

전달함수의 저차화를 실현하기 위하여 우선 식 (8)의 전달함수를 다음과 같이 정의한다.

$$C(s) = M_H(s) \quad (10)$$

$$= K \frac{1 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m}{1 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n}$$

여기서  $n \geq m$ 이며  $K$ 는 상수를 나타낸다. 구하고자 하는 저차화 시스템의 전달함수를 다음과 같이 정의하면

$$M_L(s) = K \frac{1 + c_1s + c_2s^2 + \dots + c_qs^q}{1 + d_1s + d_2s^2 + \dots + d_ps^p} \quad (11)$$

와 같으며 여기서  $n > p$ 와  $m > q$ 이다. 정의된 고차 전달함수  $M_H(s)$ 가  $M_L(s)$ 로 저차화 되기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

$$\frac{|M_H(j\omega)|^2}{|M_L(j\omega)|^2} = 1, \quad 0 \leq \omega \leq \infty \quad (12)$$

식 (12)의 관계식에 양극성(bipolar) 라플라스 연산자를 적용하여 주파수 대역폭을 대입하면

$$\frac{|M_H(j\omega)|^2}{|M_L(j\omega)|^2} = \frac{M_H(s)M_H(-s)}{M_L(s)M_L(-s)} \Big|_{s=j\omega} \quad (13)$$

와 같으며 여기서  $M_H(s)M_H(-s)$ 와  $M_L(s)M_L(-s)$ 는 우수차(even order) 다항식이므로

$$\frac{|M_H(j\omega)|^2}{|M_L(j\omega)|^2} = \frac{1 + e_2s^2 + e_4s^4 + \dots + e_{2u}s^{2u}}{1 + f_2s^2 + f_4s^4 + \dots + f_{2v}s^{2v}} \Big|_{s=j\omega} \quad (14)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 여기서  $e$ 와  $f$ 는 계수값을 각각 나타낸다. 식 (14)의 우변에서 분자를 분모로 나누면 다음과 같이 전개된다.

$$\frac{|M_H(j\omega)|^2}{|M_L(j\omega)|^2} = 1 + \frac{(e_2 - f_2)s^2 + (e_4 - f_4)s^4 + \dots}{1 + f_2s^2 + f_4s^4 + \dots + f_{2v}s^{2v}} \Big|_{s=j\omega} \quad (15)$$

식 (12)의 저차화 필요충분조건을 만족하기 위하여 근사화 방정식의 가능한 해 집합을  $u=v$ 로 두면 식 (15)로부터 다음의 등식을 구할 수 있다.

$$e_2 = f_2, \quad e_4 = f_4, \quad e_6 = f_6, \quad \dots, \quad e_{2u} = f_{2u} \quad (16)$$

이 결과식으로부터 식 (16)을 이용하여 식 (11)의 계수값  $c_i, i=1, \dots, q$ 와  $d_i, i=1, \dots, p$ 를 각각 구할 수 있으며 이 값을 식 (11)에 대입하여 저차화 전달함수를 최종적으로 구할 수 있다.

### 5. 컴퓨터 시뮬레이션

제한한 제어기법의 타당성을 검증하기 위하여 DC 전동기에 적용하였으며 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 성능을 분석하였으며 기존의 PID 제어기법과 비교 검증하였다. 우선, 플랜트의 전달함수는 다음과 같은 2차 선형시스템으로 설정하였다.

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 12s + 20} \quad (17)$$

또한 그림 1에서 시간지연은  $\tau_1 = \tau_2 = 0.1\text{sec}$ 으로 하였으며, 이 값은 시스템의 입계안정하기 위한 조건으로 주어진다. 따라서 식 (2)로부터 시간지연에 대한 전달함수는 각각 다음과 같다.

$$\begin{cases} G_1(s) = \frac{1 - 0.1s/2}{1 + 0.1s/2} \\ G_2(s) = \frac{1 - 0.1s/2}{1 + 0.1s/2} \end{cases} \quad (18)$$

모델매칭 제어기 설계에 있어 모델 전달함수는 다음과 같이 2차 선형시스템으로 정의하며

$$G_M(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (19)$$

3 절의 제어기 설계법에 의하여 다음의 제어기 전달함수가 구해진다.

$$C_H(s) = \frac{-0.005s^5 - 0.36s^4 - 9.7s^3 - 118s^2 - 600.1s - 800.8}{0.01s^5 + 0.21s^4 - 3.78s^3 - 84s^2 - 88s} \quad (20)$$

식 (21)는 5차 시스템으로서 4 절의 저차화 기법을 이용하여 2차 전달함수로 근사화하였으며 다음과 같다.

$$C_L(s) = \frac{0.04987s^2 + 0.5992s + 1}{0.09937s^2 + 0.1099s} \quad (21)$$

식 (21)의 제어기에 대하여 시스템의 전체 전달함수는 다음과 같다.

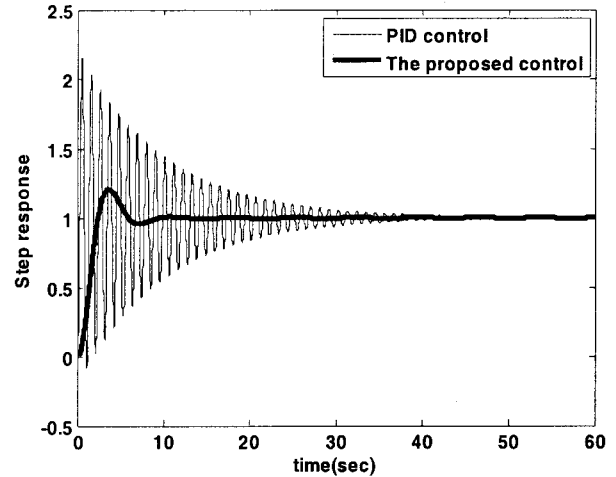
$$T_L(s) = \frac{-1.0037(s-20)(s+20)(s+10.01)(s+2.003)}{(s+9.999)(s+2.003)(s^2+0.8871s+0.9842)(s^2+40.22+408.5)} \quad (22)$$

식 (22)의 전체 시스템에 대하여 시스템응답을 기존의 PID 제어기를 적용한 경우와 그 성능을 비교 분석하였다. PID 제어기 파라미터는 최적의 시스템 응답을 갖기 위하여 임계진동기법[9]을 이용하여 산출하였으며 다음과 같다.

$$k_p = 35, \quad k_i = 110, \quad k_d = 2 \quad (23)$$

그림 2는 제한한 제어시스템과 PID 제어기에 대한 단위계단 응답을 각각 보여준다. PID 제어기의 경우 초기시간에서부터 감쇠진동이 발생하며 약 45초 부근에서 정상상태로 도달함을 알 수 있다. 하지만, 제한한 제어기에 대한 시스템응답은 약 30%가량의 오버슈트가 과도응답에서 발생하지만, 약

9초 부근에서 정상상태 응답에 도달한다. 이 시뮬레이션 결과로부터 PID 제어기에 비해 제한한 제어기의 성능이 월등히 개선되었음을 시뮬레이션을 통해 알 수 있다.



〈그림 2〉 시스템응답 비교파형

### 6. 결 론

본 논문은 네트워크 기반 제어시스템에서 발생하는 비선형 시간지연을 Pade 근사법을 이용하여 선형화하였고 모델매칭제어기를 전달함수 축소법을 적용하여 저차화한 후 제어성능의 향상을 확인하였다. 제한한 제어기법은 제어기의 차수가 저차화됨으로써 실제 시스템 구현이 용이하며 기존의 제어기와 유사한 성능을 나타냄을 검증하였다.

향후 연구계획으로는 기존의 연속시간 시스템에서 이산시간 시스템에 적용할 예정이며 유니쿼터스(ubiquitous) 센서 네트워크를 통한 실시간 실험을 통하여 산업현장에서의 적용가능성을 제시하고자 한다. 또한 비선형 시변시스템에서의 적용가능성에 대해 연구하여 성능의 우수성을 보다 더 입증하고자 한다.

### 감사의 글

본 연구는 교육과학기술부와 한국산업기술재단의 지역혁신인력양성 사업으로 수행된 연구결과임.

### [참 고 문 헌]

- [1] Y. Halevi and A. Ray, "Integrated communication and control systems: Part I - analysis," *J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 110, pp. 367-373, 1988.
- [2] R. Luck and A. Ray, "Experimental verification of a delay compensation algorithm for integrated communication and control systems," *Int. J. of Control*, vol. 59, no. 6, pp. 1357-1372, 1994.
- [3] J. Nilsson, *Real-time control systems with delays*, Ph.D. dissertation, Lund Institute of Technology, 1998.
- [4] S. H. Hong, "Scheduling algorithm of data sampling times in the integrated communication and control systems," *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, vol. 3, no. 2, pp. 225-230, 1995.
- [5] N. B. Almutairi, M.Y. Chow, and Y. Tipsuwan, "Network-based controlled DC motor with fuzzy compensation," *The 27th annual conf. of the IEEE Industrial Electronics society*, vol. 3, pp. 1844-1849, 2001.
- [6] G. C. Walsh, O. Beldiman, and L. Bushnell, "Asymptotic behavior of nonlinear networked control systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 46, no. 7, pp. 1093-1097, 2001.
- [7] L. A. Montestruque and P. J. Antsaklis, "On the model-based control of networked systems," *Automatica*, Vol. 39, pp. 1837-1843, 2003.
- [8] L. Zhang, Y. Shi, T. Chen, and B. Huang, "A new method for stabilization of networked control systems with random delays," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 50, no. 8, pp. 1177-1181, 2005.
- [9] Benjamin C. Kuo and F. Golnaraghi, *Automatic control systems*, JOHN WILEY & SONS, 2006.
- [10] T. C. Hsia, "On the simplification of linear systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-17, pp. 372-374, 1972.