주파수 응답에 의한 1차 보상기의 강인제어기 설계 도구

임연수, 김려화, 김영철
충북대학교

A Toolbox for Robust First Order Controller Design Using Frequency Response Data

Yeonsoo Lim, Lihua Jin, Young Chol Kim
Chungbuk National University

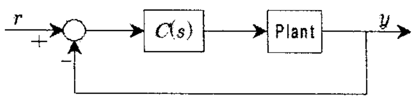
Abstract - 플랜트의 모델 없이 주파수 응답만으로 안정도와 여러 성능(이득여유, 위상여유, H_∞여유)을 만족하는 1차 보상기 설계 이론이 최근에 발표되었다[1]. 그중 안정도를 만족하는 제어기의 셋을 구하는 것의 수치해를 [6]에서 제시하였고, 본 논문에서는 그것을 확장하여 여러 성능을 동시에 만족하는 셋을 구하는 알고리즘을 제시하고 그것을 이용한 MATLAB용 설계 도구를 소개한다.

1. 서 론

산업 현장에서는 간단한 구조로 효과적인 제어를 하는 1차 보상기와 PID 구조의 제어기가 많이 쓰인다. 플랜트의 LTI 모델이 주어지는 경우, 이 시스템에 대해 안정도와 여러 조건을 만족하는 1차 보상기와 PID를 구하는 방법이 [2-5]에 이미 제시되었다. 하지만 제어기를 설계하는 현장에서는 모델을 구하는 과정을 매우 어렵게 여기기 때문에, 모델 없이 제어기를 설계하는 방법을 선호하고 있다. 최근에 플랜트의 주파수 응답과 RHP에 놓인 극점의 개수를 이용하여 안정도와 여러 성능을 만족하는 제어기의 전체 셋을 구하는 방법이 [1]에 소개되었다. 하지만 이 방법을 소프트웨어로 구현시 많은 어려움에 부딪히게 된다. 주어지는 데이터는 안정도 경계조건에 대한 선 데이터이지만, 실제 연산에서는 경계선에 의해 구분되는 영역 데이터를 사용해야 하기 때문이다. 그 과정은 인간의 눈으로 판단할 때에는 어렵지 않지만, 수치적인 데이터를 가지고 변환하는 것은 쉽지 않다. 이러한 점을 해결하고 안정도를 만족하는 셋을 구하는 방법의 연구를 먼저 진행하여 [6]에 제시하였다. 본 논문에서는 그것을 확장하여, 여러 성능을 동시에 만족하는 셋을 구하는 방법을 제시한다. 또한 이것을 구현한 MATLAB 용 설계 도구를 소개하고자 한다.

2. 이론적인 배경

1차 보상기를 포함하는 시스템은 그림 1과 같이 표현할 수 있다.



<그림 1> 단위 피드백 시스템

제어기의 계수를 다음과 같이 정한다.

$$C(s)=\frac{x_1 s+x_2}{s+x_3}. \tag{1}$$

설계를 위해 필요한 플랜트의 주파수 응답과 RHP에 놓인 극점의 개수를 다음과 같이 알고 있다고 가정하자

$$P(j\omega)=P(\omega)\angle\phi(\omega)=P_r(\omega)+jP_i(\omega),\quad \text{for } \omega\in[\omega_{\min},\omega_{\max}]. \tag{2}$$

RHP에 놓인 극점의 개수 p_r.
시스템의 특성다항식은 다음과 같다..

$$\Pi(s)=(s+x_3)D(s)+(x_1 s+x_2)N(s). \tag{3}$$

안정도의 경계가 되는 특성다항식의 근인 $\Pi(jw)=0$ 를 만족하는 (x_1,x_2,x_3)의 조건식을 유도하면 다음과 같다[1].

$$x_3+x_2P(0)=0. \tag{4}$$

$$1+x_1P(\infty)=0,\ (P(\infty)\neq 0). \tag{5}$$

$$\begin{cases} x_1(\omega)=\dfrac{1}{|P(j\omega)|^2}\left(\dfrac{P_i(\omega)}{\omega}x_3-P_r(\omega)\right) \\ x_2(\omega)=-\dfrac{1}{|P(j\omega)|^2}\left(P_r(\omega)x_3+\omega P_i(\omega)\right) \end{cases}. \tag{6}$$

위 식들에 의해 (x_1,x_2,x_3)의 공간을 분할할 수 있다. 각각의 분할된 공간은 Root Invariant Region 이 되고, 공간 내의 한 점에 해당하는 제어기의 계수가 시스템을 안정하게하면 해당 영역의 모든 점에 해당하는 계수는 시스템을 안정하게 한다. 이 영역들이 시스템의 안정도를 만족하는 1차 보상기의 셋이 된다.

안정도와 이득여유를 동시에 만족하는 계수의 셋은 $P(j\omega)$에 의한 안정영역 S_S와 다음에 주어진 $P_c(j\omega)$에 의한 안정영역 S_G의 공통영역을 구함으로 얻을 수 있다.

$$P_c(j\omega):=\{KP(j\omega):\ K\in[1,K^*]\}. \tag{7}$$

위상여유 역시 안정영역 S_S와 다음에 주어진 $P_c(j\omega)$에 의한 안정영역 S_P의 공통영역을 구함으로 얻을 수 있다.

$$P_c(j\omega):=\{e^{-j\theta}P(j\omega):\ \theta\in[0,\theta^*]\}. \tag{8}$$

H_∞여유는 감도함수 $S(s)$와 보감도함수 $T(s)$ 2개의 경우로 구분하여 적용할 수 있다. 우선 감도함수의 경우 $P_c(j\omega)$는 다음과 같다.

$$\|W(s)S(s)\|_\infty<\gamma,$$
$$P_c(j\omega):=\left\{P(j\omega)\left[\frac{1}{1+\frac{1}{\gamma}e^{j\theta}W(j\omega)}\right]:\ \theta\in[0,2\pi]\right\}. \tag{9}$$

보감도함수의 $P_c(j\omega)$는 다음과 같다.

$$\|W(s)T(s)\|_\infty<\gamma,$$
$$P_c(j\omega):=\left\{P(j\omega)\left[1+\frac{1}{\gamma}e^{j\theta}W(j\omega)\right]:\ \theta\in[0,2\pi]\right\}. \tag{10}$$

H_∞여유를 동시에 만족하는 셋은 안정영역 S_S와 식(9) 혹은 식(10)에 의한 $P_c(j\omega)$에 의해 구해진 안정영역 S_H의 공통영역을 구함으로 얻을 수 있다. S_S와 S_G를 구하는 경우 식(4-6)를 사용한다. 하지만 S_P와 S_H의 경우 $P_c(j\omega)$가 일반적으로 $\omega=0,\omega=\infty$에서 다음과 같이 복소함수가 된다.

$$P_c(j\omega):=P_r^c(\omega)+jP_i^c(\omega),\omega\in[-\infty,*\infty]. \tag{11}$$

따라서 식(4-5) 대신 다음의 식을 사용해야 한다.

$$x_3+x_2P_r^c(0)=0,\ x_3+x_2P_i^c(0)=0. \tag{12}$$

$$1+x_1P_r^c(\infty)=0,\ 1+x_1P_i^c(\infty)=0. \tag{13}$$

마지막으로 안정도와 이득여유, 위상여유, H_∞여유를 모두 만족하는 계수의 셋은 각 조건으로부터 구한 영역의 공통 영역 S^*을 계산하여 얻을 수 있다.

$$S^*=S_S\cap S_G\cap S_P\cap S_H. \tag{14}$$

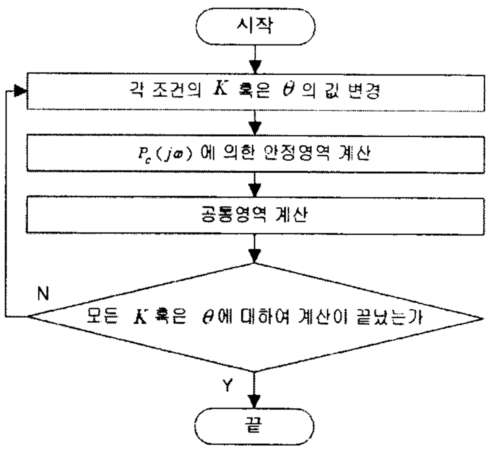
3. 수치 알고리즘

안정도를 만족하는 제어기의 셋을 구하는 방법은 [6]에 소개하였다. 각 성능을 만족하는 계수의 셋을 구하는 방법은 그림 2와 같은 서로 동일한 과정을 갖는다. 각 과정에 대하여 자세히 소개하도록 하겠다.

3.1 각 조건의 K 혹은 θ의 값 변경

이득여유의 경우 K를, 위상여유 또는 H_∞여유의 경우 θ를 범위 내에서 변경한다. 현재 toolbox에서는 연산시간을 고려하여 주어진 범위를 10등분

하는 10개의 값만 연산에 사용되도록 하였다.



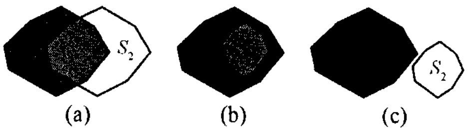
<그림 2> 각 성능을 만족하는 계수의 셋 계산 과정

3.2 $P_c(j\omega)$ 에 의한 안정영역 계산

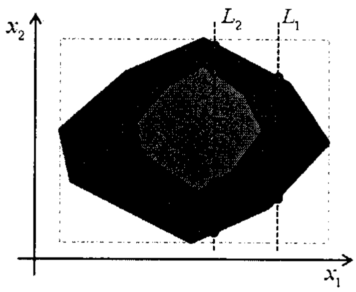
주파수응답 $P_c(j\omega)$를 계산한다. $P(j\omega)$대신 $P_c(j\omega)$에 대해 안정도를 만족하는 영역을 [6]에 소개된 방법을 사용하여 구한다.

3.3 공통영역 계산

서로 다른 두 영역 S_1, S_2가 존재할 때, 각 영역은 그림 3과 같이 3가지 경우로 존재한다. 본 논문에서는 각 영역의 정보가 영역의 외곽선 데이터로 존재 하는데, 그림 3(b)의 경우 S_1에서 S_2를 제외한 영역을 외곽선만으로 표시할 수 없다. 이를 해결하기 위해 그림 4 와 같이 각 영역의 내부를 지나는 직선 L_1, L_2로 영역 S_1, S_2을 분할한 후 분할된 각 영역 S_1', S_1'', S_1''', S_2', S_2''가 분할 전 영역인 S_1, S_2에 동시에 속하는 경우 해당 영역을 S_1, S_2의 공통 영역으로 판단하게 하였다.



<그림 3> 영역 S_1, S_2 의 존재 유형



<그림 4> L_1, L_2 에 의한 영역 분할

4. MATLAB 용 설계 도구

사용자가 사용하기 쉽도록 "foc_tool"이라는 하나의 함수로 원하는 성능을 모두 만족하는 제어기의 셋을 구할 수 있도록 하였다. 함수의 사용 예는 아래의 예제를 통하여 설명한다.

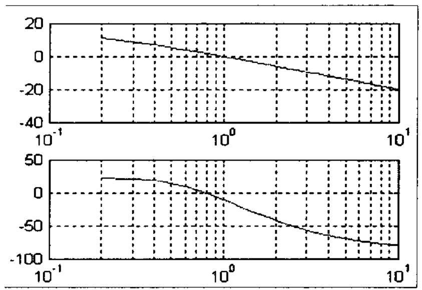
예제 1. [1] 주어진 플랜트에 대한 주파수응답이 그림 5와 같다. 이 시스템의 RHP 극점 개수는 $p_r = 1$ 이고, x_3의 범위는 $1 \le x_3 \le 2.5$ 로 정했다. 이득여유가 3.5dB, 위상여유가 35°, H_∞여유는 다음을 만족하는 1차 보상기의 셋을 구하려고 한다.

$$\| W(s)S(s) \|_\infty < \gamma = 1,$$
$$W(s) = \frac{s+0.1}{s+1}.$$

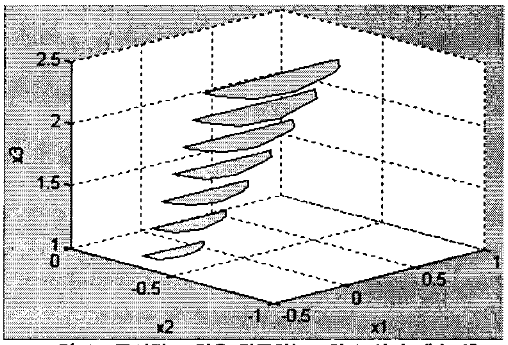
해당 셋을 구하기 위한 MATLAB 코드가 표 1에 주어져 있다. 연산 결과는 그림 6에 나타난다. 해당 영역의 x_1, x_2, x_3가 주어진 조건을 만족하는 1차 보상기의 셋이 된다.

<표 1> MATLAB 코드

```
load freq_resp.txt;
Pr = 1;
x3_data = linspace(1,2.5,7);
K_star = 3.5;
theta_star = 35*(pi/180);
gamma = 1;
W_num = [1 0.1];
W_den = [1 1];
foc_tool(freq_resp,Pr,x3_data, 1,K_star, 1,theta_star, 1,gamma,W_num,W_den);
```



<그림 5> 예제 1의 플랜트 주파수응답



<그림 6> 주어진 조건을 만족하는 1차 보상기 계수 셋

5. 결 론

본 논문에서는 비계수 모델에 대해 안정한 1차 보상기의 계수 셋을 구하는 수치 알고리즘을 확장하여, 다양한 성능을 함께 만족하는 전체 셋을 구하는 알고리즘을 제시하였다. 또한 이것을 적용한 MATLAB용 설계 도구를 소개하고 예제를 통해 사용법을 설명하였다. 앞으로 지속적인 테스트와 디버깅을 거쳐, 저차제어기를 설계하는 사용자들이 손쉽게 접근할 수 있는 설계 도구가 되도록 보완할 것이다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단 특정기초연구 (과제번호: R01-2006-000-10811-0) 지원으로 이루어진 연구임.

[참 고 문 헌]

[1] L.H. Keel, and S.P. Bhattacharyya, "Direct Synthesis of First Order Controllers from Frequency Response Measurements," *Proc. of the American Control Conf.*, Portland, OR, USA, June 8-10, 2005.
[2] R.N. Tantaris, L.H. Keel, and S.P. Bhattacharyya, "Stabilization of Continuous Time Systems by First Order Controllers," *Proc. of the 10th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Lisbon, Portugal, July 9-12, 2002.
[3] R.N. Tantaris, L.H. Keel, and S.P. Bhattacharyya, "Gain/Phase Margin Design with First Order Controllers," *Proc. of the American Control Conf.*, Denver, Colorado, 2003, pp. 3937-3942. 2005, Seville, Spin, Dec. 2005.
[4] R.N. Tantaris, L.H. Keel, and S.P. Bhattacharyya, "H_∞ Design with First-Order Controllers," *Proceedings of the 2003 IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, HI, December 9-12, 2003.
[5] A. Datta, M.T. Ho, and S.P. Bhattacharyya, *Structure and Synthesis of PID Controllers*, Springer-Verlag, UK., 2000.
[6] 임연수, 김려화, 김근식, 김영철, "비계수 모델에 대한 1차 안정화기 전체 셋의 수치 해", 정보 및 제어 학술대회 논문집, pp.57-58, 2007