

KRRI 전륜 조향 차량의 횡 방향 선형 동역학 모델

김영철¹, 윤경한¹, 민경득¹, 변운섭², 목재균²
¹충북대학교 전자공학과, ²한국철도기술연구원

A Linear Model of Lateral Dynamics of the KRRI All Wheel Steered Vehicle

Young-Chol Kim¹, Kyoung-Han Yun¹, Kyung-Deuk Min¹, Yun-Seob Byun² and Jai-Kyun Mok²

¹Department of Electronics Engineering, Chungbuk National University, Korea

²Bimodal Transportation Research Center, Korea Railroad Research Institute, Korea

Abstract - 본 논문은 KRRI 전륜 조향 차량의 횡 방향 동역학 모델링에 대한 내용을 기술한다. 이 차량은 굴절버스 형태를 갖고 모든 차륜의 조향이 가능하며 트레일러와 트랙터의 후륜이 독립적으로 구동 가능한 시스템을 갖고 있다. 이 시스템의 모델링은 비선형 동역학 방정식을 유도하고 선형화 한 뒤 횡 방향 동역학 모델만을 분리해서 최종적으로 횡 방향 선형 동역학 모델을 유도하는 과정을 거친다. 마지막으로 시뮬레이션을 통해 선형 모델을 검증한다.

1. 서 론

한국철도기술연구원(KRRI)은 교통 혼잡문제를 해결하기 위한 새로운 대중교통수단으로 바이모달 트램(Bimodal Tram)을 개발 중이다. 이 차량은 모든 차륜이 조향 가능하여 마치 전철이 궤도 위를 따라가듯이 움직일 수 있는 특징이 있다. 또 좁은 차선이나 급커브에서의 운행에 유리하고 승차를 편리하게 하기 위한 접근성을 높일 수 있다. 이러한 동작은 자체 제어 컴퓨터를 통해 각 차륜의 조향 각을 제어함으로써 가능하게 되는데 이와 같은 자동안내제어 알고리즘을 개발하기 위해서는 차량의 횡 방향 동역학 모델이 필요하다.

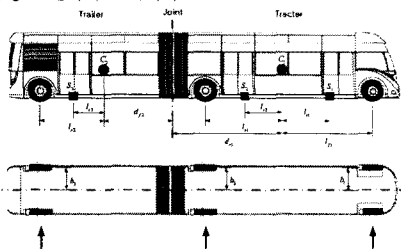
본 논문에서는 KRRI 전륜 조향 차량의 횡 방향 동역학 모델링에 대한 내용을 기술한다. 주요내용을 요약하면 먼저 관성 좌표계에서 Lagrange 방정식을 이용하여 동역학 방정식을 유도하고 이것을 다시 차량중심좌표계로 변환한다. 그 다음 선형화 과정을 통해 선형 모델을 얻고 여기서 다시 횡 방향 모델만 분리해 낸다. 여기에 경로의 편의를 표현하기 쉽도록 좌표벡터를 변환하여 최종 상태방정식을 유도한다. 마지막으로 시뮬레이션을 통해 선형 모델과 비선형 모델을 비교함으로써 선형화 과정을 검증할 것이다.

2. KRRI 차량의 비선형 동역학 모델

KRRI 차량의 동역학 모델은 먼저 차량의 파라미터와 좌표계를 정의하고 Lagrange 방정식을 이용하여 동역학 방정식을 유도한 다음 여기에 타이어 모델을 적용하여 얻어진다.

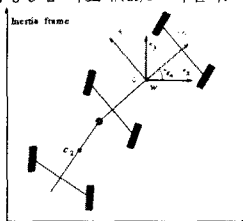
2.1 KRRI 차량의 파라미터와 좌표계의 정의

KRRI 바이모달 트램의 형태는 아래의 그림 1과 같다. 여기서 C_1 과 C_2 는 각각 트랙터와 트레일러의 무게중심을 의미한다. S_1, S_2, S_3 는 기준경로와 의 편차를 측정할 센서의 위치이다.



〈그림 1〉 KRRI 바이모달 트램

차량 모델의 위치, 속도, 가속도를 표현하기 위해서 그림 2에서와 같이 두 가지의 기준 좌표계를 정의하였다. 각각의 좌표계는 최초의 기준이 되는 관성 좌표계(w)와 차량중심에서 차량의 운동을 표현하며 관성 좌표계의 회전을 통해 얻어지는 차량중심 좌표계(c)로 나뉜다.



〈그림 2〉 좌표계의 정의

2.2 Lagrange 방정식

KRRI 차량의 동역학 모델은 다음의 Lagrange 방정식을 적용함으로써 얻어진다.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = F_g \quad (1)$$

여기서 q 는 물체의 위치벡터, L 은 전체 에너지, F_g 는 가해진 힘의 총합이다. 차량의 운동에너지를 T , 위치에너지를 V 라 하면 전체에너지는 아래(2)식과 같다.

$$L=T-V \quad (2)$$

운동에너지 T 를 구하기 위해 관성 좌표계에서 차량의 위치를 표현하는 벡터를 식(3)으로 정의한다.

$${}^w q = [{}^w x_{w,c1} \quad {}^w y_{w,c1} \quad {}^w e_{c1} \quad {}^w e_{c2}]^T \quad (3)$$

이 벡터의 원소는 각각 관성 좌표계에서 트랙터의 무게중심의 x좌표, y좌표, 요우 각과 트레일러의 요우 각을 나타낸다. 이제 차량의 운동에너지를 구하는 식은 다음 식(4)과 같이 쓸 수 있다.

$$T({}^w \dot{q}, {}^w \dot{q}) = \frac{1}{2} {}^w \dot{q}^T {}^w M({}^w \dot{q}) {}^w \dot{q} \quad (4)$$

여기서

$${}^w M({}^w \dot{q}) = \sum_{j=1}^2 J_{c_j}^T({}^w \dot{q}) M_j J_{c_j}({}^w \dot{q}), \quad M_j = \begin{bmatrix} m_j & 0 & 0 \\ 0 & m_j & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_j} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$J_{c_1}({}^w \dot{q}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_{c_2}({}^w \dot{q}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{t1} \sin {}^w e_{c1} & d_{t2} \sin {}^w e_{c2} \\ 0 & 1 & -d_{t1} \cos {}^w e_{c1} & -d_{t2} \cos {}^w e_{c2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

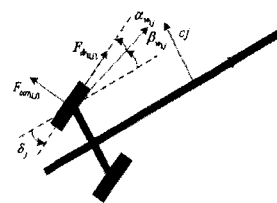
평면상에서는 위치에너지를 무시할 수 있으므로 식(1)에 식(4)를 적용하여 정리하면 아래와 같은 (6)식을 얻을 수 있다.

$${}^w M({}^w \dot{q}) {}^w \dot{q}'' + {}^w C({}^w \dot{q}, {}^w \dot{q}) {}^w \dot{q} = {}^w \tau_{tire} \quad (6)$$

여기서 ${}^w \tau$ 는 타이어를 통해 차량에 가해지는 외력을 종합한 것이다.

2.3 타이어 모델

타이어에 작용하는 힘과 미끄러짐 각을 아래의 그림 3과 같이 정의 한다.



〈그림 3〉 미끄러짐 각의 정의

먼저 타이어의 평행한 방향의 힘은 (7)식과 같이 근사화 된다.

$$F_{cor} = \sum_{i=1}^2 \{C_i (\delta_i - \beta_{ti})\} \quad (7)$$

여기서 C_i 는 t 번째 차축의 cornering stiffness이고 δ_i 는 t 번째 차축의 조향 각이다. 또 β_{ti} 는 t 번째 차축에서 차체의 미끄러짐 각이다. 이어서 타이어의 방향에 수직하는 방향의 힘은 아래와 같다.

$$F_{dr} = \sum_{i=1}^2 \{R_{wi}^{-1} T_{dr,i}\} \quad (8)$$

여기서 R_{wi}^{-1} 는 타이어의 유효 반경이고 $T_{dr,i}$ 는 구동토크이다. 또 i 는 1일 때 차량의 좌측을 뜻하며 2일 때는 우측을 뜻한다. 위의 (7),(8)식을 정리하면 다음 (9)식을 얻는다.

$${}^w \tau_{tire} = \sum_{i=1}^2 \{ {}^w L_{long,i} R_{wi}^{-1} T_{dr,i} + {}^w L_{lat,i} (R_{wi}^{-1} D(T_{dr,i}) \delta_i + C_i (\delta_i - \beta_{ti})) \} \quad (9)$$

여기서

$$\delta_i = [\delta_{i1} \quad \delta_{i2} \quad \delta_{i3}]^T$$

$$C_i = \begin{bmatrix} C_{wi1} & 0 & 0 \\ 0 & C_{wi2} & 0 \\ 0 & 0 & C_{wi3} \end{bmatrix}, \quad D(T_{dr,i}) = \begin{bmatrix} T_{dr,i} & 0 & 0 \\ 0 & T_{dr,i} & 0 \\ 0 & 0 & T_{dr,i} \end{bmatrix}, \quad R_{wi} = \begin{bmatrix} r_{wi1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{wi2} & 0 \\ 0 & 0 & r_{wi3} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$L_{lat1} = \begin{bmatrix} -\sin^w \epsilon_{c1} & -\sin^w \epsilon_{c1} & -\sin^w \epsilon_{c2} \\ \cos^w \epsilon_{c1} & \cos^w \epsilon_{c1} & \cos^w \epsilon_{c2} \\ l_{f1} & -l_{r1} & -d_{r1} \cos(w \epsilon_{c1} - w \epsilon_{c2}) \\ 0 & 0 & -(d_{f2} + l_{r2}) \end{bmatrix}, L_{lat2} = L_{lat1}$$

$$L_{long1} = \begin{bmatrix} \cos^w \epsilon_{c1} & \cos^w \epsilon_{c1} & \cos^w \epsilon_{c2} \\ \sin^w \epsilon_{c1} & \sin^w \epsilon_{c1} & \sin^w \epsilon_{c2} \\ -b_1 & -b_2 & -d_{r1} \sin(w \epsilon_{c2} - w \epsilon_{c1}) \\ 0 & 0 & -b_3 \end{bmatrix}$$

$$L_{long2} = \begin{bmatrix} \cos^w \epsilon_{c1} & \cos^w \epsilon_{c1} & \cos^w \epsilon_{c2} \\ \sin^w \epsilon_{c1} & \sin^w \epsilon_{c1} & \sin^w \epsilon_{c2} \\ b_1 & b_2 & -d_{r1} \sin(w \epsilon_{c2} - w \epsilon_{c1}) \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix}$$

2.4 차량중심 좌표계

차량중심 좌표계는 그림 2에서 볼 수 있듯이 트랙터의 요구 각 만큼 관성중심 좌표계를 회전시킨 것이다. 여기에 필요한 회전변환을 해주는 행렬을 ${}^wT_{ci}$ 로 정의 하고 다음 식(11)에 나타내었다.

$${}^wT_{ci} = \begin{bmatrix} {}^wRot_{ci} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (11)$$

여기서

$${}^wRot_{ci} = \begin{bmatrix} \cos^w \epsilon_{c1} & -\sin^w \epsilon_{c1} \\ \sin^w \epsilon_{c1} & \cos^w \epsilon_{c1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

관성 좌표계의 속도벡터는 ${}^wT_{ci}$ 행렬에 의해 차량중심 좌표계에서의 속도벡터로 변환할 수 있다. 이는 다음 식(13)로 표현될 수 있다.

$${}^w\dot{q}' = {}^wT_{ci} {}^c\dot{q} \quad (13)$$

여기서

$${}^c\dot{q}' = [{}^c x_1 \quad {}^c y_1 \quad {}^w \epsilon_1 \quad {}^w \epsilon_2]^T \quad (14)$$

차량중심 좌표계에서 비선형 모델을 다시 정리하면 아래 식(15)와 같다.

$${}^c M {}^c \ddot{q}' + {}^c C {}^c \dot{q}' = \sum_{i=1}^2 {}^w L_{longi} R_i^{-1} T_{dr_i} + {}^w L_{lat_i} (R_i^{-1} D(T_{dr_i}) \delta_i + C_i (\delta_i - \beta_i)) \quad (15)$$

여기서

$${}^c M ({}^c \dot{q}') = {}^w T_{ci}^T M ({}^c \dot{q}') {}^w T_{ci}$$

$${}^c C ({}^c \dot{q}') = {}^w T_{ci}^T C ({}^c \dot{q}') {}^w T_{ci} + {}^w T_{ci}^T M ({}^c \dot{q}') {}^w T_{ci}'$$

$${}^c L_{longi} ({}^c \dot{q}') = {}^w T_{ci}^T L_{xi} ({}^c \dot{q}') \quad (16)$$

$${}^c L_{lat_i} ({}^c \dot{q}') = {}^w T_{ci}^T L_{yi} ({}^c \dot{q}') \quad (16)$$

3. 선형 모델

선형 제어가 쉽게 기법을 사용하기 위해서는 비선형 모델을 선형화 하는 과정이 필요하다. 선형화를 위한 가정들을 아래에 기술하였다.

- 차량 진행방향의 가속은 작다.
- 차량과 경로가 이루는 상대 요구 각은 작다. (${}^w \epsilon_{c1} - {}^w \epsilon_{p1} \approx 0$)
- 트랙터와 트레일러가 이루는 각도(굴절각)는 작다. (${}^w \epsilon_{c1} - {}^w \epsilon_{c2} \approx 0$)
- 차량의 오른쪽 바퀴와 왼쪽 바퀴의 미끄러짐 각은 같다. ($\beta_{w1j} \approx \beta_{w2j}$)
- 차량의 종 방향과 횡 방향으로 가해지는 힘은 선형화된 타이어 모델에 의해 표현 된다.

3.1 선형 횡 방향 동역학 방정식

선형화를 위한 가정에 근거하여 선형화된 동역학 방정식에서 횡 방향 동역학에 관계되는 부분만 분할하여 다시 정리한 것이 (17)식이다.

$$M \ddot{q} + C \dot{q} = 2L_y C_i (\delta_i - \beta_i) \quad (17)$$

여기서

$$q = [{}^c y \quad {}^w \epsilon_1 \quad {}^w \epsilon_2]^T$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & -m_2 d_{r1} & -m_2 d_{f2} \\ -m_2 d_{r1} & m_2 d_{r1}^2 + I_{z1} & m_2 d_{r1} d_{f2} \\ -m_2 d_{f2} & m_2 d_{r1} d_{f2} & m_2 d_{f2}^2 + I_{z2} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & (m_1 + m_2) V_x & 0 \\ 0 & -m_2 d_{r1} V_x & 0 \\ 0 & -m_2 d_{f2} V_x & 0 \end{bmatrix}, L_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l_{f1} & -l_{r1} & -d_{r1} \\ 0 & 0 & -(d_{f2} + l_{r2}) \end{bmatrix}$$

3.2 타이어 모델의 선형화

타이어 미끄러짐 각을 아래와 같이 근사하여 선형화된 타이어 모델을 얻는다.

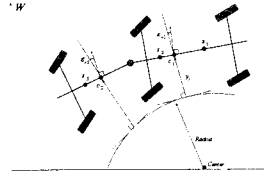
$$\delta_1 - \beta_1 \approx \delta_1 - \frac{{}^c \dot{y} + \dot{\epsilon}_1 l_{f1}}{V_x}, \quad \delta_2 - \beta_2 \approx \delta_2 - \frac{{}^c \dot{y} - \dot{\epsilon}_1 l_{r1}}{V_x} \quad (19)$$

$$\delta_3 - \beta_3 \approx \delta_3 - \frac{{}^c \dot{y} - d_{r1} \dot{\epsilon}_1 - (d_{f2} + l_{r2}) \dot{\epsilon}_2 - V_x (\epsilon_f)}{V_x}$$

3.3 좌표벡터의 변환

이전의 좌표벡터 q 를 기준경로와의 오차를 표현하기 위한 좌표벡터 q_r 로 변환한다. 변환된 좌표벡터는 식(20)과 같고 그 원소들의 의미를 그림 4에 나타내었다.

$$q_r = [y_r \quad \epsilon_{r1} \quad \epsilon_{r2}]^T \quad (20)$$



<그림 4> 좌표벡터 변환

q 와 q_r 의 간의 관계는 식 (21)와 같이 정리할 수 있다.

$$\ddot{q} = \ddot{q}_r + V \dot{q}_r, \quad \dot{q} = \dot{q}_r + V q_r + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\epsilon}_{d1} \\ \dot{\epsilon}_{d2} \end{bmatrix} \quad (21)$$

(21)식의 관계를 이용해서 \ddot{q}_r 를 정리하면

$$\ddot{q}_r = M^{-1} F \delta + (V - M^{-1}(C+D)) \dot{q}_r + (M^{-1} K [0 \quad -1 \quad 1] - M^{-1}(C+D) V) q_r - M^{-1}(C+D) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\epsilon}_{d1} \\ \dot{\epsilon}_{d2} \end{bmatrix} \quad (22)$$

여기서

$$V = \begin{bmatrix} 0 & -V_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F = 2 \begin{bmatrix} C_{w1} & -C_{w2} & C_{w3} \\ C_{w1} l_{f1} & -C_{w2} l_{r1} & -C_{w3} d_{r1} \\ 0 & 0 & -C_{w3} (d_{f2} + l_{r2}) \end{bmatrix}, K = 2 \begin{bmatrix} C_{w3} & & \\ -C_{w3} d_{r1} & & \\ -C_{w3} (d_{f2} + l_{r2}) & & \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{2}{V_x} \begin{bmatrix} C_{w1} + C_{w2} + C_{w3} & C_{w1} l_{f1} - C_{w2} l_{r1} - C_{w3} d_{r1} & -C_{w3} d_{r1} & -C_{w3} (d_{f2} + l_{r2}) \\ C_{w1} l_{f1} - C_{w2} l_{r1} - C_{w3} d_{r1} & C_{w1} l_{f1}^2 - C_{w2} l_{r1}^2 - C_{w3} d_{r1}^2 & C_{w3} d_{r1} (d_{f2} + l_{r2}) & C_{w3} d_{r1} (d_{f2} + l_{r2}) \\ -C_{w3} (d_{f2} + l_{r2}) & C_{w3} (d_{f2} + l_{r2}) d_{r1} & C_{w3} (d_{f2} + l_{r2})^2 & C_{w3} (d_{f2} + l_{r2})^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

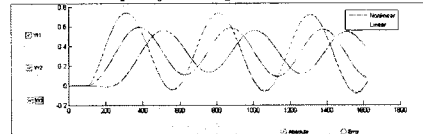
변환된 좌표벡터를 상태벡터로 하여 (17)의 동역학 방정식을 상태방정식 형태로 다시 정리하면 아래의 식(24)을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ \ddot{q}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ M^{-1} K [0 \quad -1 \quad 1] - M^{-1}(C+D) V & - (V + M^{-1}(C+D)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_r \\ \dot{q}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} F \end{bmatrix} \delta_t + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(C+D) \begin{bmatrix} 0 \\ V_x \\ V_x \end{bmatrix} \rho_{ref} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} y_{r1} \\ y_{r2} \\ y_{r3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l_{s1} & 0 \\ 1 & -l_{s2} & 0 \\ 1 & -d_{r1} & -(d_{f2} + l_{s3}) \end{bmatrix} q_r \quad (25)$$

3.4 선형 모델 검증

비선형 모델과 선형모델에 같은 시뮬레이션 환경을 주고 그 결과를 비교함으로써 선형 모델을 검증한다. 시뮬레이션 조건은 아래와 같다. $\delta_1 = \pi/20^* \sin 2\pi(0.4)t$, $\delta_2 = \delta_3 = 0$, $V_x = 10[m/s]$, 기준경로 : 직선



<그림 5> 시뮬레이션 결과

그림 5의 그래프는 시간에 따른 y_{r1}, y_{r2}, y_{r3} 값의 변화를 그린 것이다. 여기서 파란색과 붉은색 선은 각각 비선형 모델과 선형 모델의 결과를 나타낸 것이다. 두 색의 그래프의 y_{r1}, y_{r2}, y_{r3} 가 거의 일치하는 결과를 보인다. 이로서 선형화 과정이 검증되었다고 할 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 KRRI 전철 조항 차량의 횡 방향 동역학 모델을 유도하였다. 결론적으로 선형화된 동역학 모델을 유도하였고 시뮬레이션을 통해 검증하였다. 앞으로는 횡 방향 자동안내제어를 설계하고 유도된 모델에 적용하는 연구를 진행할 것이다.

감사의 글

본 연구는 한국철도기술연구원 위탁과제(과제명 : 굴절차량의 자동조항 안내제어 알고리즘 개발) 지원으로 이루어진 연구임.

[참 고 문 헌]

[1] C. Chen and M. Tomizuka, "Dynamic modeling of articulated vehicles for automated highway systems," *Proc. of American Control Conf.*, pp.653-757, Seattle, June 1995.

[2] D. de Bruin and P.P.J. van den Boach, "Modeling and control of a double articulated vehicle with four steerable axes," *Proc. of American Control Conf.*, pp. 3250-3254, San Diego, June 1999.

[3] C. Chen and M. Tomizuka, "Dynamic modeling of tractor-semi-trailer vehicles in automated highway systems," *PATH Technical Report*, ITS, U.C. Berkeley, 1995

[4] M.Tai and M. Tomizuka, "Robust lateral control of heavy vehicles for AHS," *Proc. of the 14th IFAC World Congress*, Peking, 1999.