T-모델과 쌍곡선함수를 이용한 장거리 송전선로의 A,B,C,D 파라미터 유도

김도원*, 이상중**, 양성덕***
서울산업대학교 전기공학과* **, 고려대학교 수학과***

Derivation of A,B,C,D Parameters of Long Transmission Line Using T-model and Hyperbolic Function

Do-Won Kim*, Sang-Joong Lee**, Seong-Deog Yang***
Seoul National University of Technology* **, Korea University***

Abstract - 본 논문에서는, 기존의 문헌에 사용되어 온 Γ 형을 대체할 수 있는 새로운 T형 장거리 송전선로 모델을 제시한다. 특히, T-모델은 선로 양단의 병렬 어드미턴스와의 중복이 없다. 또한, 기존 문헌에 제시된 hyperbolic solution을 이용한 간단한 장거리 송전선로 *A,B,C,D* 파라미터 유도방법을 소개한다. hyperbolic solution으로 장거리 송전선로 파라미터를 유도할 경우 , exponential solution보다 수식의 양을 줄일 수 있고, 초기값도 간단하게 구할 수 있다.

1. 서 론

현재 모든 서적에서 사용되고 있는 장거리 송전선로 모델[1-14]은 Γ(감마)형 또는 ˥(역감마)형 이다. Γ-모델은 송전선로를 하나의 직렬 임피던스 $r+j\omega L$과 병렬 어드미턴스 $g+j\omega C$로 구성된 단위회로가 Γ형태로 무한히 직렬로 연결된 분포회로로 간주한다. Γ, ˥ 및 새롭게 제시하는 T-모델 중 어느 모델을 사용하여도 *A,B,C,D* 파라미터 유도결과는 동일하다. 하지만, Γ 또는 ˥-모델의 경우, 단위회로 어느 한 측의 병렬 어드미턴스가 송수전단의 병렬 어드미턴스와 겹친다. 이러한 사소한 문제점이 전력계통공학 입문 학생에게는 장거리 송전선로에 대한 오해로 이어질 수 있다. 본 논문에서 제시하는 T-모델을 사용할 경우 단위회로가 송수전단에서 병렬 어드미턴스와 겹치지 않는 장점이 있다.

또한, 본 논문을 통하여서 hyperbolic 함수를 이용하여 장거리 송전선로의 *A,B,C,D* 파라미터를 간단하게 유도하는 hyperbolic solution을 소개하고 간편성을 부각 시키고자 한다. 이 방법은 Bergen과 Vittal의 저서[1]에서 제시되었다. hyperbolic 함수를 이용하면, 유도과정에서 발생되는 수식의 양이 축소되고 경계 값 또한 쉽게 적용할 수 있다. hyperbolic solution이 기존의 방식보다 확실히 간편하지만 대부분의 전력계통 서적들[2-14]은 지수함수를 이용한 복잡한 exponential solution을 사용하고 있다.

2. 본 론

2.1 장거리 송전선로 모델 비교

2.1.1 Γtype 장거리 송전선로 모델

그림. 1에서 선로의 단위길이 당 직렬 임피던스와 병렬 어드미턴스를

$$z = r + j\omega L = r + jx \quad [\Omega/\mathrm{km}] \tag{1}$$

$$y = g + j\omega C = g + jb \quad [\mho/\mathrm{km}] \tag{2}$$

로 정의한다. 여기서,

r : 선로 저항
L: 선로 인덕턴스
g: 선로의 누설 콘덕턴스
C: 선로와 대지간의 정전용량

이러한 선로정수가 송전선로의 전체 길이 l[km]에 균일하게 분포되어 있다고 가정한다. 그림.1에서 미소부분 △x내에 직렬 임피던스와 병렬 어드미턴스로 구성된 단위회로가 있다. 이 단위회로가 Γ(gamma) 형태로 선로 전체에 무수히 접속되는 것으로 가정하고 본 논문에서 이를 "Γ"type이라 칭한다.

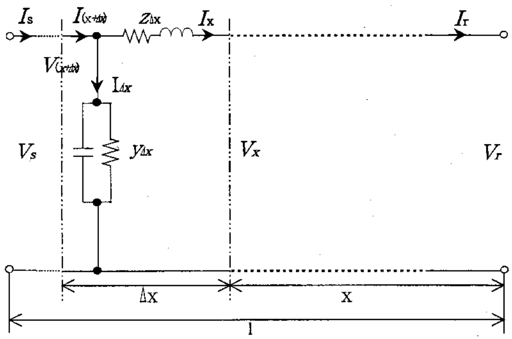

그림. 1. Γtype 장거리 송전선로 모델

V_s, I_s는 송전단의 전압, 전류이고 V_r, I_r은 수전단의 전압, 전류이다. 또한, 수전단(그림.1의 우측)에서 x[km]만큼 떨어진 지점의 전압, 전류를 각각 V_x, I_x이라 한다. x 지점의 미소구간 △x를 살펴보면 직렬 임피던스 z에 의한 전압강하 $V\Delta x$와 병렬 어드미턴스 y에 의한 전류 $I\Delta x$가 발생한다.

$$V_{(x+\Delta x)} = V_x + z\Delta x I_x \tag{3}$$

미분의 정의로부터 식(3)은 아래와 같이 표현 할 수 있다.

$$\frac{dV_x}{dx} = zI_x \tag{4}$$

그림. 1. 에서 $I_{(x+\Delta x)}$에 대한 방정식을 세우면

$$I_{(x+\Delta x)} = I_x + y\Delta x V_x \tag{5}$$

미분의 정의로부터 식(5)는 아래와 같이 표현 할 수 있다.

$$\frac{dI_x}{dx} = yV_x \tag{6}$$

또한, V_x와 I_x의 일반해를 구하기 위해 식(4),(6)을 다시 미분하면

$$\frac{d^2V_x}{dx^2} = yzV_x = \gamma^2 V_x \tag{7}$$

$$\frac{d^2I_x}{dx^2} = yzI_x = \gamma^2 I_x \tag{8}$$

여기서, $\gamma = \sqrt{zy}$ 는 선로의 길이에 따라 전압, 전류의 진폭 및 위상변화의 특성을 나타내는 전파정수이다.

식(7)(8)의 2차 미분 방정식을 가지고 장거리 송전선로

의 A,B,C,D 파라미터를 유도한다.

2.1.2 T type 장거리 송전선로 모델 제시

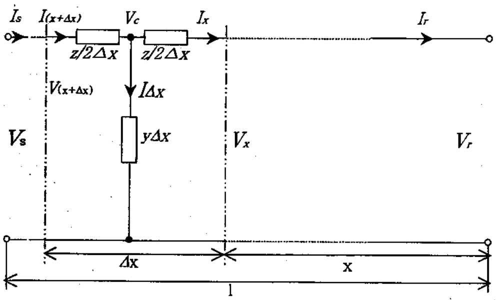

그림. 2. T type 장거리 송전선로 모델

그림. 2에서 미소구간 Δx에 직렬로 연결된 임피던스 z 중간에 병렬 어드미턴스 y가 T(tee)형태로 선로전체에 무수히 접속되는 것으로 가정하고 본 논문에서 이를 "T" type이라 칭한다. V_s, I_s는 송전단의 전압, 전류이고 V_r, I_r은 수전단의 전압, 전류이다. 또한, 수전단 (그림.2의 우측) x[km]만큼 떨어진 지점의 전압, 전류를 각각 V_x, I_x라 한다.

x지점의 미소구간 Δx 를 살펴보면 직렬 임피던스 z에 의한 전압강하 $V\Delta x$와 병렬 어드미턴스 y에 의한 전류 $I\Delta x$가 발생한다. 여기서 $V\Delta x$는 단위회로의 양단 임피던스에 의해 발생되는 전압강하의 합으로 정의되고 V_c는 양단 임피던스와 병렬 어드미턴스 접속지점의 전압이다. $V(x+\Delta x)= V_x+ V_{\Delta x}$ 이므로

$$V_{(x+\Delta x)} = \frac{\Delta x}{2} z I_{(x+\Delta x)} + \frac{\Delta x}{2} z I_x + V_x$$

$$= z I_x \Delta x + \frac{\Delta x}{2} z I_{\Delta x} + V_x \tag{9}$$

위식을 다시 정리하면

$$\frac{V_{(x+\Delta x)} - V_x}{\Delta x} = z I_x + \frac{z}{2} I_{\Delta x} \tag{10}$$

미분의 정의로부터 식(10)은 아래와 같이 표현 할 수 있다.

$$\frac{dV_x}{dx} = zI_x \tag{11}$$

또한, $I_{(x+\Delta x)}=I_x+ I_{\Delta x}$ 이므로

$$I_{(x+\Delta x)} = y\Delta x(V_x + \frac{\Delta x}{2} z I_x) + I_x \tag{12}$$

위식을 다시 정리하면

$$\frac{I_{(x+\Delta x)} - I_x}{\Delta x} = yV_x + y\frac{z}{2}\Delta x I_x \tag{13}$$

미분의 정의로부터 식(13)은 아래와 같이 표현 할 수 있다.

$$\frac{dI_x}{dx} = yV_x \tag{14}$$

식(11),(14)는 식(4),(6)과 동일하다.

2.1.3 Γ와 T type 장거리 송전선로 모델 비교

Γ또는 ˥ type의 경우 선로정수를 구성하는 단위회로의 병렬 어드미턴스가 송전단 또는 수전단의 어느 한쪽에 연결되는 전원이나 부하 임피던스와 중복이 된다.

전력계통에 입문하는 학생들은 실제 장거리 송전선로에 대해 약간의 의문을 가질 수 있다. T type은 송수전단 양단의 기존 병렬 어드미턴스와의 중복이 없다.

2.2 장거리 송전선로의 A,B,C,D 파라미터 유도 방법 비교

2.2.1 exponential solution을 이용한 A,B,C,D 파라미터 유도 방법

그림.2에서 왼편을 송전단, 오른편을 수전단으로 하여 직렬 임피던스와 병렬 어드미턴스가 선로전체에 무한히 연결된 등가회로를 구성한다. 그리고 전체선로 중 미소구간의 전압, 전류에 대해 미분 방정식을 세워 미분 방정식의 해를 구하여서 임의 지점의 전압과 전류를 구한다. 위의 미분방정식을 exponential 함수로 general solution(일반해)을 구하고 최종단계에서 hyperbolic 함수로 변환하여 A,B,C,D 파라미터를 유도하는 것이 대부분의 문헌에서 제시한 방법[2-14]이다.

식(7)로부터

$$\frac{d^2V_x}{dx^2} - \gamma^2 V_x = 0 \tag{15}$$

식(15)에서 일반해를 exponential 함수로 표시하면

$$V_x = k_1 e^{\gamma x} + k_2 e^{-\gamma x} \tag{16}$$

식(16)을 미분하면

$$\frac{dV_x}{dx} = \gamma k_1 e^{\gamma x} - \gamma k_2 e^{-\gamma x} \tag{17}$$

여기서 k_1과k_2는 적분상수다.

식(11)에 식(17)을 대입하면

$$I_x = \frac{\gamma}{z}(k_1 e^{\gamma x} - k_2 e^{-\gamma x})$$

$$= \frac{1}{Z_C} k_1 e^{\gamma x} - \frac{1}{Z_C} k_2 e^{-\gamma x} \tag{18}$$

여기서 $Z_C=\sqrt{z/y}$는 송전선의 진행파에 대한 전압과 전류의 비를 나타내는 파동 임피던스로 정의된다.

그림. 2.에서 x=0이면 수전단을 의미하고, 이때 $V_x= V_r$, $I_x=I_r$ 이다. 이러한 경계조건을 식(16),(18)에 대입하면

$$V_{(0)} = V_r = k_1 e^{\gamma\cdot 0} + k_2 e^{-\gamma\cdot 0} = k_1 + k_2 \tag{19}$$

$$I_{(0)} = I_r = \frac{1}{Z_C} k_1 e^{\gamma\cdot 0} - \frac{1}{Z_C} k_2 e^{-\gamma\cdot 0}$$

$$= \frac{1}{Z_C}(k_1 - k_2) \tag{20}$$

식(19), (20)를 이용하여 k_1과k_2를 구하면 다음과 같다.

$$k_1 = \frac{V_r + I_r Z_C}{2} \tag{21}$$

$$k_2 = \frac{V_r - I_r Z_C}{2} \tag{22}$$

식(21),(22)를 식(16),(18)에 대입하면

$$V_x = \frac{V_r + I_r Z_C}{2} e^{\gamma x} + \frac{V_r - I_r Z_C}{2} e^{-\gamma x}$$

$$= V_r \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} + Z_c \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} I_r \tag{23}$$

$$I_x = \frac{V_r / Z_C + I_r}{2} e^{\gamma x} - \frac{V_r / Z_C - I_r}{2} e^{-\gamma x}$$

$$= \frac{1}{Z_c} \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} V_r + \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} I_r \tag{24}$$

여기서 hyperbolic 함수는 다음과 같이 정의한다.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{25}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{26}$$

위 함수를 식(23),(24)에 적용하면, V_x와 I_x는 아래와 같이 표현된다.

$$V_x = \cosh \gamma x V_r + Z_c \sinh \gamma x I_r \tag{27}$$

$$I_x = \frac{1}{Z_c} \sinh \gamma x V_r + \cosh \gamma x I_r \tag{28}$$

$x=l$은 송전단을 의미하므로 이 경계조건을 대입하면 송전단의 V_s, I_s와 수전단의 V_r, I_r의 관계식을 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$V_l = V_s = \cosh\gamma l\, V_r + Z_c \sinh\gamma l\, I_r \tag{29}$$

$$I_l = I_s = \frac{1}{Z_c}\sinh\gamma l\, V_r + \cosh\gamma l\, I_r \tag{30}$$

위식을 A,B,C,D 파라미터로 표현하면

$$V_s = A\,V_r + B\,I_r \tag{31}$$

$$I_s = C\,V_r + D\,I_r \tag{32}$$

여기서,

$A = \cosh\gamma l$, $B = Z_c \sinh\gamma l$

$C = \frac{1}{Z_c}\sinh\gamma l$, $D = \cosh\gamma l$

이상의 exponential solution을 이용한 장거리 송전선로의 A,B,C,D 파라미터 유도과정을 살펴보면, 식(19),(20)에서 경계조건이 주어진 이후 k_1과 k_2를 유도하기 위해 식(21)-(24)의 길고 복잡한 과정이 필요함을 알 수 있다.

2.2.2 Bergen과 Vittal이 제시한 hyperbolic solution을 이용한 A,B,C,D 파라미터 유도 방법

식(15)의 일반해는 hyperbolic 함수로 직접 표현이 가능하다.

$$V_x = H_1 \cosh\gamma x + H_2 \sinh\gamma x \tag{33}$$

$H_1=k_1+k_2$, $H_2=k_1-k_2$의 관계가 있다.
또한, 식(11)로부터

$$\frac{dV_x}{dx} = zI_x = H_1\gamma \sinh\gamma x + H_2\gamma\cosh\gamma x \tag{34}$$

위 식을 다시 정리하면

$$I_x = \frac{1}{Z_C}H_2\cosh\gamma x + \frac{1}{Z_C}H_1\sinh\gamma x \tag{35}$$

단, $\cosh' x = \sinh x$, $\sinh' x = \cosh x$

그림. 2.에서 x=0이면 수전단을 의미하고, 이때 $V_x=V_r$, $I_x=I_r$ 이다. 경계조건을 식(33),(35)에 대입하면

$$V_{(0)} = V_r = H_1\cosh\gamma\cdot 0 + H_2\sinh\gamma\cdot 0 = H_1 \tag{36}$$

$$I_{(0)} = I_r = \frac{1}{Z_C}H_2\cosh\gamma\cdot 0 + \frac{1}{Z_C}H_1\sinh\gamma\cdot 0 = \frac{1}{Z_C}H_2 \tag{37}$$

식(36),(37)에서 H_1 과 H_2를 간단히 얻을 수 있다.

$$H_1 = V_r \tag{38}$$

$$H_2 = Z_c I_r \tag{39}$$

위 식을 대입하여, Vx와 Ix를 구하면

$$V_x = \cosh\gamma x V_r + Z_c \sinh\gamma x I_r \tag{40}$$

$$I_x = \frac{1}{Z_c}\sinh\gamma x V_r + \cosh\gamma x I_r \tag{41}$$

x=l은 송전단을 의미하므로 이 경계조건을 대입하면

$$V_s = \cosh\gamma l\, V_r + Z_c\sinh\gamma l\, I_r \tag{42}$$

$$I_s = \frac{1}{Z_c}\sinh\gamma l\, V_r + \cosh\gamma l\, I_r \tag{43}$$

위식을 A,B,C,D 파라미터로 표현하면

$$V_s = A\,V_r + B\,I_r \tag{44}$$

$$I_s = C\,V_r + D\,I_r \tag{45}$$

여기서

$A = \cosh\gamma l$, $B = Z_c\sinh\gamma l$

$C = \frac{1}{Z_c}\sinh\gamma l$, $D = \cosh\gamma l$

이와 같이 문헌[1]에서 제시한 hyperbolic solution을 사용할 경우, 기존 문헌[2-14]에서 사용한 exponential solution을 사용 할 때 보다 계산과정이 축소된다.

특히, 송전단 및 수전단의 경계조건을 대입할 때, hyperbolic solution을 사용할 경우 수식이 매우 간단해 진다.

3. 결 론

본 논문을 통해 기존의 Γ-모델과 병행하여 사용할 수 있는 새로운 T-모델을 제시하였다. T-모델을 사용 할 경우 기존의 Γ-모델에 비하여 보다 명확한 설명이 가능하다.
또한, 장거리 송전선로의 A,B,C,D 파라미터 유도 시 hyperbolic solution을 이용한 간편한 유도방법을 소개하였다. hyperbolic solution을 사용 할 경우 수식들이 매우 간결해지고, A,B,C,D 파라미터 유도과정에서 사용되는 수식이 줄어든다. 특히 수식 유도과정의 경계 값 처리가 매우 간단해 짐을 보였다.
전력계통에 입문하는 전공자들이 장거리 송전선로를 보다 쉽고 정확하게 이해 할 수 있도록 앞으로 새로 출판되는 전력계통 관련 문헌은 T-모델과 hyperbolic solution을 수록할 것을 권하는 바이다.

[참 고 문 헌]

[1] R.Bergen Vijay Vittal, “Power system analysis”, 2 ed. McGraw-Hill Inc, p.p 90-100, 1994.
[2] J.Duncan Glover, Mulukutla S. Sarma, Thomas J. Overbye, “Power system analysis and design”, 4 ed. Thomson, p.p 243-248, 2008.
[3] W.D. Stevenson, “Elements of power system analysis”, 4ed. McGraw-Hill Inc, p.p 94-107, 1982.
[4] Walter C. Johnson, “Transmission lines and networks”, Tokyo : McGraw-Hill Inc, p.p 32-35, 101-107, 1950.
[5] Edward Wilson Kimbark, Sc.D, “Electrical transmission of power and signals”, New York and London : John Wiley & Sons, p.p 92-102, 1949.
[6] Vincent Del Toro, “Electirc power system”, Prentice-Hall Inc, p.p 210-214, 1992.
[7] Mohamed E. El-Hawary, “Electirc power system design and analysis”, IEEE press marketing, p.p 164-169, 1995.
[8] I.J Nagrath, D. P Dothari, “Power system engineering”, McGraw-Hill Inc, p.p 131-133, 1994.
[9] Jos Arrillaga, Bruce C Smith, Neville R Waston, Alan R Wood, “Power system harmonic analysis”, John Wiley & Sons, p.p 46-48, 1997.
[10] Hugh Hildreth Skilling, “Electric transmission lines”, McGraw-Hill Inc, p.p 1-15, 1951.
[11 Hadi Saadat, “Power system analysis”, 2 ed. McGraw-Hill Inc, p.p 151-155, 2004.
[12 Charles A. Gross, “Power system analysis”, 2 ed. John Wiley & Sons, p.p 120-130, 1986.
[13] J.J. Grainger and W.D. Stevenson Jr, “Power system analysis”, 5 ed, Prentice-Hall Inc, p.p 202-215, 2000.
[14] Richard D. Shultz, Richard A. Smith, “Introduction to electric power engineering”, Harper & Row Publishers Inc, p.p146-150, 1985.