

매크로-스타 네트워크와 전위 네트워크간의 노드 사상 알고리즘

서정현*, 이형욱, 장문석

순천대학교 {컴퓨터학과, 컴퓨터교육과, 컴퓨터학과}

{jhseo, oklee, jang}@suncheon.ac.kr

Node Mapping Algorithm Between Macro-star Networks and Transposition Networks

Junghyun Seo*, Hyeongok Lee, Moonsuk Jang

{Dept. Computer Sci., Dept. Computer Edu., Dept. Computer Sci.} Suncheon National Univ.

요 약

매크로-스타그래프와 전위그래프는 Cayley 그래프로 널리 알려진 상호연결망이다. 본 논문에서는 매크로-스타 그래프를 전위그래프에 연장을 5, 확장을 1에 임베딩 가능성을 보인다. 또한, 전위그래프를 매크로-스타그래프에 임베딩하는 연장이 $O(n)$ 이지만, 평균 연장이 2이하임을 보인다. n 은 전위 그래프의 차원이다.

1. 서론

병렬 컴퓨터는 강하게 결합된 컴퓨터와 약하게 결합된 컴퓨터로 나눌 수 있다. 강하게 결합된 컴퓨터는 공유 메모리를 가지며 프로세서간의 통신은 공유 메모리 접근을 통해 이루어진다. 이 경우 각 프로세서는 전체 메모리 공간에 대한 접근이 쉽지만 시스템의 확장성이 좋지 않은 단점이 있다. 약하게 결합된 컴퓨터는 각각의 프로세서가 자신의 메모리를 가지고 프로세서간의 통신은 프로세서를 연결하는 연결망을 통해 메시지를 교환하는 방식으로 이루어진다. 이 경우 다른 메모리 공간에 접근하기 위해서는 프로세서간의 메시지 교환이 이루어져야 하기 때문에 강하게 결합된 컴퓨터보다는 효율이 낮지만 시스템의 확장성이 쉬운 장점을 갖는다. 병렬처리 컴퓨터에서 공유 메모리를 갖는 구조를 다중 프로세서(multiprocessor) 시스템이라 하고, 분산 메모리를 갖는 구조를 다중 컴퓨터(multicomputer) 시스템이라 한다. 다중 컴퓨터의 프로세서들을 연결하기 위한 상호 연결망 구조는 전체 시스템의 성능 및 시스템의 확장성에 큰 영향을 미친다. 따라서 상호 연결망에 대한 연구는 병렬 처리 컴퓨터 개발을 위한 기반으로 그 필요성은 계속 증가하고 있으며 상호연결망을 평가하는 척도로 분지수, 지름, 대칭성, 고장허용도, 확장성, 방송, 임베딩 등이 있다[1,4,6].

임베딩은 상호연결망 G 의 프로세서와 통신링크를 다른 연결망 H 의 프로세서와 통신링크들로 사상하는 것으로서, 상호연결망 G 에서 개발된 알고리즘을 상호연결망 H 에서 효율적으로 실행시킬 수 있는지를 연구하는 분야 중의 하나이다. 임베딩의 비용을 평가하는 척도는 연장을(dilation), 밀집을(congestion), 확장을(expansion) 등이 있다. 지금까지 제안된 상호연결망은 메쉬, 하이퍼큐브[2], 스타 그래프[2,3], 매크로-스타그래프[7], 전위그래프[5] 등이 있다.

본 논문에서는 Cayley 그래프로 널리 알려진 매크로-스타 그래프와 전위그래프 상호간의 임베딩을 분석한다. 임베딩 결과로는 매크로-스타 그래프를 전위그래프에 연장을 5, 확장을 1에 임베딩 가능성을 보인다. 또한, 매크로-스타 그래프를 전위그래프로 임베딩하는 평균연장이 2이하임을 보인다. 이러한 결과는 매크로-스타그래프에서 개발된 알고리즘을

전위그래프에서 활용 가능성을 의미한다. 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 본 논문에서 제시하는 상호연결망에 대한 관련연구 분야를 살펴보고, 3장에서는 매크로-스타그래프와 전위그래프 상호간의 임베딩을 분석하며, 4장에서 결론을 맺는다.

2. 관련연구

상호 연결망은 각 프로세서를 노드로, 프로세서들 간의 통신 채널을 에지로 나타내는 무방향 그래프 $G=(V,E)$ 로 표현된다[3,9,11]. 여기서 $V(G)$ 는 노드들의 집합, 즉 $V(G)=\{0,1,2,\dots,N-1\}$ 이고, $E(G)$ 는 에지의 집합으로써 $V(G)$ 내의 임의의 두 노드 v 와 w 의 쌍 (v,w) 로서 에지 (v,w) 가 존재할 필요충분 조건은 노드 v 와 w 사이에 통신 채널이 존재하는 것이다. 상호 연결망을 평가하는 망 척도는 분지수(degree), 지름(diameter), 대칭성(symmetry), 확장성(scalability), 고장 허용도(fault tolerance), 방송(broadcasting) 및 임베딩(embedding) 등이 있다. 지금까지 제안된 상호연결망을 노드 수를 중심으로 분류하면 $n \times k$ 개 노드를 갖는 메쉬, 2^k 개 노드를 갖는 하이퍼큐브, $n!$ 개 노드를 갖는 스타그래프 부류로 나눌 수 있다.

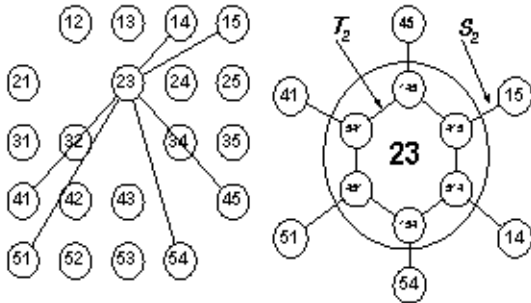
매크로-스타 그래프 $MS(J,n)$ 은 $(nJ+1)$ 개의 노드와 $(nJ+1) \times (nJ-1)$ 개의 에지로 구성된 연결망이다. 각 노드의 주소는 $k=(nJ+1)$ 개의 서로 다른 심벌의 순열로 표현되고, 노드 v 와 w 의 연결관계는 아래의 2가지 에지 발생기 T_j, S_j 를 적용하여 생성된 순열들 사이에 에지가 존재한다. k 개의 서로 다른 심벌 집합을 $\langle k \rangle = \{1, 2, \dots, k\}$ 이라 하고, $\langle k \rangle$ 에 대한 심벌의 순열을 $U = u_1 u_2 \dots u_k$, $u_i \in \langle k \rangle$ 이라 할 때 매크로-스타 그래프 $MS(J,n)$ 은 다음과 같이 정의된다 [7].

$V(MS(J,n)) = \{U = u_1 u_2 \dots u_k \mid u_i, u_j \in \langle k \rangle, u_i \neq u_j, i \neq j, 1 \leq i, j \leq k\}$,

$E(MS(J,n)) = \{(U, V) \mid U, V \in V(MS(J,n)) \text{ satisfying } U = T_j(V) \text{ or } U = S_j(V), 2 \leq j \leq n+1, 2 \leq i \leq J\}$

에지 발생기 $T_j(U) = u_1 u_2 \dots u_{j-1} u_j u_{j+1} \dots u_k$ 는 순열 $U = u_1 u_2 \dots u_k$ 에서 첫 번째 심벌 u_1 과 u_j 를 서로 교환하여 생성된 순열을 연결

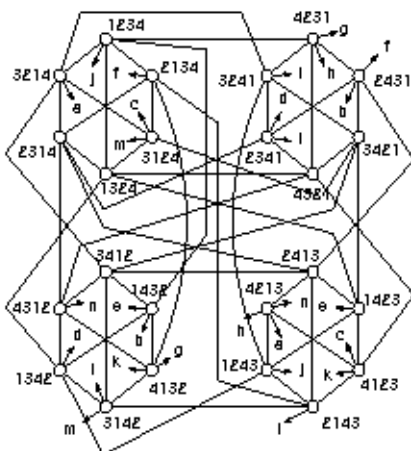
하는 에지이고, 에지 발생기 $S_{2,i}(m_{i,j}) = m_1U_{(i-1)n+2:3n+1}U_{i+1} + 2:U_{(i-1)n+2:3n+1}U_{2n+1} + 1U_{2n+1}U_{i+1} + 2:U_{i+1}$ 는 순열 $U = m_{i,j}$ 에서 심볼 시퀀스 U_{2n+1} 과 $U_{(i-1)n+2:3n+1}$ 를 서로 교환하여 생성된 순열을 연결하는 에지이다. 에지 발생기 $S_{2,i}$ 를 간단히 S_i 라 한다. 여기서 심볼 시퀀스 $U_{(i-1)n+2:3n+1}$ 를 클러스터라 하고, 한 클러스터를 구성하는 원소의 개수는 $MS(J,n)$ 에서 n 개이다. 그림 1은 매크로-스타 그래프 $MS(2,2)$ 를 두 번째 클러스터를 기준으로 구성된 노드를 표현했다. 그림 1의 우측 큰 원은 두 번째 클러스터의 심볼이 23으로 구성된 노드들로써, 145로 표현된 노드의 순열을 모두 표현하면 14523이고, 순열 14523에서 에지 발생기 $T_2(14523)$ 에 의해 생성된 순열은 41523이고, 에지 발생기 $T_3(14523)$ 에 의해 생성된 순열은 54123이다. 그리고 어떤 순열 U 에 에지 발생기 T_i 와 S_i 를 순차적으로 적용한 경우 $S_i(T_i(U))$ 로 표현한다. 예를 들어 $S_2(T_2(14523))$ 에 의해 생성된 순열은 먼저 순열 14523에 에지 발생기 T_2 에 의해 41523을 생성하고, 순열 41523에 에지 발생기 S_2 를 적용하여 순열 42315에 도달하게 된다.



(그림 1) 매크로-스타 그래프 $MS(2,2)$

n -차원 전위그래프 T_n 은 $n!$ 개의 노드와 $n(n-1)n!/4$ 개의 에지로 구성된다. 각 노드의 주소는 n 개의 서로 다른 심볼의 순열로 표현될 수 있고, 노드 v 와 w 의 n 개 비트 스트링에서 임의의 위치의 두개 심볼만 교환된 순열을 갖는 노드 v 와 w 사이에 에지가 존재한다. n 개의 서로 다른 심볼 집합을 $\langle n \rangle = \{1, 2, \dots, n\}$ 이라 하고, $\langle n \rangle$ 의 순열을 $p = p_1p_2 \dots p_n$, $p_i \in \langle n \rangle$ 이라 할 때 전위그래프 T_n 은 다음과 같이 정의된다(5).

$$V(T_n) = \{(p_1p_2 \dots p_i \dots p_j \dots p_n) \mid p_i \in \langle n \rangle, i \neq j, p_i \neq p_j\}$$

$$E(T_n) = \{(p_1p_2 \dots p_i \dots p_j \dots p_n)(p_1p_2 \dots p_j \dots p_i \dots p_n) \mid (p_1p_2 \dots p_i \dots p_j \dots p_n) \in V(T_n), 1 \leq i < j \leq n, i \neq j\}$$


(그림 2) 4 차원 Transposition 그래프

n 개의 심볼로 구성된 순열과 그 순열에서 임의의 서로 다

른 두개 심볼이 교환된 순열을 갖는 노드 사이에 에지가 있으므로 T_n 은 분지수가 $n(n-1)/2$ 인 정규 그래프이다. 그림 2는 4-차원 전위그래프의 예이다. 전위그래프 T_n 은 에지에 고장(fault)이 발생했을 때 고장난 에지를 제외한 나머지 에지들과 노드들을 통하여 스타(star) 그래프와 버블정렬그래프를 서브 그래프로 구성할 수 있도록 에지를 추가하여 구성한 상호 연결망이다. 전위그래프 T_n 은 노드 대칭적이고, 이분 그래프(bipartite graph)이다. T_n 의 지름은 $n-1$, 고장 지름은 n , 노드 연결도는 분지수 $n(n-1)/2$ 과 같으므로 T_n 은 최대 고장 허용도를 갖는다.

3. 일대다 노드 사상 알고리즘

그래프의 임베딩(embedding)은 어떤 그래프 G 가 다른 그래프 H 구조에 포함 혹은 어떻게 연관되어 있는지를 알아보기 위해, 어떤 특정한 그래프를 다른 그래프에 사상(mapping)하는 것이다. 그래프 G 의 그래프 H 에 대한 임베딩 f 는 다음과 같이 정의되는 함수의 쌍 (σ, ρ) 을 말한다. σ 는 G 의 정점 집합 $V(G)$ 를 H 의 정점 집합 $V(H)$ 에 대응시키는 함수이고, ρ 는 G 의 에지 $e = (v, w)$ 에서 $\sigma(v)$ 와 $\sigma(w)$ 를 잇는 H 상의 경로로 대응시키는 함수이다. 임베딩의 비용을 나타내는 척도는 연장을(dilation), 밀집을(congestion), 확장을(expansion)이 사용되고 있다. 그래프 G 의 에지 e 의 연장은 H 상에서의 경로 $\rho(e)$ 의 길이를 말하고, 임베딩 f 의 연장은 G 의 모든 에지의 연장을 증 최대값이다. 그래프 H 의 에지 e' 의 밀집율은 e' 에 포함되는 $\rho(e)$ 의 개수를 말하고, 임베딩 f 의 밀집율은 H 의 모든 에지의 밀집율을 증 최대값이다. 임베딩 f 의 확장은 G 의 정점의 개수에 대한 H 의 정점의 개수의 비를 말한다.

매크로-스타 그래프 $MS(J,n)$ 을 구성하는 에지는 2가지이다. 첫째, 노드의 첫 번째 심볼과 기본모듈 내의 i 번째 심볼이 교환된 순열을 연결하는 에지 T_i 이고 둘째, 첫 번째 기본모듈과 i 번째 기본모듈간에 교환된 순열을 연결하는 에지 S_i 이다($2 \leq i \leq n+1, 2 \leq i \leq J$). 매크로-스타 그래프 $MS(2,n)$ 과 전위그래프 T_{2n+1} 은 $(2n+1)!$ 개의 노드를 갖고, 노드 대칭적인 성질을 가지고 있다. 매크로-스타 그래프 $MS(2,n)$ 은 2개의 클러스터로 구성되어 있고, 클러스터를 구성하는 원소의 심볼은 n 개이다. 임베딩 방법은 매크로-스타 그래프 $MS(2,n)$ 의 노드 $U(u_1u_2u_3 \dots u_nu_{n+1})$ 와 동일한 주소를 갖는 전위그래프 T_{2n+1} 의 노드 $T(t_1t_2t_3 \dots t_{2n+1})$ 로 일대일 사상하고, 매크로-스타 그래프 $MS(2,n)$ 의 노드 U 와 $n+1$ 개의 에지에 의해 연결된 노드 U' 를 전위그래프 T_{2n+1} 의 노드 T 에서 노드 U' 와 동일한 주소를 갖는 노드 T' 까지 라우팅을 위한 최단경로 길이로 연장을 분석한다. 이때 라우팅을 위한 최단경로 길이란 전위그래프 T_{2n+1} 의 노드 T 에서 노드 T' 까지 라우팅을 위해 적용해야 할 에지 개수를 의미한다.

정리 1 전위(Transposition) 그래프 T_{2n+1} 은 매크로-스타(Macro-star) 그래프 $MS(2,n)$ 에 연장을 5에 임베딩 가능하다.

증명 임베딩 방법은 전위그래프 T_{2n+1} 의 노드 $T(t_1t_2t_3 \dots t_{2n+1})$ 를 매크로-스타 그래프 $MS(2,n)$ 의 노드 $U(u_1u_2u_3 \dots u_nu_{n+1})$ 로 사상하고, 노드 T' 를 전위그래프 T_{2n+1} 의 노드 중 동일한 순열을 갖는 노드 U' 로 사상한다. 전위그래프 T_{2n+1} 의 노드 $T(t_1t_2t_3 \dots t_{2n+1})$ 와 에지 $E(i,j)$ 에 의해 인접한 노드 T' 의 순열은 $t_1t_2t_3 \dots t_i \dots t_j \dots t_{2n+1}$ 이다. 전위그래프 T_{2n+1} 의 노드 T 와 T' 가 사상된 매크로-스타 그래프 $MS(2,n)$ 의 노드

$U(u_1 u_2 u_3 \dots u_j \dots u_{n+j} \dots u_{2n+1})$ 와 $U'(u_1 u_2 u_3 \dots u_j \dots u_{n+j} \dots u_{2n+1})$ 는 서로 인접하지 않으므로 노드 $U(u_1 u_2 u_3 \dots u_j \dots u_{n+j} \dots u_{2n+1})$ 에서 노드 $U'(u_1 u_2 u_3 \dots u_j \dots u_{n+j} \dots u_{2n+1})$ 까지 라우팅을 위한 최단 경로 상의 에지 개수를 통해 연장율을 분석한다. 전위그래프 T_{2n+1} 의 노드를 연결하는 에지 $E(i, j)$ 에서 i 와 j 의 값에 따라 3가지 경우로 나누어 분석한다.

경우1. $i, j \leq n+1, i < j$

전위그래프 T_{2n+1} 의 노드 $T(t_1 t_2 t_3 \dots t_i \dots t_j \dots t_{2n+1})$ 와 노드 T' 를 연결하는 에지 $E(i, j)$ 에서 i 와 j 의 값이 $n+2$ 보다 작다는 의미는 서로 교환되는 2개의 심벌이 첫 번째 심벌부터 $n+1$ 번째 심벌에서만 교환이 발생함을 의미한다. 전위그래프 T_{2n+1} 의 노드 $T(t_1 t_2 t_3 \dots t_i \dots t_j \dots t_{2n+1})$ 가 사상된 매크로-스타 그래프 $MS(2, n)$ 의 노드 $U(u_1 u_2 u_3 \dots u_i \dots u_j \dots u_{2n+1})$ 에서 첫 번째 심벌부터 $n+1$ 번째 심벌에서만 교환이 발생한다는 것은 노드 U 의 첫 번째 클러스터를 구성하는 심벌 중 원소 교환이 발생함을 의미한다. 따라서 노드 U 의 순열은 $u_1 u_2 u_3 \dots u_i \dots u_j \dots u_{n+2i} + s \dots u_{2n+1}$ 이고, 노드

$U(u_1 u_2 u_3 \dots u_i \dots u_j \dots u_{2n+1})$ 와 노드 U' 는 서로 인접하지 않으므로 노드 U 에서 노드 U' 까지 최단 경로 라우팅을 위한 에지 시퀀스는 T_1, T_2, T_3 이다. 노드

$U(u_1 u_2 u_3 \dots u_i \dots u_j \dots u_{n+2i} + s \dots u_{2n+1})$ 에서 $U'(u_1 u_2 u_3 \dots u_i \dots u_j \dots u_{n+2i} + s \dots u_{2n+1})$ 까지 라우팅 과정은 다음과 같다. 먼저 심벌 u_i 를 첫 번째 열에 위치하도록 $U(u_1 u_2 u_3 \dots u_i \dots u_j \dots u_{n+2i} + s \dots u_{2n+1})$ 에서 에지 T_1 에 의해 인접한 노드 $T(U) = u_i u_2 u_3 \dots u_1 \dots u_i \dots u_{n+2i} + s \dots u_{2n+1}$ 이고, 노드 $T(U)$ 에서 교환할 심벌 u_i 와 u_j 를 서로 교환하는 에지 T_2 에 의해 인접한 노드

$T_1 T_2(U) = u_j u_2 u_3 \dots u_1 \dots u_i \dots u_{n+2i} + s \dots u_{2n+1}$ 이고, 노드 $T_1 T_2(U)$ 에서 첫 번째 열에 있는 심벌 u_j 와 u_i 를 교환하는 에지 T_3 에 의해 인접한 노드

$T_1 T_2 T_3(U) = u_i u_2 u_3 \dots u_j \dots u_i \dots u_{n+2i} + s \dots u_{2n+1}$ 이다. 매크로-스타 그래프 $MS(2, n)$ 의 노드 U 에서 에지 시퀀스 T_1, T_2, T_3 를 순차적으로 적용한 노드 $T_1 T_2 T_3(U)$ 는 순열 U' 와 동일한 순열이므로 전위 그래프 T_{2n+1} 의 노드

$T(t_1 t_2 t_3 \dots t_i \dots t_j \dots t_{2n+1})$ 와 노드 T' 를 연결하는 에지 $E(i, j)$ 는 연장율 3에 임베딩 가능함을 알 수 있다.

경우2. $i \leq n+1, j \geq n+2$

전위그래프 T_{2n+1} 의 노드 $T(t_1 t_2 t_3 \dots t_i \dots t_j \dots t_{2n+1})$ 와 노드 T' 를 연결하는 에지 $E(i, j)$ 에서 $i \leq n+1$ 이고 $j \geq n+2$ 의 의미는 서로 교환되는 2개의 심벌이 $n+1$ 번째 위치를 기준으로 하나는 앞쪽에 위치하고 다른 하나는 뒤쪽에 위치함을 의미한다. 전위그래프 T_{2n+1} 의 노드 $T(t_1 t_2 t_3 \dots t_i \dots t_j \dots t_{2n+1})$ 가 사상된 매크로-스타 그래프 $MS(2, n)$ 의 노드

$U(u_1 u_2 u_3 \dots u_i \dots u_j \dots u_{2n+1})$ 에서 교환할 심벌의 위치가 $n+1$ 번째를 기준으로 교환이 발생한다는 것은 노드 U 의 첫 번째 클러스터의 한 심벌과 두 번째 클러스터의 한 원소에서 교환이 발생함을 의미한다. 따라서 노드 U 의 순열은 $u_1 u_2 u_3 \dots u_i \dots u_{n+1} + u_j + s \dots u_{2n+1}$ 이고, 노드

$U(u_1 u_2 u_3 \dots u_i \dots u_j \dots u_{2n+1})$ 와 노드 U' 는 서로 인접하지 않으므로 노드 U 에서 노드 U' 까지 최단 경로 라우팅을 위한 에지 시퀀스는 T_1, S_2, T_2, S_2, T_3 이다. 노드

$U(u_1 u_2 u_3 \dots u_i \dots u_{n+1} + u_j + s \dots u_{2n+1})$ 에서 $U'(u_1 u_2 u_3 \dots u_i \dots u_{n+1} + u_j + s \dots u_{2n+1})$ 까지 라우팅 과정은 다음과 같다. 노드

$U(u_1 u_2 u_3 \dots u_i \dots u_{n+1} + u_j + s \dots u_{2n+1})$ 에서 심벌 u_i 를 첫 번째 열에 위치하도록 에지 T_1 에 의해 인접한 노드 $T_1(U) = u_i u_2 u_3 \dots u_1 \dots u_i \dots u_{n+1} + u_j + s \dots u_{2n+1}$ 이고, 노드

$T_1(U)$ 에서 교환할 심벌 u_i 를 첫 번째 클러스터에 위치하도록

에지 S_2 에 의해 인접한 노드 $S_2 T_1(U) = u_i u_{n+1} + u_2 \dots u_j \dots u_{2n+1} u_2 u_3 \dots u_{n+1}$ 이고, 노드 $S_2 T_1(U)$ 에서 교환할 심벌 u_i 를 첫 번째 열에 위치하도록 에지 T_2 에 의해 인접한 노드

$T_2 S_2 T_1(U) = u_i u_{n+1} + u_2 \dots u_1 \dots u_j \dots u_{2n+1} u_2 u_3 \dots u_{n+1}$ 이고, 노드 $T_2 S_2 T_1(U)$ 에서 첫 번째 열에 있는 심벌 u_i 와 첫 번째 클러스터에 있는 심벌 u_j 를 교환하는 에지 T_3 에 의해 인접한 노드 $T_3 T_2 S_2 T_1(U) = u_j u_{n+1} + u_2 \dots u_1 \dots u_i \dots u_{2n+1} u_2 u_3 \dots u_{n+1}$ 이다. 노드 $T_3 T_2 S_2 T_1(U)$ 에서 1열에 있는 심벌 u_j 와 심벌 u_1 를 교환하기 위해 에지 T_1 에 의해 인접한 노드

$T_1 T_3 T_2 S_2 T_1(U) = u_1 u_{n+1} + u_2 \dots u_j \dots u_{2n+1} u_2 u_3 \dots u_{n+1}$ 이고, 노드 $T_1 T_3 T_2 S_2 T_1(U)$ 에서 첫 번째 클러스터와 두 번째 클러스터를 교환하기 위해 에지 S_2 에 의해 인접한 노드 $S_2 T_1 T_3 T_2 S_2 T_1(U) = u_1 u_2 u_3 \dots u_{n+1} + u_{n+1} + u_2 \dots u_j \dots u_{2n+1}$ 이다. 매크로-스타 그래프 $MS(2, n)$ 의 노드 U 에서 에지 시퀀스 S_2, T_2, T_3, T_1, S_2 를 순차적으로 적용한 노드 $S_2 T_1 T_3 T_2 S_2 T_1(U)$ 는 순열 U' 와 동일한 순열이므로 전위 (Transposition) 그래프 T_{2n+1} 의 노드 $T(t_1 t_2 t_3 \dots t_i \dots t_j \dots t_{2n+1})$ 와 노드 T' 를 연결하는 에지 $E(i, j)$ 는 연장율 5에 임베딩 가능함을 알 수 있다.

따라서 전위그래프 T_{2n+1} 의 모든 노드는 매크로-스타그래

에지 S_2 에 의해 인접한 노드

$S_2 T_1(U) = u_i u_{n+1} + u_2 \dots u_j \dots u_{2n+1} u_2 u_3 \dots u_{n+1}$ 이고, 노드 $S_2 T_1(U)$ 에서 첫 번째 열에 있는 심벌 u_i 와 첫 번째 클러스터에 있는 심벌 u_j 를 교환하는 에지 T_2 에 의해 인접한 노드

$T_2 S_2 T_1(U) = u_j u_{n+1} + u_2 \dots u_i \dots u_{2n+1} u_2 u_3 \dots u_{n+1}$ 이다. 노드 $T_2 S_2 T_1(U)$ 에서 심벌 u_i 가 있는 첫 번째 클러스터를 두 번째 클러스터와 교환하기 위해 에지 S_2 에 의해 인접한 노드

$S_2 T_2 S_2 T_1(U) = u_i u_2 u_3 \dots u_1 \dots u_{n+1} + u_{n+1} + u_2 \dots u_j \dots u_{2n+1}$ 이고, 노드 $S_2 T_2 S_2 T_1(U)$ 에서 첫 번째 열의 심벌 u_j 와 심벌 u_1 를 교환하기 위해 에지 T_3 에 의해 인접한 노드

$T_3 S_2 T_2 S_2 T_1(U) = u_1 u_2 u_3 \dots u_j \dots u_{n+1} + u_{n+1} + u_2 \dots u_i \dots u_{2n+1}$ 이다. 매크로-스타 그래프 $MS(2, n)$ 의 노드 U 에서 에지 시퀀스 T_1, S_2, T_2, S_2, T_3 를 순차적으로 적용한 노드 $T_3 S_2 T_2 S_2 T_1(U)$ 는 순열 U' 와 동일한 순열이므로 전위 (Transposition) 그래프 T_{2n+1} 의 노드

$T(t_1 t_2 t_3 \dots t_i \dots t_j \dots t_{2n+1})$ 와 노드 T' 를 연결하는 에지 $E(i, j)$ 는 연장율 5에 임베딩 가능함을 알 수 있다.

경우3. $i, j \geq n+2$

전위그래프 T_{2n+1} 의 노드 $T(t_1 t_2 t_3 \dots t_i \dots t_j \dots t_{2n+1})$ 와 노드 T' 를 연결하는 에지 $E(i, j)$ 에서 i 와 j 의 값이 $n+1$ 보다 크다는 의미는 서로 교환되는 2개의 심벌이 $n+3$ 번째 심벌부터 $2n+1$ 번째 심벌에서만 교환이 발생함을 의미한다. 전위그래프 T_{2n+1} 의 노드 $T(t_1 t_2 t_3 \dots t_i \dots t_j \dots t_{2n+1})$ 가 사상된 매크로-스타 그래프 $MS(2, n)$ 의 노드

$U(u_1 u_2 u_3 \dots u_i \dots u_j \dots u_{2n+1})$ 에서 $n+2$ 번째 심벌부터 $2n+1$ 번째 심벌에서만 교환이 발생한다는 것은 노드 U 의 두 번째 클러스터를 구성하는 심벌 중 원소 교환이 발생함을 의미한다. 따라서 노드 U 의 순열은 $u_1 u_2 u_3 \dots u_{n+1} + u_{n+2} \dots u_j \dots u_i \dots u_{2n+1}$ 이고, 노드

$U(u_1 u_2 u_3 \dots u_i \dots u_j \dots u_{2n+1})$ 와 노드 U' 는 서로 인접하지 않으므로 노드 U 에서 노드 U' 까지 최단 경로 라우팅을 위한 에지 시퀀스는 S_2, T_1, T_2, T_3, S_2 이다. 노드

$U(u_1 u_2 u_3 \dots u_i \dots u_{n+1} + u_j + s \dots u_{2n+1})$ 에서 $U'(u_1 u_2 u_3 \dots u_i \dots u_{n+1} + u_j + s \dots u_{2n+1})$ 까지 라우팅 과정은 다음과 같다. 노드 $U(u_1 u_2 u_3 \dots u_i \dots u_{n+1} + u_j + s \dots u_{2n+1})$ 에서 심벌간의 교환은 1열에 위치한 심벌과 첫 번째 클러스터에 위치한 심벌들간에만 이루어지므로 심벌 u_i 와 u_j 가 있는 두 번째 클러스터와 첫 번째 클러스터를 교환하도록 에지 S_2 에 의해 인접한 노드

$S_2(U) = u_1 u_{n+2} \dots u_j \dots u_{2n+1} u_2 u_3 \dots u_{n+1}$ 이고, 노드 $S_2(U)$ 에서 교환할 심벌 u_i 를 첫 번째 열에 위치하도록 에지 T_1 에 의해 인접한 노드

$T_1 S_2(U) = u_i u_{n+2} \dots u_1 \dots u_j \dots u_{2n+1} u_2 u_3 \dots u_{n+1}$ 이고, 노드 $T_1 S_2(U)$ 에서 첫 번째 열에 있는 심벌 u_i 와 첫 번째 클러스터에 있는 심벌 u_j 를 교환하는 에지 T_2 에 의해 인접한 노드

$T_2 T_1 S_2(U) = u_j u_{n+2} \dots u_1 \dots u_i \dots u_{2n+1} u_2 u_3 \dots u_{n+1}$ 이다. 노드 $T_2 T_1 S_2(U)$ 에서 1열에 있는 심벌 u_j 와 심벌 u_1 를 교환하기 위해 에지 T_1 에 의해 인접한 노드

$T_1 T_2 T_1 S_2(U) = u_1 u_{n+2} \dots u_j \dots u_{2n+1} u_2 u_3 \dots u_{n+1}$ 이고, 노드 $T_1 T_2 T_1 S_2(U)$ 에서 첫 번째 클러스터와 두 번째 클러스터를 교환하기 위해 에지 S_2 에 의해 인접한 노드

$S_2 T_1 T_2 T_1 S_2(U) = u_1 u_2 u_3 \dots u_{n+1} + u_{n+1} + u_2 \dots u_j \dots u_{2n+1}$ 이다. 매크로-스타 그래프 $MS(2, n)$ 의 노드 U 에서 에지 시퀀스 S_2, T_2, T_3, T_1, S_2 를 순차적으로 적용한 노드 $S_2 T_1 T_2 T_1 S_2(U)$ 는 순열 U' 와 동일한 순열이므로 전위 (Transposition) 그래프 T_{2n+1} 의 노드

$T(t_1 t_2 t_3 \dots t_i \dots t_j \dots t_{2n+1})$ 와 노드 T' 를 연결하는 에지 $E(i, j)$ 는 연장율 5에 임베딩 가능함을 알 수 있다.

따라서 전위그래프 T_{2n+1} 의 모든 노드는 매크로-스타그래

프 $MS(2, n)$ 에 일대일로 사상 가능하고, 노드를 연결하는 에지는 연장을 5 이하에 사상 가능하다. \square

정리 2 매크로-스타(Macro-star) 그래프 $MS(2, n)$ 은 전위(Transposition) 그래프 T_{2n+1} 에 연장을 n 에 임베딩 가능하다.

증명 매크로-스타 그래프 $MS(2, n)$ 의 노드를 연결하는 에지 T_i 와 에지 S_j 로 나누어 분석한다.

경우1. 에지 T_i , $2 \leq i \leq n+1$

매크로-스타 그래프 $MS(2, n)$ 의 노드 $U(u_1u_2u_3...u_{i-1}u_iu_{i+1}...u_{2n+1})$ 와 에지 T_i 에 의해 인접한 노드 $T_i(U) = u_1u_2u_3...u_{i-1}u_{i+1}...u_{2n+1}$ 이다. 매크로-스타 그래프 $MS(2, n)$ 의 노드 $U(u_1u_2u_3...u_{i-1}u_iu_{i+1}...u_{2n+1})$ 를 전위그래프 T_{2n+1} 의 노드 $T(t_1t_2t_3...t_{i-1}t_it_{i+1}...t_{2n+1})$ 로 사상하고, 노드 $U(u_1u_2u_3...u_{i-1}u_iu_{i+1}...u_{2n+1})$ 에서 에지 T_i 에 의해 인접한 노드 $U' = u_1u_2u_3...u_{i-1}u_{i+1}...u_{2n+1}$ 를 노드 $T'(t_1t_2t_3...t_{i-1}t_{i+1}...t_{2n+1})$ 로 사상했을 때, 전위그래프 T_{2n+1} 의 노드 T 와 T' 는 에지 정의에 의해 에지 $E(1, i)$ 에 의해 인접한 노드임을 알 수 있다. 따라서 매크로-스타 그래프 $MS(2, n)$ 의 노드 U 와 U' 는 전위그래프 T_{2n+1} 의 노드 T 와 T' 로 연장을 1에 각각 사상 가능하다.

경우2. 에지 S_j , $j=2$

매크로-스타 그래프 $MS(2, n)$ 을 구성하는 모듈은 2개로 구성되어 있으므로 노드 $U(u_1u_2u_3...u_{i-1}u_iu_{i+1}...u_{2n+1})$ 와 연결되는 에지 S_j 에서 $j=2$ 인 경우만 존재한다. 매크로-스타 그래프 $MS(2, n)$ 의 노드 $U(u_1u_2u_3...u_{i-1}u_iu_{i+1}...u_{2n+1})$ 와 에지 S_2 에 의해 인접한 노드 $S_2(U) = u_1u_2+1u_3+2u_4+3...u_{i-1}u_{i+1}...u_{2n+1}u_2u_3u_4...u_{i-1}u_{i+1}$ 이다. 매크로-스타 그래프 $MS(2, n)$ 의 노드 $U(u_1u_2u_3...u_{i-1}u_iu_{i+1}...u_{2n+1})$ 를 전위(Transposition) 그래프 T_{2n+1} 의 노드 $T(t_1t_2t_3...t_{i-1}t_it_{i+1}...t_{2n+1})$ 로 사상하고, 노드 $U(u_1u_2u_3...u_{i-1}u_iu_{i+1}...u_{2n+1})$ 에서 에지 S_2 에 의해 인접한 노드 $U' = u_1u_2+1u_3+2u_4+3...u_{i-1}u_{i+1}...u_{2n+1}u_2u_3u_4...u_{i-1}u_{i+1}$ 를 노드 $T'(t_1t_2+1t_3+2t_4+3...t_{i-1}t_{i+1}...t_{2n+1}t_2t_3t_4...t_{i-1}t_{i+1})$ 로 사상했을 때, 전위그래프 T_{2n+1} 의 노드 T 와 T' 는 에지 정의에 의해 서로 인접하지 않는다. 따라서 전위그래프 T_{2n+1} 의 노드 $T(t_1t_2t_3...t_{i-1}t_it_{i+1}...t_{2n+1})$ 에서 노드 $T'(t_1t_2t_3...t_{i-1}t_{i+1}...t_{2n+1})$ 까지 라우팅을 위한 최단 경로상의 에지 개수를 통해 연장을 분석한다.

전위그래프 T_{2n+1} 의 노드 $T(t_1t_2t_3...t_{i-1}t_it_{i+1}...t_{2n+1})$ 에서 노드 $T'(t_1t_2t_3...t_{i-1}t_{i+1}...t_{2n+1})$ 까지 라우팅을 위한 에지시퀀스는 $E(2, n+2)$, $E(3, n+3)$, $E(4, n+4)$, ..., $E(i, n+i)$, ..., $E(n+1, 2n+1)$ 이다. 즉 노드 $T(t_1t_2t_3...t_{i-1}t_it_{i+1}...t_{2n+1})$ 의 순열에서 첫 번째 모듈과 두 번째 모듈의 동일한 위치에 있는 심벌 t_i 와 t_{i+1} 를 교환하는 에지 $E(i, n+i)$ 를 n 번 사용하면 노드 $T'(t_1t_2t_3...t_{i-1}t_{i+1}...t_{2n+1})$ 와 동일한 순열을 생성함을 의미한다. 따라서 연장은 n 이다. \square

매크로-스타그래프 $MS(2, n)$ 를 전위그래프 T_{2n+1} 으로 사상하는 연장이 가장 큰 값이 n 이지만 대부분의 에지는 연장을 1에 사상된다. 따라서 연장에 대한 평균값이 아주 작은 상수임을 밝히는 것도 의미가 있다.

따름정리 3 매크로-스타(Macro-star) 그래프 $MS(2, n)$ 을 전위(Transposition) 그래프 T_{2n+1} 으로 임베딩 할때 평균연장은 2 이하이다.

증명 매크로-스타 그래프 $MS(2, n)$ 의 노드

$U(u_1u_2u_3...u_{i-1}u_iu_{i+1}...u_{2n+1})$ 에서 에지 T_i 에 의해 인접한 노드는 n 개이고, 에지 S_j 에 의해 인접한 노드는 1개이다. 매크로-스타 그래프 $MS(2, n)$ 의 모든 노드에서 에지 T_i 를 사상하는데 필요한 연장은 1이고, 에지 S_j 를 사상하는데 필요한 연장은 n 이므로 다음과 같이 전체 연장의 합 $\{ \frac{(2n+1)!}{2} \times 1 \times n \} + \{ \frac{(2n+1)!}{2} \times n \times 1 \} = \frac{2n \times (2n+1)!}{2}$ 으로 표현할 수 있다. 평균연장은 전체 연장을 전체 에지 개수로 나눈 값이므로 $\frac{2n \times (2n+1)!}{(n+1) \times (2n+1)!} = \frac{2n}{n+1}$ 이므로 대략 2 이하

이다. \square

4. 결론

본 연구에서는 병렬컴퓨터의 상호연결망을 위해 제안된 매크로-스타 네트워크와 전위 네트워크 사이의 노드간 일대일 사상 방법을 이용하여 임베딩의 연장을 분석하였다. 연구결과로는 전위(Transposition) 그래프 T_{2n+1} 은 매크로-스타(Macro-star) 그래프 $MS(2, n)$ 에 연장을 5에 임베딩 가능하고, 매크로-스타(Macro-star) 그래프 $MS(2, n)$ 을 전위(Transposition) 그래프 T_{2n+1} 으로 임베딩 할 때 평균연장이 2이하임을 보였다. 이러한 결과는 전위그래프에서 개발된 알고리즘을 매크로-스타 그래프에서 상수의 추가적인 비용으로 시뮬레이션 할 수 있음을 의미한다.

5. 참고 문헌

- [1] S. B. Akers and B. Krishnamurthy, "A Group-Theoretic Model for Symmetric Interconnection Network," IEEE Trans. Comput., Vol. 38, No. 4, pp. 555-565, 1989.
- [2] M. M. Azevedo, N. Bagherzaeh, and S. Latifi, "Low Expansion Packing and Embeddings of Hypercubes into Star Graphs: A Performance-Oriented Approach," IEEE Parallel and Distributed Systems, Vol. 9, No. 3, pp. 261-274, 1998.
- [3] P. Berthome, A. Ferreira and S. Perennes, "Optimal Information Dissemination in Star and Pancake Networks," IEEE Trans. on Parallel and Distributed Syst., Vol. 7, No. 12, pp. 1292-1300, 1996.
- [4] T-Y. Feng, "A Survey of Interconnection Networks," IEEE computer, pp. 12-27, December 1981.
- [5] S. Latifi and P. Srimani, "Transposition Networks as a Class of Fault-Tolerant Robust Networks," IEEE Trans. Computer, Vol. 45, No. 2, pp. 230-238, 1999.
- [6] S. Hedetniemi, S. Hedetniemi, and A. Liestman, "A Survey of Gossiping and Broadcasting in Communication Networks," Networks, vol. 18, pp. 319-349, 1988.
- [7] C. H. Yeh and E. A. Varvarigos, "Macro-Star Networks: Efficient Low-Degree Alternatives to Star Graphs," IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, Vol. 9, No. 10, pp. 987-1003, October 1998.