

공작기계의 기하학적 오차 합성 모델링을 위한 수학적 분석 기법 Mathematical Analysis for Geometrical Error Synthesis Modeling of Machine Tools

*이동목¹, #양승한²

*D. M. Lee¹, #S. H. Yang(syang@knu.ac.kr)²

¹ 경북대학교 대학원 기계공학과, ² 경북대학교 기계공학부

Key words : Machine Tools, Formulation for Error Synthesis Modeling, Geometric error, HTM

1. 서론

최근 공작기계 산업 분야에 있어 오차 보정 시스템 개발은 이미 필수가 되었다. 5축 공작기계가 일반화됨에 따라 보다 정확한 오차 측정과 실시간 보정과 같은 정밀도를 향상시키기 위한 노력은 오랫동안 연구가 이루어져왔으며 많은 성과를 이끌었다.^{1,2} 그 중 가장 알려져 있고 널리 사용되는 방법은 오차 합성 모델링을 사용하여 공작물과 툴의 기하학적 관계(kinematic chain)를 파악하는 변수 접근법(parametric approach)이다. 이 방법은 여러 오차 변수들에 대한 오차 합성 모델링을 수립해야 하며, 변수들의 취급과 모델링을 보다 편리하게 하기 위해 전통적인 HTM(Homogeneous Transform Matrix)을 이용하고 행렬 곱 계산을 위해 컴퓨터를 이용하기도 된다. 하지만 다축 공작기계의 경우 크게 증가한 변수들의 취급과 많은 계산의 요구로 인해 종종 계산상의 혼란을 야기하거나 오차항의 물리적 의미를 파악하는데 어려움을 갖게 된다.³ 또한 조인트의 위치와 배열에 따라 시스템 형태(Configuration)가 다양하며 각각의 시스템에 모두 만족할 수 있는 일반화된 수학적 모델링 방법이 요구된다.

2. 기하학적 오차의 정의

HTM(Homogeneous Transform Matrix)은 4X4 행렬로 구성되며 두 좌표축 간의 관계(위치, 자세)에 대한 정보를 가지고 있다.

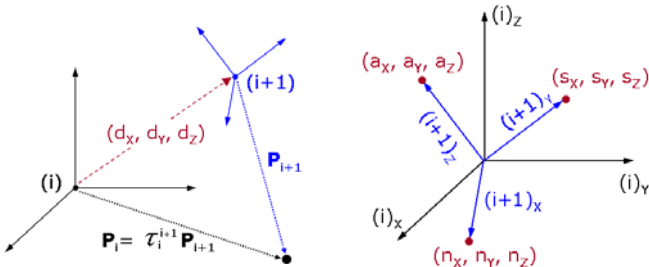


Fig. 1 Relationship between Two Local Coordinates

$$T_i^{i+1} = \begin{bmatrix} \text{ROT} & \text{TRS} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서, $\text{TRS} = [d_x \ d_y \ d_z]^T$

$$\text{ROT} = [\mathbf{n} \ \mathbf{s} \ \mathbf{a}] = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix}$$

Fig. 1 은 (i) 좌표계를 기준으로 한 (i+1) 좌표계의 위치와 자세에 관한 벡터 정보를 보여주며, 이것은 기준좌표계에 대해 임의의 조인트에 부여한 로컬좌표계는 어느 한 정적인 상태에서 이전 중간 과정에 관계없이 그 때의 자세와 위치에 의해 표현될 수 있다는 것을 의미한다.

3. 오차의 정의

회전 조인트가 포함된 4축 이상의 다축 시스템의 경우 오프셋 및 직각도/평행도 오차의 추가로 인해 더욱 많은 오차 요소를 포함하게 된다. 그 때의 오차 수는 조인트들이 구성된 형태에

Table 1 Definition of Transform Matrix and Vector

원점 오프셋	$\text{OM} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \equiv [\mathbf{I} \mid \mathbf{0}]$	$\mathbf{0} = [O_x \ O_y \ O_z]^T$
축 이동거리	$\text{TM} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \equiv [\mathbf{I} \mid \mathbf{T}]$	$\mathbf{T} = [T_x \ T_y \ T_z]^T$
위치오차	$\text{DM} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{D} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \equiv [\mathbf{I} \mid \mathbf{D}]$	$\mathbf{D} = [\delta_x \ \delta_y \ \delta_z]^T$
각도오차	$\text{EM} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \equiv [\mathbf{I} + \mathbf{E} \mid \mathbf{0}]$	$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 0 \end{bmatrix}$
직각도 오차	$\text{SM} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \equiv [\mathbf{I} + \mathbf{S} \mid \mathbf{0}]$	$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -S_z & S_y \\ S_z & 0 & -S_x \\ -S_y & S_x & 0 \end{bmatrix}$
OM.TM	$\text{LM} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{L} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \equiv [\mathbf{I} \mid \mathbf{L}]$	$\mathbf{L} = \mathbf{O} + \mathbf{T}$
EM.SM	$\text{RM} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \equiv [\mathbf{I} + \mathbf{R} \mid \mathbf{0}]$	$\mathbf{R} = \mathbf{E} + \mathbf{S}$

따라 달라진다. 오차 항으로 이루어진 행렬 연산을 다루기 위해선 우선 정확한 로컬좌표계 기준을 설정하여야 하며 오차 정의를 명확히 해야 한다. Table 1 은 본 연구에서 사용되는 변수들의 변환 행렬과 벡터에 대한 기호들을 나타내며 행렬 연산의 용이함을 위해 4번째 행을 생략한 표기법을 사용하도록 한다. 병진 운동을 하는 한 축에 대한 오차 행렬은 미리 정의한 오차 항들로 표현할 수 있다. Fig. 2 는 기준좌표계에 대해 병진 운동을 하는 조인트에 대한 오차 변환 순서에 대한 예를 보여주며 그 때의 행렬 구성은 식 (2) 와 같이 계산된다.

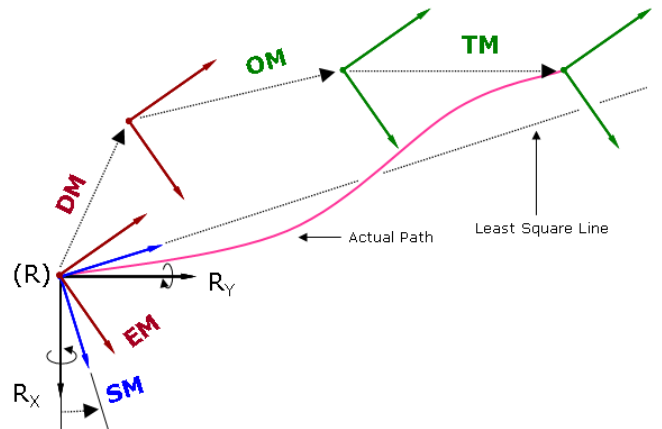


Fig. 2 Transform Sequence for a Prismatic Joint

$$T_R^X = \text{TM} \cdot \text{OM} \cdot \text{DM} \cdot \text{EM} \cdot \text{SM} = [\mathbf{I} + \mathbf{R} \mid \mathbf{L} + \mathbf{D}] \quad (2)$$

여기서, 오차 항들은 미소한 값으로 이루어지며 오차항의 곱으로 생성되는 고차 항은 무시한다. 즉, $\mathbf{ES} = \mathbf{SE} \approx \mathbf{0}$.

3. 연속된 오차 변환 행렬

N개의 연속된 조인트에 대한 오차 변환 행렬의 곱은 식 (3) 과 같고 이를 간단하게 나타내면 식 (4) 와 같은 식으로 표현할 수 있다. 여기서, **ROT**는 3X3 행렬이며 **TRS**는 3X1 벡터이다.

$$\begin{aligned} \tau_0^N &= \tau_0^1 \tau_1^2 \cdots \tau_{N-1}^N \\ &= [\mathbf{I} + \mathbf{R}_1 \mid \mathbf{L}_1 + \mathbf{D}_1] \cdots [\mathbf{I} + \mathbf{R}_N \mid \mathbf{L}_N + \mathbf{D}_N] \\ &\approx \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} + \mathbf{R}_1 + \cdots + \mathbf{R}_N & (\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 + \cdots + \mathbf{D}_N) \\ \hline \mathbf{I} + \mathbf{R}_1 + \cdots + \mathbf{R}_N & + \mathbf{I}\mathbf{L}_1 + (\mathbf{I} + \mathbf{R}_1)\mathbf{L}_2 + \cdots \\ & + (\mathbf{I} + \mathbf{R}_1 + \cdots + \mathbf{R}_{N-1})\mathbf{L}_N \end{array} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

여기서도 고차 항은 무시한다. ($\mathbf{R}_i \mathbf{R}_j = \mathbf{R}_i \mathbf{D}_j \approx \mathbf{0}$)

$$\mathbf{ROT} = \mathbf{I} + \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \quad \mathbf{TRS} = \sum_{i=1}^N \left[\mathbf{D}_i + \left(\mathbf{I} + \sum_{j=1}^i \mathbf{R}_{j-1} \right) \mathbf{L}_i \right] \quad (4)$$

각도 오차와 직각도 오차 행렬을 스큐 행렬(Skew Matrix)로 나타내는 것은 역변환 행렬을 구할 때 2차 이상의 항을 고차 항으로 무시할 수 있기 때문이다. 이것은 노이먼 시리즈(Neumann Series)에 의해 역행렬을 구하지 않고도 식 (5) 와 같이 직접적으로 역변환 계산을 가능한 장점이 있다. 식 (6) 에서는 병진 운동을 하는 조인트, 즉 식 (2) 의 역변환 행렬을 보여준다.

$$[\mathbf{EM}]^{-1} = [\mathbf{I} + \mathbf{E} \mid \mathbf{0}]^{-1} = [\mathbf{I} - \mathbf{E} \mid \mathbf{0}] \quad (5-a)$$

$$[\mathbf{SM}]^{-1} = [\mathbf{I} + \mathbf{S} \mid \mathbf{0}]^{-1} = [\mathbf{I} - \mathbf{S} \mid \mathbf{0}] \quad (5-b)$$

$$\begin{aligned} [\tau_R^x]^{-1} &= [\mathbf{TM} \cdot \mathbf{OM} \cdot \mathbf{DM} \cdot \mathbf{EM} \cdot \mathbf{SM}]^{-1} \\ &= [\mathbf{I} - \mathbf{R} \mid -(\mathbf{L} + \mathbf{D}) + \mathbf{R}\mathbf{L}] \end{aligned} \quad (6)$$

식 (3) 에 대한 반대 방향, 즉 N개의 연속된 조인트에 대한 역변환 행렬을 나타내면 식 (7)과 같이 나타낼 수 있으며 각도와 위치 요소로 나누어 정리하면 식 (8)과 같다.

$$\tau_N^0 = [\tau_0^N]^{-1} = [\tau_{N-1}^N]^{-1} \cdots [\tau_1^2]^{-1} [\tau_0^1]^{-1} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &= [\mathbf{I} - \mathbf{R}_N \mid -(\mathbf{L}_N + \mathbf{D}_N) + \mathbf{R}_N \mathbf{L}_N] \\ &\quad \cdots [\mathbf{I} - \mathbf{R}_1 \mid -(\mathbf{L}_1 + \mathbf{D}_1) + \mathbf{R}_1 \mathbf{L}_1] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} - (\mathbf{R}_1 + \cdots + \mathbf{R}_N) & -(\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 + \cdots + \mathbf{D}_N) \\ \hline \mathbf{I} - (\mathbf{R}_1 + \cdots + \mathbf{R}_N) & -(\mathbf{I} - \mathbf{R}_1 - \cdots - \mathbf{R}_N)\mathbf{L}_1 \\ & \cdots - (\mathbf{I} - \mathbf{R}_N)\mathbf{L}_N \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\mathbf{ROT} = \mathbf{I} - \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \quad \mathbf{TRS} = \sum_{i=1}^N \left[-\mathbf{D}_i - \left(\mathbf{I} - \sum_{j=i}^N \mathbf{R}_j \right) \mathbf{L}_i \right] \quad (8)$$

3. 오차 합성 모델링

N개의 연속된 조인트에 대한 일반화 식 (4) 과 식 (8) 을 이용하여 임의의 연속된 직선 조인트에 대해 모든 요소를 포함하는 오차 합성 모델링을 공식화할 수 있다. Fig. 3 과 같이 N_I 개의 역방향 조인트와 N_F 개의 순방향 조인트가 있을 경우 기준 좌표계를 중심으로 두 연속된 변환행렬인 식 (4) 와 식 (8) 의 곱으로 나타나며 결과 식을 간단히 하면 식 (9) 와 같은 공식으로 나타낼 수 있다. 이 식을 토대로 복잡한 HTM 행렬의 연산과 역행렬 계산 없이도 쉽게 그 결과를 얻을 수 있고 오차 항의 영향을 신속하게 파악할 수 있다.

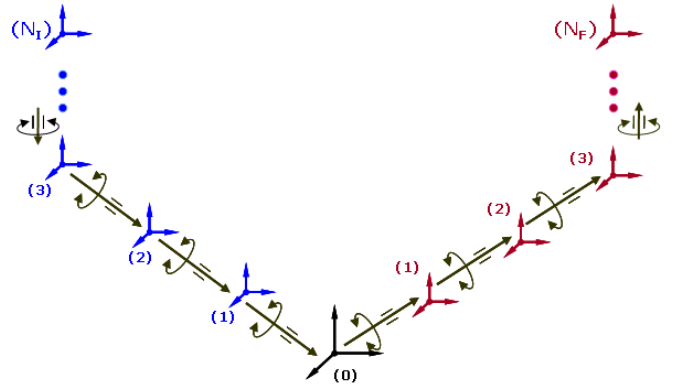


Fig. 3 General Configuration of Joint Series

$$\begin{aligned} \tau_{N_I}^{N_F} &= \tau_{N_I}^0 \tau_0^{N_F} = [\tau_{N_I}^0]^{-1} \tau_0^{N_F} \\ \mathbf{ROT} &= \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{N_F} \mathbf{R}_{F,i} - \sum_{i=1}^{N_I} \mathbf{R}_{I,i} \\ \mathbf{TRS} &= \sum_{i=1}^{N_F} (\mathbf{L}_{F,i} + \mathbf{D}_{F,i}) - \sum_{i=1}^{N_I} (\mathbf{L}_{I,i} + \mathbf{D}_{I,i}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_F} \mathbf{R}_{F,i-1} \sum_{j=1}^{N_F} \mathbf{L}_{F,j} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N_I} \mathbf{R}_{I,i} \left[\sum_{j=1}^i \mathbf{L}_{I,j} + \sum_{j=1}^{N_F} (\mathbf{L}_{F,j} + \mathbf{D}_{F,j}) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

식 (4) 에서 오차변환 행렬의 병진 운동(TRS)은 바로 이전 조인트의 각도 운동(ROT)에 영향을 받으며 마찬가지로 식 (8) 에 서 나타나듯이 역변환 시에는 현재 조인트의 각도 운동에 영향을 받는다는 사실을 알 수가 있다. 즉, 일반적으로 공작물과 틀 좌표계 간의 체인을 설정하고자 할 때 역변환 방향에 각도 운동 요소를 적게 두는 것이 오차 항을 줄일 수 있는 효과가 있다. 예를 들어, 직각도 오차 측정 시에 기준 좌표계를 기준으로 역변환 이 없는 방향으로 순서를 정해 설정하면 유리하다.

4. 결론

공작기계에 있어 일련의 조인트에 대한 오차 합성 모델링의 수학적 분석 방법을 알아보았다. 임의의 형태에 따라 그 공식화된 결과를 얻어냄으로써 오차 항이 끼치는 물리적 영향을 파악할 수 있으며 각도 오차 기준 설정과 역변환 방향 설정 같은 기준을 수립하는데 필요한 정보를 얻을 수 있다. 또한 회전 조인트에 대해서도 유사한 방법으로 공식화함으로써 확장 적용할 수 있다.

후기

이 논문은 2007년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국 과학재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. R0A-2007-000-10045-0).

참고문헌

1. Yang, S., Yuan, J. and Ni, J., "Accuracy Enhancement of a Horizontal Machining Center by Real-Time Error Compensation," *Journal of Manufacturing Systems*, 15, 2, 1996.
2. 양승환, 이철수, "5축 CNC 공작기계의 오차합성모델링 및 보정 알고리즘," *한국 정밀공학회지*, 16, 122-129, 1999.
3. Lin, Y., and Shen, Y., "Modelling of Five-Axis Machine Tool Metrology Models Using the Matrix Summation Approach," *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, 21, 243-248, 2003.