

유한회전 표현법에 따른 로터 시스템의 회전운동 비교

Comparisons of Rotation Motion for Rotor System by Finite Rotation

*#윤성호

*S. H. Yun(shyun@kumoh.ac.kr)

금오공과대학교 기계공학부

Key words : rotor system, quaternion, Euler angle, rotation equation of motion

1. 서론

로터 시스템은 디스크, 회전축, 베어링으로 이루어져 있으며 발전기, 선박 및 차량의 추진계통, 자동차 기계, 공작기계, 의공학기 등 공학적으로 다양하게 사용되고 있다. 디스크와 로터가 회전할 때 유연축(flexible shaft)이 휘어지거나 질량의 불균형분포, 베어링의 불충분한 지지로 인하여 회전이 정속하지 못할 경우가 많다. 이러한 현상을 파악하기 위하여 정확한 동적인 모델을 유도하여 그 원인을 규명하는 일은 필수적이다. 초기의 연구는 균일한 로터축을 사용하여 회전관성과 자이로스코픽 효과(gyroscopic effect)를 무시하였다.¹ 이후에 사다리꼴 축을 이용하여 축의 전단변형을 고려하였고 고차원의 유한요소를 사용하여 해석하였다.² 문제를 정의한 후에는 연구자들이 방대한 절점의 데이터를 효과적으로 줄여 저주파수에 염두에 두고 차수가 낮은 질량행렬과 강성행렬로 모달변환(modal transformation)을 시도해 왔다.³ 그러나 선행연구자들은 운동방정식을 유도하기 위하여 운동에너지를 산정할 때, 회전에 의한 에너지는 회전좌표계에서 관측한 각속도를 구하기 위하여 오일러 각(Euler angle)을 사용하였다. 연구자마다 유한회전(finite rotation)의 순서를 달리하여 주로 관성좌표계(inertial frame or fixed frame)에서 선형인 운동방정식을 유도하였다.^{4,5}

본 논문은 기존 연구자들이 채택한 운동방정식의 단점과 한계성을 규명할 것이다. 아울러 이를 극복하기 위하여 회전운동을 매개화할 수 있는 4원법(quaternion)을 적용하여 기존 방법과의 차이를 보여줄 것이다.

2. 오일러 각의 유한회전

그림 1과 같이 $B(X, Y, Z)$ 는 시스템의 관성좌표계이고 $b(x, y, z)$ 는 회전하는 디스크에 부착된 좌표계이다. 먼저 로터 시스템에서 오일러(Euler angle) 각 1-2-3 회전의 좌표계가 순차적으로 $B \rightarrow b^1 \rightarrow b^2 \rightarrow b$ 로 변환되는 과정을 먼저 생각해 본다. 좌표축 X 와 x 는 로터의 회전 전후 로터의 중심선과 일치하며, 좌표계 B 또는 b 에서 좌표축 X 또는 x 에 대하여 속도 Ω 로 회전한다. 속도에 관한 회전텐서를 구하는데 있어 먼저 각도 ϕ 를 X 축에 관하여 회전한 좌표계가 $b^1(x_1, y_1, z_1)$ 이고, 다음에 각도 θ 를 y_1 축에 관하여 회전한 좌표계가 $b^2(x_2, y_2, z_2)$ 이고, 마지막으로 각도 ψ 를 z_2 축에 관하여 회전한 좌표계가 $b(x, y, z)$ 이다. 이 때, 회전텐서 R 은 식 (1)과 같이 표현된다.

$$R^{[B]} = R^{[B]} R^{[b_1]} R^{[b_2]} = R_\phi R_\theta R_\psi \quad (1)$$

$$R_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi & c\phi \end{bmatrix}, R_\theta = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix}, R_\psi = \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2a,b,c)$$

여기서 c 와 s 는 각각 정현(sine)과 여현(cosine) 함수를 나타낸다. 회전하는 이동좌표계(moving coordinate)에서 각속도 ω^* 에 관한 사교대칭행렬(skew-symmetric matrix) $\tilde{\omega}^* = R^{[B]T} \dot{R}^{[B]}$ 에 식 (1)을 적용하면 식 (3)과 같이 표현할 수 있다. 앞으로 $(\cdot)^*$ 는 이동좌표계에서 측정된 물리량을 표시하고 윗 첨자가 없으면 관성좌표계에서 관찰한 물리량을 표시하도록 한다. 그리고 (\cdot) 는 시간 t 에 대한 미분이다.

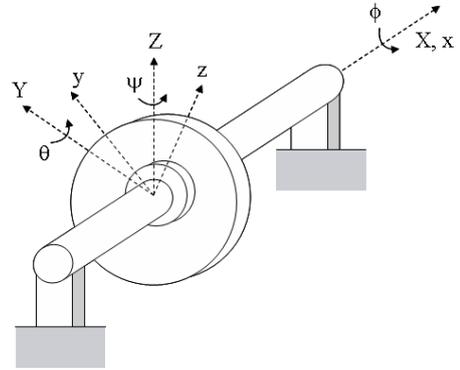


Fig. 1 Definitions of the inertial frame and rotating frame

$$\tilde{\omega}^* = (R_\theta R_\psi)^T R_\phi^T \dot{R}_\phi (R_\theta R_\psi) + R_\psi^T (R_\theta^T \dot{R}_\theta) R_\psi + R_\psi^T \dot{R}_\psi \quad (3)$$

여기서 $R_\phi^T \dot{R}_\phi = \dot{\phi} \tilde{X}$, $R_\theta^T \dot{R}_\theta = \dot{\theta} \tilde{y}_1$, $R_\psi^T \dot{R}_\psi = \dot{\psi} \tilde{z}_2$ 을 이용하면 다음과 같이 표현된다.

$$\omega^* = (R_\theta R_\psi)^T \dot{\phi} X^{[B]} + R_\psi^T \dot{\theta} y_1^{[b_1]} + \dot{\psi} z_2^{[b_2]} \quad (4)$$

$$X^{[B]T} = [1 \ 0 \ 0], y_1^{[b_1]T} = [0 \ 1 \ 0], z_2^{[b_2]T} = [0 \ 0 \ 1] \quad (5a,b,c)$$

식 (3)과 식 (5)를 이용하면 각속도를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}^* = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi c\theta & c\psi & 0 \\ -s\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

한편, 고정된 관성좌표계(inertial coordinate)에서 각속도 ω 에 관한 사교대칭행렬 $\tilde{\omega} = R^{[B]} R^{[B]T}$ 를 적용하면 각속도를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & -c\theta s\phi \\ 0 & s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

이를 사용하여 다음과 같이 운동에너지를 표현할 수 있다. I 는 디스크의 관성모멘트이다.

$$K_{123}^* = \frac{1}{2} \omega^{*T} J_{123} \omega^*, K_{123} = \frac{1}{2} \omega^T J_{123} \omega, J_{123} = I \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8a,b,c)$$

$$K_{123}^* \approx \frac{1}{2} I \{ 2\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\Omega(\dot{\psi}\dot{\theta} - \dot{\theta}\dot{\psi}) \} \quad (9a)$$

$$K_{123} \approx \frac{1}{2} I \{ 2\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 - 4\Omega\dot{\theta}\dot{\psi} \} \quad (9b)$$

3. 4원법의 유한회전

로터 시스템에 구 좌표계(spherical coordinate)를 이용하여 4원법을 적용하고 $\hat{e}^T \hat{e} = 1$ 인 단위 4원법을 생각해 보자. 이 때 θ 는 회전축과 z 축 간의 회전각이고 ψ 는 회전축과 x 축 간의 회전각이다.

$$\hat{\omega}^* = 2A^T(\hat{e})\hat{e}, \quad \hat{\omega} = 2B^T(\hat{e})\hat{e} \quad (10a,b)$$

여기서 4×4 행렬 A, B 는 다음과 같이 정의된다.

$$A(\hat{e}) = \begin{bmatrix} e_o & -\mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & e_o I + \tilde{e} \end{bmatrix}, \quad B(\hat{e}) = \begin{bmatrix} e_o & -\mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & e_o I - \tilde{e} \end{bmatrix} \quad (11a,b)$$

미세한 세차운동(precession)이 Y 축과 Z 축에서 $\epsilon(t)$ 만큼 발생하는 디스크의 회전각을 $\theta(t) = \pi/2 \pm \epsilon_\theta(t)$, $\psi(t) = \pi \pm \epsilon_\psi(t)$ 라고 가정하면 이에 해당하는 4원법은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\hat{e} = [c\frac{\phi}{2} \quad -s\frac{\phi}{2} \quad \mp s\frac{\phi}{2}\epsilon_\psi \quad \mp s\frac{\phi}{2}\epsilon_\theta]^T \quad (12)$$

이에 해당하는 운동에너지는 다음과 같이 표현될 수 있다. 이 때 $|\hat{e}|^2 = 1$, U_4 는 대각 원소가 1인 4×4 행렬이다.

$$K_q^* = 2\hat{e}^T J_q \hat{e} |\hat{e}|^2 U_4, \quad K_q = 2e^T J_q e |\hat{e}|^2 U_4, \quad J_q = I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13a,b,c)$$

4. 운동방정식

변위 벡터를 $\mathbf{q}^T = [U \ V \ \theta \ \psi]$ 라고 표현할 때, 오일러-라그랑지(Euler-Lagrange)식을 이용하여 도출되는 디스크의 회전운동 방정식은 다음과 같은 형태를 가진다.

$$(M_i + M_r)\ddot{\mathbf{q}} - \Omega G\dot{\mathbf{q}} - \Omega^2 K\mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (14)$$

여기서 직선 및 회전 운동에 의한 질량행렬을 M_i , 관성모멘트 행렬을 M_r , 자이로스코픽(gyroscopic) 행렬을 G , 외력을 \mathbf{f} 로 표시하였다. 이 때, 운동방정식에서 θ 와 ψ 가 미세한 세차운동을 한다고 가정하였다.

1-2-3 회전의 이동좌표계 경우 식 (8a)와 (9a)를 이용하면 질량행렬 M_i 와 관성모멘트 행렬 M_{123}^* , 자이로스코픽(gyroscopic) 행렬 G_{123}^* 은 다음과 같이 표현된다. 여기서 I 는 디스크의 관성모멘트이다. 또한 $K = 0$, $\mathbf{f} = 0$ 이다.

$$M_i = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{123}^* = I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_{123}^* = I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (15a,b,c)$$

관성좌표계 경우 식 (8b)와 (9b)를 이용하면, $K = 0$, $\mathbf{f} = 0$ 이고 자이로스코픽 행렬 G_{123} 만 다르다.

$$G_{123} = I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

식 (13a,b,c)를 이용하면 4원법에 의한 운동방정식은 다음과 같다.

$$M_q = I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4s^2\frac{\phi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4s^2\frac{\phi}{2} \end{bmatrix}, \quad G_q = I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2s\phi + \frac{4}{\Omega}\epsilon_\theta s^2\frac{\phi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2s\phi + \frac{4}{\Omega}\epsilon_\theta s^2\frac{\phi}{2} \end{bmatrix} \quad (17a,b)$$

$$K_q = I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha\phi \end{bmatrix}, \quad (17c,d)$$

$$\mathbf{f}_q = -2I \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \epsilon_\theta s^2\frac{\phi}{2}(6\epsilon_\psi^2 + 4\epsilon_\theta^2) \\ \epsilon_\psi s^2\frac{\phi}{2}(6\epsilon_\psi^2 + 4\epsilon_\theta^2) \end{bmatrix}$$

그림 2에서 오일러 각 방법과 4원법으로 부터 구한 회전각의 거동을 비교하였다.

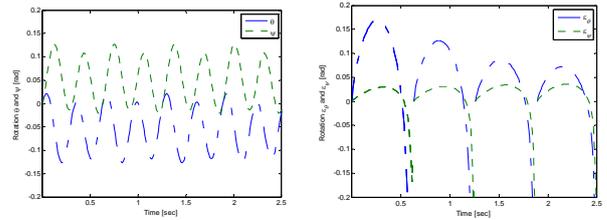


Fig. 2 Rotations of 1-2-3 Euler angle measured in the inertial frame(left) and by quaternion and spherical coordinate(right)

5. 결론

로터 시스템의 회전운동 모델을 설정하고자 오일러 각을 채택한 기존의 방법과 4원법을 사용한 방법을 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 오일러 각의 순서 1-2-3회전의 경우 에너지는 2차항만 고려하였고, 4원법의 경우 비선형이나 회전 에너지량은 거의 동일함을 발견하였다.
- 2) 4원법을 사용하여 유도한 운동방정식은 비선형성을 나타내며, 오일러 각의 순서 1-2-3회전의 경우는 관성 및 이동좌표계에서 모두 선형방정식을 나타낸다.
- 3) 4원법의 경우 삼각함수로 이루어지는 비선형성 때문에 회전각은 특이성을 나타내나 비교적 안정된 값을 보여주고 있으며, 오일러 각의 경우 주기적으로 변화함을 알 수 있다.

참고문헌

1. Zorzi E. S. and Nelson, H. D., "The dynamics of rotor-bearing systems with axial torque-a finite element approach," Journal of Mechanical Engineering Design, Vol. 102, pp. 158~161, 1980.
2. Greenhill L. M. Brickford J. D. and Nelson, H. D., "A conical beam finite element for rotor dynamic analysis," ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 107, pp. 421~430, 1985.
3. Mohiuddin M. A. and Khulief Y. A., "Coupled bending torsional vibration of rotors using finite element," Journal of Vibration and Vibrations, Vol. 223, pp. 297~316, 1999.
4. Firoozian R. and Stanway R., "Modeling and control of turbomachinery vibrations, Journal of Vibration and Acoustics, " Vol. 110, pp. 521~527, 1988.
5. Diewald W. and Nordmann R., " Dynamics Analysis of centrifugal pump rotor with fluid-interactions," Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 111, pp. 370~378, 1989.