

공압제진대의 전달을 계산을 위한 수치해석기법에 관한 연구 Numerical Technique for Transmissibility Calculation of a Pneumatic Vibration Isolator

*#문준희¹, 박희재²

*#J. H. Moon(junimoon@snu.ac.kr)¹, H. J. Park²

¹ 서울대학교 마이크로열시스템연구센터, ² 서울대학교 기계항공공학부

Key words : Pneumatic Vibration Isolator, Transmissibility, Unitary Space, Banach Fixed Point Theorem

1. 서론

공압 제진대는 주변의 진동을 차단하여 원하는 영역에 제한된 진동만 허용되게 하는 장치로서, 초기 설치 후 특별한 관리 없이도 안정적으로 탁월한 진동 저감 성능을 발휘하기 때문에 정밀 제조공정이나 정밀 측정기를 위해 널리 사용되고 있다. 하지만 그 설계는 많은 부분이 시행착오에 의존하고 있기 때문에 저자의 기존 연구에서 이를 위한 모델링과 해석이 수행되었다 [1].

본 논문에서는 후속적인 연구의 일환으로, 공압제진대의 전달을 계산을 위한 수치해석 방법을 연구하였다.

2. 공압제진대의 전달을

선행 연구 [1]의 결과로 공압제진대의, 바닥진동에 대한 테이블 위의 진동의 전달율은 X_p / X_b 로서, 식(1), (2)를 통해 구한다.

$$X_p = \frac{X_b}{1 + \frac{-\omega^2 M}{K_{dp} + j\omega C_{dp} + \frac{1}{\frac{1}{K_s} + \sum_i \frac{1}{K_i + j\omega^2 |X_i| C_{c,i}}}}} \quad (1)$$

$$X_i = -\frac{-\omega^2 M X_p + (j\omega C_{dp} + K_{dp})(X_p - X_b)}{K_i + j\omega^2 C_{c,i} |X_i|} \quad (2)$$

위의 두 식에서 설계변수들과 연관하여 세부적으로 다시 계산되어야 하는 계수들은 식(3)~(5)와 같다.

$$C_{c,i} = \frac{8}{6\pi} \frac{A_p^3}{C_d^2 A_{ori,i}^2} \left(\frac{P_0}{RT} \right) \quad (3)$$

$$K_s = \frac{k A_p^2 P_0}{V_s} \quad (4)$$

$$K_i = \frac{k A_p^2 P_0}{V_i} \quad (5)$$

위의 식들에서 각 설계변수 및 매개변수들의 의미는 다음과 같다: X_p 과 X_b 는 각각 피스톤과 바닥의 변위이고, M 은 하중의 질량, K_{dp} 과 C_{dp} 는 각각 고무막의 탄성 계수와 감쇠 계수, A_p 는 피스톤의 면적, P_0 는 공기방의 평균 공압, C_d 는 송출계수(discharge coefficient, 0.65), $A_{ori,i}$ 는 오리피스 면적, R 은 일반기체상수(general gas constant, 287J/kg/K), T 는 공기의 온도, k 는 공기의 비열비(specific heat ratio, 1.4), V_s 과 V_i 는 각각 탄성 공기방과 i 번째 감쇠 공기방의 부피, K_s 과 K_i 는 각각 탄성 공기방과 i 번째 감쇠 공기방의 등가탄성계수, X_i 는 오리피스를 통과하는 유량의 등가 변위, ω 는 가진 각속도이다.

Table 1 Major design variables

Part	Value
Spring chamber volume, V_s	$2.60 \times 10^{-5} m^3$
1 st Damping chamber volume, V_1	$3.44 \times 10^{-4} m^3$
2 nd Damping chamber volume, V_2	$2.74 \times 10^{-3} m^3$
1 st Orifice area, $A_{ori,1}$	$3.85 \times 10^{-7} m^2$
2 nd Orifice area, $A_{ori,2}$	$1.77 \times 10^{-8} m^2$
Payload, M	56.3 Kg
Piston area, A_p	$1.61 \times 10^{-3} m^2$
Damping coefficient of diaphragm, C_{dp}	50 N·s/m
Stiffness of diaphragm, K_{dp}	$4.52 \times 10^3 N/m$

변수들의 자세한 의미는 선행연구에서 충분히 다루어졌으므로 본 논문에서는 언급하지 않으며 사용된 변수의 값은 Table 1 과 같이 선행연구에서 사용된 값과 거의 같다.

3. 전달을 계산을 위한 수치해법의 수학적 고찰

이제 식 (1)과 (2)로 표현되는 비선형 복소 연립방정식(nonlinear complex system)의 해를 찾는 방법에 대해 다루고자 한다. 식에서 X_p 과 X_i 는 복소수이다. $n-1$ 개($n \geq 2$)의 감쇠 공기방에 대해 전달율을 구하고자 하면, n 개의 변수에 대해 n 개의 비선형 복소 연립방정식을 푸는 문제가 된다.

일반적으로 선형 시스템이나 비선형 시스템의 해를 찾는 것은 뉴턴 방법(Newton method)을 사용한다. 하지만 본 연구의 대상식은 복잡함으로 인해 각 변수에 대한 편미분 또한 매우 복잡하며, 복소 변수를 사용하므로 실질적으로는 두 배의 변수에 대해 편미분을 수행하여야 자코비안 행렬을 만들 수 있고, 이 행렬의 역행렬을 계산하는 등의 많은 연산을 필요로 한다. 또한, $X_i = 0$ 에서 불연속이므로 이러한 점까지 고려하여야 한다. 따라서, 해를 찾는 가장 단순하면서도 안정적인 방법인 고정점 반복법(fixed point iteration)을 시도하고자 한다.

식 (1)과 (2)를 좀 더 추상화하면 다음과 같다.

$$z = Tz \quad (6)$$

여기서 $z = (X_p, X_1, \dots, X_{n-1})$ 이고, T 는 비선형 복소 사상이다. 또한, 순서쌍 z 의 각 원소는 복소수이므로, z 는 다음과 같은 거리(metric)와 놈(norm)을 갖는 n 차원의 유클리드 공간 $Z = (Z, d)$ 에 속하게 된다.

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{|\xi_1 - \eta_1|^2 + \dots + |\xi_n - \eta_n|^2} \quad (7)$$

여기서, $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in Z$ 이다.

유니타리 공간은 완전 거리 공간(complete metric space)이기 때문에 고정점 반복법의 적용이 가능하다 [2]. 따라서, 전달을 계산에 고정점 반복법의 적용이 가능하다.

다음은 수렴성을 살펴 보아야 한다. 고정점 반복은 바나흐 고정점 정리(Banach fixed point theorem)에 의해 다음 조건이 만족되면 수렴한다.

$$d(x, y) = \alpha d(Tx, Ty) \quad , \quad \alpha < 1 \quad (8)$$

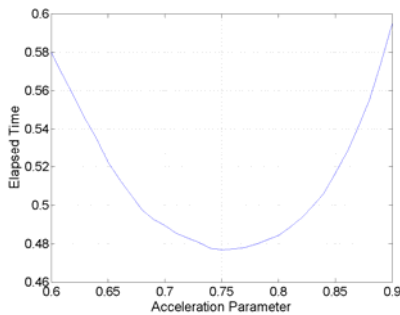
이 때, T 를 축약 사상이라고 하며, α 는 양의 실수이다. 공압제진대의 전달을 계산을 위한 사상이 축약사상을 일 반적인 경우에 대해 해석적으로 증명하는 것은 매우 어려운 일이었으며, 수치적으로 고정점 반복법을 적용하여 본 결과 전달율이 1 이상으로 나오는 영역에 대해서는 수렴이 되지 않았다. 그래서 불량한 연립방정식(ill-conditioned system)의 수렴성 향상을 위해서 사용이 되는 하 이완법 (under relaxation) [3]을 식 (9)와 같이 적용하였다.

$$z_{m+1} = (1 - \beta)z_m + \beta z_{m+1} \quad (9)$$

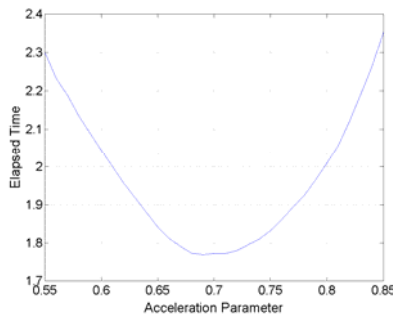
여기서 β 는 가속 변수이며, m 은 반복 횟수이다.

4. 전달을 계산을 위한 비선형 복소 연립방정식의 수렴성의 수치적 점검

전달율과 등가변위의 상대오차가 모두 10^{-3} 이하가 되면 고정점 반복이 종료되도록 할 때, 최종적으로 얻어진 전달율 곡선이 부드러운 곡선이 되었으므로, 상대오차범위를 10^{-3} 로 하였다. 가속 변수 β 를 변화시켜 가며, 수렴이 될 때까지의 시간을 측정 한 결과 Fig. 1 과 같은 결과를 얻었다. 1 회의 수행 시간이 매우 짧고, Windows 운영체제의 선점적인 특성으로 인해 처음 수행 속도가 일정하지 않으므로, 100 회 수행한 수행 시간으로 비교하였다.



(a) No. of damping chamber: 1



(b) No. of damping chamber: 2

Fig. 1 Calculation time with regard to acceleration parameter

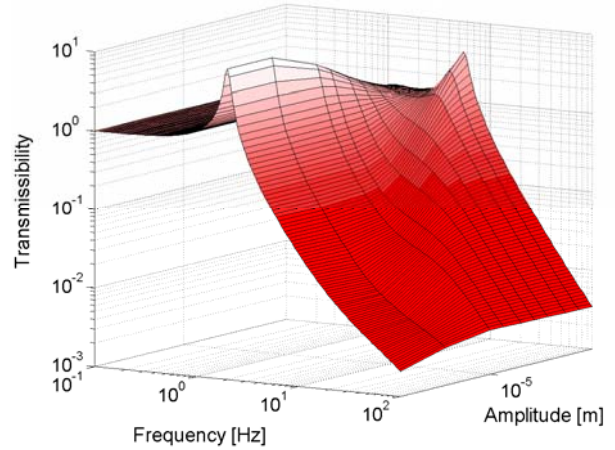


Fig. 2 Transmissibility curve

수치적으로 관찰된 바에 의해, 최대 수렴 속도를 내는 가속변수 값은 감쇠 공기방이 1 개인 경우에는 0.75 이고, 2 개인 경우에는 0.69 정도의 값을 가짐을 알 수 있었다. 감쇠 공기방이 많아질수록 가속변수를 줄여야 최대 수렴 속도를 내는 이유는, 감쇠 공기방이 많아질수록 변수가 많아 짐으로 인한 변수의 오차의 누적이 커져서 발산할 가능성이 많아지기 때문에 가속 변수를 줄여야 빠르게 수렴한다고 추측되었다. Fig. 2 는 가진 진동수와 가진 진폭에 대해 계산된 전달율을 3 차원 곡선으로 도시한 것이다.

5. 결론 및 고찰

본 연구를 통해 공압제진대의 전달율 계산을 위한 수치 해석 기법이 연구되었다. 본 연구에서는 선행 연구에서 적용한 고정점 반복법의 적용 가능성과 수렴성에 대한 엄밀한 고찰이 이루어졌으며, 하 이완법의 적용 이유에 대해 기술하였다. 결과적으로, 최대 수렴 속도를 내는 가속 변수가 수치적인 방법을 통해 구해졌다. 본 연구는 이후 입력 되는 바닥진동의 크기의 수렴 반경을 수치적으로 구하는 연구로 발전될 수 있다.

후기

본 연구는 한국과학재단(ERC)의 후원으로 수행되었습니다.

참고문헌

1. 문준희, 박희재, “공압 제진 시스템의 해석과 설계: I. 모델링과 전달율 계산 알고리즘”, 한국정밀공학회지, 21(10), 127-136, 2004
2. Kreyszig, E., Introductory functional analysis with applications, John Wiley & Sons, 1989
3. Burden, R. L., Numerical Analysis, 6th Ed, ITP, 1997