

# Lyapunov Indirect Method를 이용한 31-자유도 철도 차량의 Hunting Stability Hunting Stability for 31-DOF Railway Vehicle by using Lyapunov Indirect Method

\*김필기<sup>1</sup>, 이주홍<sup>2</sup>, #석종업<sup>3</sup>

\*P. Kim<sup>1</sup>, J. H. Lee<sup>1</sup>, #J. Seok<sup>2</sup> (seokj@cau.ac.kr)

<sup>1</sup> 중앙대학교 기계공학부 대학원, <sup>2</sup> 중앙대학교 기계공학부

Key words : Lyapunov Indirect Method, Hunting Stability, 31-DOF, Heuristic Nonlinear Creep Model, Flange Contact

## 1. 서론

최근, 사회의 경제 발전 속도가 빨라지고 삶의 질을 추구하는 사회적 경향이 두드러짐에 따라, 도시형 저 곡률 철도에 적합하면서 고속 수송 능력을 겸비한 철도 차량에 대한 필요성이 증대되고 있다. 이에 따라 주행 효율 및 주행 안정성을 확보하기 위한 철도 차량 동특성에 관한 연구가 활발히 진행되고 있다. 철도 차량의 동적 안정성 연구는 2-자유도의 휠셋(Wheelset) 시스템<sup>1)</sup>과 6-자유도의 휠셋과 대차(Truck or Bogie) 시스템<sup>2)</sup>이 주로 다루어졌다. 휠셋과 대차의 거동이 철도 차량의 안정성에 지대한 영향을 미치는 것으로 알려져 있으나, 휠셋 및 대차 시스템 모델들은 철도차량의 일부 구성 요소만을 고려한 점에서 정확한 안정성 평가에 한계를 가지고 있다. 한편, 6-자유도계를 10-자유도계로 확장하고 비선형 크리프 모델을 적용한 모델<sup>3)</sup>에서도 여전히 차체가 고려되지 않았으며, 차체를 포함한 28-자유도계의 모델<sup>4)</sup>은 단순화된 크리프 이론을 적용하는데 그쳤을 뿐 아니라 철도의 곡률 또한 고려되지 않았다. 본 연구에서는 차체를 포함한 총 31-자유도계의 동적 모델링을 수행하였다. Kalker의 선형 크리프 이론<sup>5)</sup>과 결합된 Heuristic 비선형 크리프 모델을 사용하였으며, 휠과 철로의 접촉은 순수 탄성 접촉으로 가정하였다. 또한 Lyapunov Indirect Method<sup>6)</sup>를 이용하여 31-자유도의 철도 차량 모델의 Hunting stability를 고찰하였다.

## 2. 31-자유도 철도 차량 모델링

차체, 대차 및 휠셋의 각 자유도에 대한 운동 방정식은 뉴턴 방법으로 유도되었으며, 철도 차량 모델에 고려된 자유도는 총 31개로 Table 1에 정리하였다.

Table 1 Degrees of freedom Carbody, Trucks and Wheelsets

Degrees of freedom	Carbody	Truck	Wheelset
Lateral	$y_c$	$y_{ti}$	$y_{wij}$ *
Vertical	$z_c$	$z_{ti}$	$z_{wij}$
Yaw	$\psi_c$	$\psi_{ti}$	$\psi_{wij}$
Roll	$\phi_c$	$\phi_{ti}$	$\phi_{wij}$
Pitch	$\gamma_c$	$\gamma_{ti}$	-

\*  $i=1,2$  &  $j=1,2$  :  $i, j$  mean truck, wheelset and corresponding 1, 2 mean front, rear.

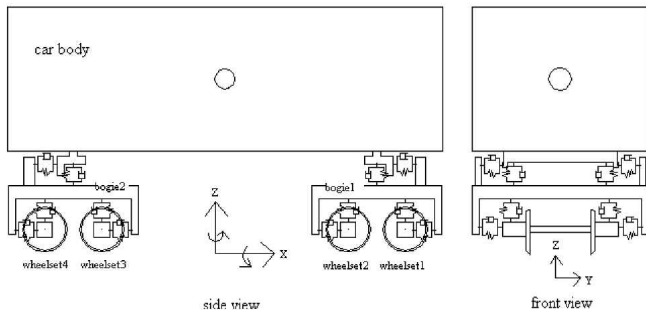


Fig. 1 Schematics of 31-DOF railway vehicle<sup>4)</sup>

Figure 1은 31-자유도계 철도 차량 모델의 개략도이다. 차체, 대차 그리고 휠셋의 운동 방정식에 사용된 좌표계는 자중 및 외력이 전혀 없는 조건에서의 질량 중심에 위치하며, x-축의

방향은 철로 중심선의 접선 방향이고 y-축 및 z-축의 방향은 x-축으로 켄트 각(Kent angle) 만큼 회전한 좌표계의 축 방향과 같다. 이를 기준으로 차체와 대차의 운동 방정식은 다음과 같이 정리되었다.

$$m_q \left( \ddot{y}_q - \frac{V^2}{R_y} \right) = -m_q g \phi_{se} + F_{syq}, \quad m_q \left( \ddot{z}_q + \frac{V^2 \phi_{se}}{R_y} \right) = -m_q g + F_{szq}$$

$$I_{qz} \ddot{\psi}_q = M_{szq}, \quad I_{qx} \ddot{\phi}_q = M_{sxq}, \quad I_{qy} \ddot{\gamma}_q = M_{syq} \quad (q = c, t1, t2) \quad (1)$$

식 (1)에서  $m_q, g$ 는 질량, 중력가속도이고  $I_{qx}, I_{qy}, I_{qz}$ 는 각각 x-(Roll), y-(Pitch), z-(Yaw) 방향의 관성 모멘트이다. 철로의 곡률  $R_y$ 와 그에 따른 켄트 각  $\phi_{sc}$ 가 반영되었으며,  $F_{syq}, F_{szq}$  및  $M_{sxq}, M_{syq}, M_{szq}$ 은 차체와 앞/뒤 대차를 연결하는 현가장치(Suspension)에 의한 힘 및 모멘트의 총합을 의미한다.  $V$ 는 철도 차량의 운행 속도이다. 아래 첨자  $q$ 는 차체( $c$ ) 및 대차( $t1, t2$ )를 의미한다.

$$m_w \left( \ddot{y}_{wij} - \frac{V^2}{R_y} \right) = -m_w g \phi_{se} + (F_{Lij}^n + F_{Rij}^n) + N_{Lij} + N_{Rij} + F_{sywij} - F_{tij}$$

$$m_w \left( \ddot{z}_{wij} + \frac{V^2 \phi_{se}}{R_y} \right) = -m_w g + (F_{Lzij} + F_{Rzij}) + N_{Rzij} + N_{Lzij} + F_{szwij}$$

$$I_{wz} \ddot{\psi}_{wij} + \frac{I_{wy} V \dot{\phi}_{wij}}{r_0} = R_{Rxij} F_{Rij}^n - R_{Ryij} F_{Rxij}^n + R_{Lxij} F_{Lij}^n - R_{Lyij} F_{Lxij}^n$$

$$+ R_{Rxij} N_{Rij} + R_{Lxij} N_{Lij} + M_{Lzij}^n + M_{Rzij}^n + M_{szwij}$$

$$I_{wx} \dot{\phi}_{wij} + \frac{I_{wy} V}{r_0} \left( \frac{V}{R_y} - \dot{\psi}_{wij} \right) = R_{Ryij} F_{Rzij}^n - R_{Rzij} F_{Ryij}^n + R_{Lyij} F_{Lzij}^n - R_{Lzij} F_{Lyij}^n$$

$$+ R_{Lyij} N_{Lzij} + R_{Ryij} N_{Rzij} - R_{Rxij} N_{Ryij} - R_{Lzij} N_{Lyij} + M_{Lxij}^n + M_{Rzij}^n + M_{scwij}$$

, where  $i = 1, 2, j = 1, 2$  (2)

식 (2)는 휠셋의 운동방정식이다.  $F_{sywij}, F_{szwij}, M_{sxwij}, M_{szwij}$ 는 차체 및 대차 운동방정식에서와 같이 현가장치의 힘과 모멘트의 총합이며, 아래 첨자의  $ij$ 는 Table 1에서 사용된 것과 동일하다.  $F_{tij}$ 는 휠 플랜지와 레일 사이의 y-방향 접촉 힘이며, 이 힘은 식 (3)과 같이 dead band를 갖는 스프링 요소로 고려되었다.  $F_{pxij}, F_{pyij}, F_{pzij}, M_{pxij}, M_{pyij}, M_{pzij}$  ( $p = L, R$ )는 휠과 레일 사이에 작용하는 선형 크리프 힘과 선형 크리프 모멘트이고 여기에 위 첨자  $n$ 을 붙여 Heuristic 비선형 크리프 힘과 모멘트<sup>7)</sup>를 나타내었다.  $L, R$ 은 철로의 왼쪽, 오른쪽 레일(Rail)을 의미한다.  $R_{pxij}, R_{pyij}, R_{pzij}$  ( $p = L, R$ )는 휠과 레일의 접촉점 거리이다(참고문헌 3, 4 참조).

$$F_{tij} = \begin{cases} K_y (y_{wij} - \delta) & y_{wij} > \delta \\ 0 & -\delta \leq y_{wij} \leq \delta \\ K_y (y_{wij} + \delta) & y_{wij} < -\delta \end{cases} \quad (3)$$

2-, 6-, 10- 자유도계 모델에서는 차체가 평형 상태를 유지하는 것으로 가정하였으나, 31 자유도계 모델에서는 차체의 운동을 포함하기 때문에 휠과 레일의 접촉부의 이탈이 임계속도 이전에는 발생하지 않는다는 가정을 전제로 접촉부의 수직항력( $N_{pyij}, N_{pzij}, p = L, R$ )을 스프링 요소로 고려하였다. 식 (3), (4)에서  $K_y, K_z$ 는 레일의 y-, z-방향 스프링 상수이며,  $a$ 는 track center ~ rail 거리이다.  $\delta, \lambda$ 는 각각 flange clearance, wheel concity이다.

$$\begin{aligned}
 N_{pzij} &= -K_z(z_{wij} - \lambda y_{wij} + \alpha \phi_{wij}) \\
 N_{pyij} &= -N_{pzij} \tan(\delta + \phi_{wij}) \approx -N_{pzij}(\delta + \phi_{wij}) \quad (4)
 \end{aligned}$$

### 3. Hunting Stability

#### 3.1 Lyapunov Indirect Method

Lyapunov Indirect Method는 선형화된 시스템의 고유치 해석을 통하여 비선형 시스템의 안정성을 판별하는 방법이다. 앞서 정리한 운동방정식은 식(5)로 나타낼 수 있다. 여기서,  $A$ 는  $62 \times 62$  행렬이고  $Q$ 는 외력 벡터이다. 벡터  $Q$ 는 시간에 대한 외력 항을 포함하고 있지 않기 때문에, 본 시스템은 강제 진동 문제가 아닌 자유 진동 문제로 귀착된다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{Q} \quad (5)$$

행렬  $A$ 의 자코비안 행렬  $B$ 를 식 (6)과 같이 구하고 이 행렬의 고유치 해석을 수행한다. 시스템의 안정성은 고유치의 실수부 부호에 의해 결정되며 부호가 양인 경우는 안정, 반대로 음인 경우는 불안정을 의미한다.  $x_0$ 는 모든 자유도의 속도가 0이 되는 평형 상태의 위치 벡터이다.

$$\mathbf{B} = \left[ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \quad (6)$$

31 자유도 철도 차량 시스템의 자코비안 행렬에서 고유치 실수부의 최대값이 0이 되는 Hunting speed를 구하여 철도 차량의 안정성을 고찰하도록 하였다.

#### 3.2 스프링 강성 및 철로 곡률에 따른 Hunting Stability

철도 차량의 안정성에 큰 영향을 미치는 것으로 알려져 있는 1차 서스펜션(Primary suspension)의 스프링 강성에 따른 Hunting speed를 확인하고 철로 곡률이 다른 세 가지 경우에 대하여 Hunting stability를 비교하였다.

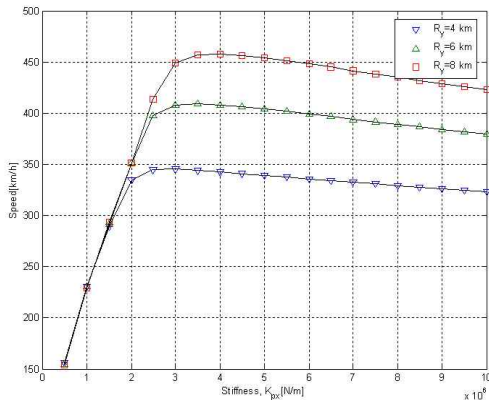


Fig. 2 Hunting speeds for primary suspension stiffness

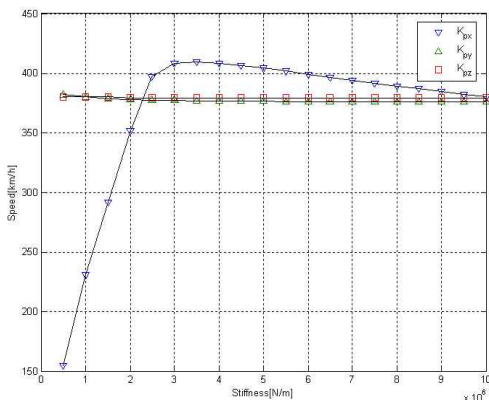


Fig. 3 Hunting speeds for various radii of curved tracks

Figure 2는 휠셋과 대차를 연결하는 1차 서스펜션의 스프링

강성에 따른 Hunting speed를 나타낸 것이다. 차량의 안정성은  $K_{px}$ 에 민감한 반면,  $K_{py}$ ,  $K_{pz}$ 에 따른 Hunting speed는 약 370 km/h로 일정한 것을 확인할 수 있다.

Figure 3은 철로의 반경이 4, 6, 8 km인 경우에 대하여  $K_{px}$ 에 따른 Hunting speed를 나타낸 것이다. 철로의 반경이 작을수록 Hunting speed가 작아지는 경향을 보이고 있으며, 철로의 반경 4 km와 8km 사이의 Hunting speed는 최대 100km/h 이상의 차이를 보이고 있다. Figure 3의 경향에서 확인할 수 있듯이  $K_{px}$ 가  $3 \times 10^6$  N/m 이상일 때, 철로의 반경 간의 Hunting speed의 차이는 일정하게 유지되며  $K_{px}$ 의 값이  $2 \times 10^6$  N/m 이하인 경우, 철로의 반경과 Hunting speed는 무관한 것으로 보여진다.

Table 2에는 31 자유도 철도 차량의 안정성 시뮬레이션에 사용된 주요 파라미터를 나타내었다.

Table 2 Data of the system parameters <sup>3,8)</sup>

Parameters	Value
$m_c, m_t, m_w$	34000, 3000, 1400 kg
$I_{cx}, I_{cy}, I_{cz}$	$75 \times 10^3, 2.1 \times 10^6, 2.1 \times 10^6$ kg m <sup>2</sup>
$I_{tx}, I_{ty}, I_{tz}$	$2.3 \times 10^3, 2.7 \times 10^3, 3.2 \times 10^3$ kg m <sup>2</sup>
$I_{wx}, I_{wy}, I_{wz}$	915, 140, 915 kg m <sup>2</sup>
$\phi_{se}, K_y, K_z$	0.0873 rad, $1.617 \times 10^7, 6.2 \times 10^7$ N/m
$\delta, a, \lambda$	0.01 m, 0.7465 m, 0.05

### 4. 결론

본 연구에서는 차체의 운동을 고려한 31 자유도계의 철도차량을 모델링하고 Lyapunov Indirect Method를 이용한 Hunting speed의 경향 분석을 통하여 1차 서스펜션의 스프링 강성 및 철로의 반경에 관한 안정성을 고찰하였다. 안정성 시뮬레이션 결과, 철도 차량의 안정성은 x-방향 스프링 강성 및 철로의 반경에 따라 민감한 차이를 나타내는 것을 확인할 수 있었다.

철도 차량의 안정성은 1차 및 2차 서스펜션의 스프링 강성 및 감쇠 특성, 철로의 반경 및 레일의 roughness profile 등 다양한 인자들의 복합적인 영향 하에 있기 때문에 향후 이러한 인자들을 본 모델에 적용한다면 철도 차량의 신뢰성 있는 안정성 예측이 가능할 것으로 예상된다.

### 참고문헌

- Goodall, R., Li, H., "Solid axle and independently-rotating railway wheelsets - a control engineering assessment of stability," Vehicle System Dynamics, 33, 57-67, 2000.
- Ahmadian, M., Yang, S., "Effect of system nonlinearities on locomotive bogie hunting stability," Vehicle System Dynamics, 29, 365-384, 1998.
- Lee, S. Y., Cheng, Y. C., "Nonlinear analysis on hunting stability for high-speed railway vehicle trucks on curved tracks," Transactions of the ASME J. Vibration and Acoustics, 324-332, 2005.
- Yang-Tsai Fan, Wen-Fang Wu, "Stability analysis and derailment evaluation of rail vehicles," Int. J. Heavy Vehicle Systems 13, 194-211, 2006.
- Rao V. Dukkipati, "VEHICLE DYNAMICS," CRC Press LLC, 2000.
- Vidyasager, M., "Nonlinear Systems Analysis," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1978.
- Horak, D., Wormley, D. N., "Nonlinear Stability and Tracking of Rail Passenger Trucks," ASME J. Dyn., Syst., Meas., Control 104, 256-263, 1982.
- Jing ZENG, Pingbo WU, "Stability Analysis of High Speed Railway Vehicles," JSME International Journal Series C 47, 464-470, 2004.