

뿔뾰 V-노치의 응력장에 관한 연구

A study on stress fields ahead of blunt V-notches

*김수남¹, #조상봉²

*S. N. Kim¹, #S. B. Cho(sbcho@kyungnam.ac.kr)²

¹ 경남대학교 대학원 기계공학과, ² 경남대학교 기계자동차공학부

Key words : Blunt V-notch, U- notch, stress fields

1. 서론

예리한 균열이나 V-노치 문제에서 응력특이성 현상이 나타나고 이로 인하여 파손이 생긴다는 것은 잘 알려진 사실이다. 대표적인 연구로, Irwin¹은 예리한 균열의 응력장을 구한 바 있고, Williams²는 예리한 V-노치의 응력장을 고유치 전개법으로 구한 바 있다.

뿔뾰한 균열이나 V-노치 문제는 실제의 구조물에 나타나는 현상으로 이에 대한 관심은 자연스럽게 생길 수밖에 없다. Creager와 Paris³는 뿔뾰한 균열에 대한 응력장을 Irwin의 방법을 확장하여 연구한 바 있고, 뿔뾰한 V-노치에 대한 연구로는 Neuber⁴가 Airy의 중조화 함수의 급수전개에서 첫째항을 사용하여 응력성분을 연구한 바 있다. Lazzarin과 Tovo⁵가 Kolosoff-Muskhelishvili⁶의 응력함수를 $\varphi(z) = Az^\lambda, \Psi(z) = Bz^\lambda + Cz^\mu$ 로 잡고 λ 는 고유치로 μ 는 고유치가 아닌 경계조건으로부터 구한 값을 사용하여 뿔뾰한 V-노치에 대한 근사 응력장을 구하였고, 그 후에 Filippi, Lazzarin과 Tovo⁷가 응력 함수 형태를 $\varphi(z) = Az^\lambda + Bz^\mu, \Psi(z) = Cz^\lambda + Dz^\mu$ 로 바꾸어서 근사해의 정밀도를 높이는 연구를 하였다.

본 연구에서는 Williams²의 고유치 전개법을 이용하고 예리한 V-노치에서 사용할 수 없었던 음(-)의 고유치와 대수 응력항을 사용하여 뿔뾰한 V-노치에 대한 근사 응력장을 구하고 기존의 해와 비교 검토하고자 한다.

2. 반경 ρ 의 끝이 둥근 V-노치의 등가 형상

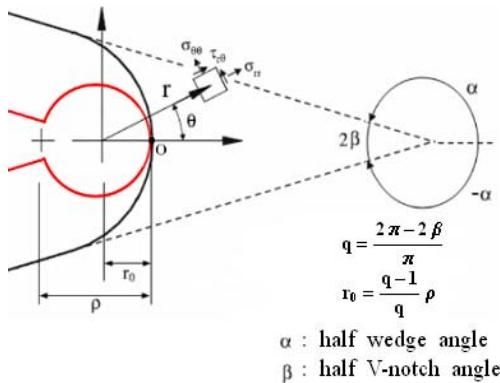


Fig. 1 A rounded V-notch with tip radius ρ

Fig. 1에서 보는 바와 같은 반경 ρ 의 끝이 둥근(rounded) V-노치 문제의 응력장을 구하는 것이 목표이나 수식전개의 어려움으로 인하여 반경 r_0 인 원호 홈을 가지는 V-노치의 문제로 형상을 근사 등가시켜 응력장을 구하고 있다^{5,7}.

3. 반경 r_0 의 원호 홈을 가지는 V-노치의 응력장

예리한 V-노치 문제와는 다르게 반경 r_0 인 원호 홈을 가지는 V-노치 문제에서는 물리적인 모순으로 사용할 수 없었던 음(-)의 고유치나 대수 응력 함수를 사용해도 물리적인 모순이 발생하지 않을 수 있다.

3.1 Mode I의 응력장

모드 I (Mode I)의 응력장은 다음과 같이 고유치와 대수에 의한 응력항의 집합으로 표현할 수 있다.

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_I^{\lambda_k}}{\sqrt{2\pi r}^{1-\lambda_k}} f_{ij}(\lambda_k, \theta), \quad (i, j = r, \theta) \quad (1)$$

여기서

$$\begin{Bmatrix} f_{rr}(\lambda_k, \theta) \\ f_{\theta\theta}(\lambda_k, \theta) \\ f_{r\theta}(\lambda_k, \theta) \end{Bmatrix} = \lambda_k \begin{Bmatrix} (3 - \lambda_k) \cos(1 - \lambda_k)\theta - C_{11} \cos(1 + \lambda_k)\theta \\ (1 + \lambda_k) \cos(1 - \lambda_k)\theta + C_{11} \cos(1 + \lambda_k)\theta \\ (1 - \lambda_k) \sin(1 - \lambda_k)\theta + C_{11} \sin(1 + \lambda_k)\theta \end{Bmatrix},$$

$C_{11} = -\cos 2\lambda_k \alpha - \lambda_k \cos 2\alpha$ 이고, 고유치가 0인 대수 항이면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} f_{rr}(0, \theta) \\ f_{\theta\theta}(0, \theta) \\ f_{r\theta}(0, \theta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4 \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

경계조건은 다음과 같다. $r = r_0$ 인 원호에서

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma_{rr}(r_0, \theta) r_0 d\theta = 0 \text{ 와 } \int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma_{r\theta}(r_0, \theta) r_0 d\theta = 0 \quad (2)$$

$$r = r_0 \text{ 와 } \theta = 0 \text{인 점에서 } \sigma_{rr}(r_0, 0) = 0 \quad (3)$$

경계조건 (2), (3)을 식 (1)에 대입하여 경계조건의 수에 따라 3가지고유치 혹은 대수 항의 함으로만 정리하면 식(4)의 뿔뾰한 V-노치의 모드 I 응력장이 된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(r, \theta) = & -F \frac{K_I^{\lambda_3}}{\sqrt{2\pi}} r^{\lambda_3-1} f_{ij}(\lambda_3, \theta) \left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\lambda_2-\lambda_1} \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} f_{rr}(\lambda_2, \theta) d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} f_{rr}(\lambda_1, \theta) d\theta} \frac{f_{ij}(\lambda_1, \theta)}{f_{ij}(\lambda_2, \theta)} \right] \\ & + \frac{K_I^{\lambda_3}}{\sqrt{2\pi}} r^{\lambda_3-1} f_{ij}(\lambda_3, \theta) \left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\lambda_3-\lambda_1} \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} f_{rr}(\lambda_3, \theta) d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} f_{rr}(\lambda_1, \theta) d\theta} \frac{f_{ij}(\lambda_1, \theta)}{f_{ij}(\lambda_3, \theta)} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

여기서

$$\begin{aligned} F = & r_0^{\lambda_3-\lambda_2} \frac{f_{rr}(\lambda_3, 0)}{f_{rr}(\lambda_2, 0)} \frac{F_3}{F_2}, \\ F_2 = & 1 - \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} f_{rr}(\lambda_2, \theta) d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} f_{rr}(\lambda_1, \theta) d\theta} \frac{f_{rr}(\lambda_1, 0)}{f_{rr}(\lambda_2, 0)}, \\ F_3 = & 1 - \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} f_{rr}(\lambda_3, \theta) d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} f_{rr}(\lambda_1, \theta) d\theta} \frac{f_{rr}(\lambda_1, 0)}{f_{rr}(\lambda_3, 0)} \text{ 이다.} \end{aligned}$$

3.2 Mode II의 응력장

뿔뾰한 V-노치의 모드 II (Mode II) 응력장은 모드 I의 응력장과 유사한 방법으로 경계조건을 이용하여 정리하면 식 (5)와 같다.

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K_{II}^{\mu_2}}{\sqrt{2\pi}} r^{\mu_2-1} g_{ij}(\mu_2, \theta) \left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\mu_2-\mu_1} \frac{g_{r\theta}(\mu_2, 0)}{g_{r\theta}(\mu_1, 0)} \frac{g_{ij}(\mu_1, \theta)}{g_{ij}(\mu_2, \theta)} \right] \quad (5)$$

여기서

$$\begin{Bmatrix} g_{rr}(\mu_k, \theta) \\ g_{\theta\theta}(\mu_k, \theta) \\ g_{r\theta}(\mu_k, \theta) \end{Bmatrix} = -\mu_k \begin{Bmatrix} (3 - \mu_k) \sin(1 - \mu_k)\theta + C_{22} \sin(1 + \mu_k)\theta \\ (1 + \mu_k) \sin(1 - \mu_k)\theta - C_{22} \sin(1 + \mu_k)\theta \\ -(1 - \mu_k) \cos(1 - \mu_k)\theta + C_{22} \cos(1 + \mu_k)\theta \end{Bmatrix},$$

$$C_{22} = \cos 2\mu_k \alpha - \mu_k \cos 2\alpha \text{이다.}$$

4. 결과 검토

4.1 등가 형상의 유한요소 응력결과 비교

반경 ρ 의 끝이 둥근 V-노치와 등가 형상의 반경 r_0 인 원호 홈을 가지는 V-노치간의 응력을 $\alpha=180^\circ, 165^\circ, 135^\circ$ 인 모델에서 모드 I, II에 대하여 유한요소해석하여 비교하여 보았다. 한 예로 $\alpha=180^\circ$, 모드 I의 결과인 Fig.2에서 보는 바와 같은 노치 선단부에서는 응력의 차이가 크나 거리가 조금 떨어진 곳에서는 비슷한 결과를 보이고 있었다. 유한요소해석은 상용 프로그램인 ABAQUS 6.6을 사용하였다.

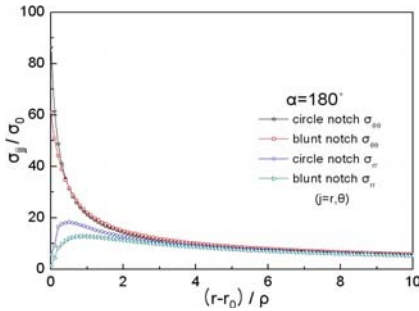


Fig. 2 Comparison with FEM stress results of circle-tip and blunt-tip V-notches under Mode I

4.2 기존의 결과와 비교 검토

기존의 Filippi, Lazzarin과 Tovo⁷의 결과와 식(4)와 (5)의 모드 I, II의 결과를 비교 검토하기 위하여 $\alpha=180^\circ, 165^\circ, 135^\circ$ 인 반경 ρ 의 끝이 둥근 V-노치 모델로 유한요소해석한 결과를 이용하여 동시에 나타낸 결과가 Fig. 3과 Fig. 4이다. 식 (4)와 (5)에 이용된 고유치는 모드 I과 II에서 각각 Table 1과 2와 같고, $\lambda_2=0$ 일 때는 대수(log) 항을 의미한다.

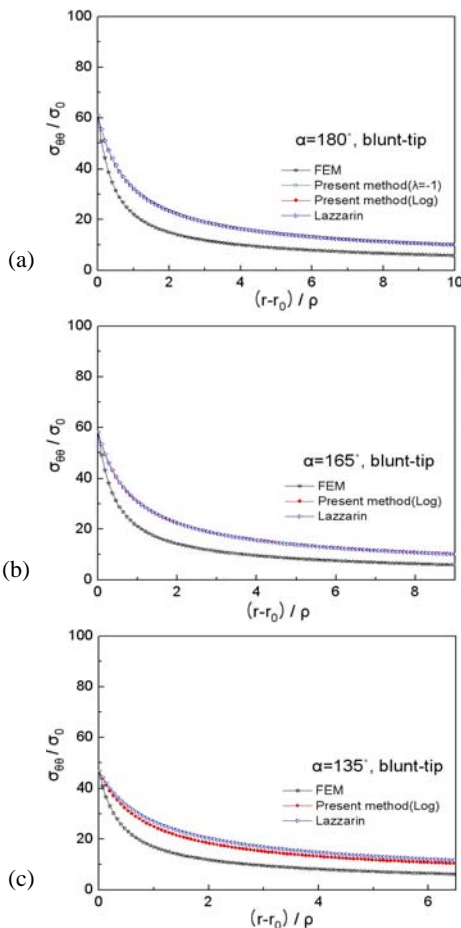


Fig. 3 Comparison of Lazzarin's and present results for a blunt V-notch under Mode I

Fig.3과 4에서 보면 $\alpha=180^\circ$ 인 경우는 모드 I과 II에서 본 결과가 Filippi, Lazzarin과 Tovo⁷의 결과와 완전히 일치하였고, $\alpha=165^\circ$ 와 135° 의 경우는 거의 비슷하나 본 결과가 유한요소 결과와 조금 더 잘 일치하고 있다.

Table 1 Eigenvalue for Mode I

α	λ_1	λ_2	λ_3
180°	-1	-0.5	0.5
	-0.5	0(log)	0.5
165°	-0.5014	0(log)	0.5014
135°	-0.5448	0(log)	0.5448

Table 2 Eigenvalue for Mode II

α	μ_1	μ_2
180°	-0.5	0.5
165°	-0.5982	0.5982
135°	-0.9085	0.9085

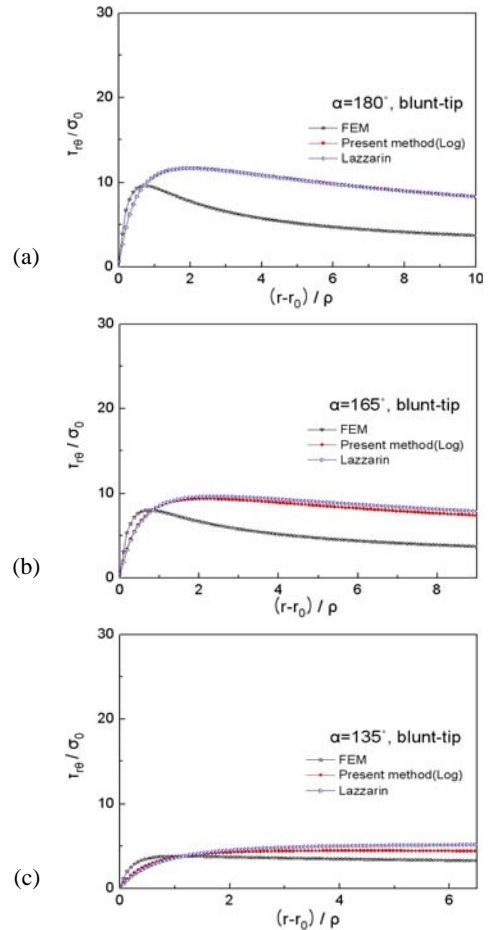


Fig. 4 Comparison of Lazzarin's and present results for a blunt V-notch under Mode II

5. 결론

몽푁한 V-노치에서 Williams²의 고유치 전개법으로 예리한 V-노치에서 사용할 수 없었던 음(-)의 고유치와 대수 응력 항을 사용하여 몽푁한 V-노치에 대한 근사 응력장을 구하였고 기존의 Filippi, Lazzarin과 Tovo⁷의 결과와 비교하여 유사한 결과가 됨을 알았다.

참고문헌

1. Irwin G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack transversing a plate. Journal of Applied Mechanics. 1957;74:361-364.