

주기적으로 변화하는 곡률과 열률을 가진 나선형 파이프를 이용한 유체의 카오스 혼합

Chaotic mixing in a helix-like pipe with periodic variations in curvature and torsion

*#장봉균¹, M. Funakoshi²

*#Bongkyun Jang(jangbk@kimm.re.kr)¹, Mitsuaki Funakoshi²

¹ 한국기계연구원 나노기계연구본부, ²Kyoto University Graduate School of Informatics

Key words : Fluid mixing, Chaotic mixer, Helical pipe

1. 서론

두 가지 이상의 유체를 혼합하는 것은, 화학 공학과 기계 공학과 관련된 산업 분야에서 중요한 역할을 하고 있기 때문에, 다양한 분야의 많은 연구자들에 의해서 연구되어 왔다. 최근에 각광받고 있는 마이크로 유체역학과 MEMS 기술의 발달로, 마이크로 단위에서의 유체 혼합은 의공학, 생명 공학의 분야에서 많이 연구되고 있다.

유동에 있어서 점성의 힘에 대한 관성의 힘의 비율인 레이놀즈 수(Reynolds number)가 큰 경우에는 난류를 이용한 유체 혼합이 효율적이지만, 레이놀즈 수가 작은 경우에는 난류를 발생시키기 위해서는 큰 에너지가 필요하게 된다. 이러한 경우에는 층류를 이용한 유체 혼합을 생각하여만 하며, 유체 입자의 카오스적인 운동을 유발하여 유체를 혼합시키는 카오스 혼합이 유용하다. 유체의 카오스적인 움직임에 관하여, 동역학계(dynamical system) 이론을 바탕으로 많은 연구자들에 의해 활발히 연구되고 있다[1]. 이러한 유체 입자의 카오스적인 운동을 이용한 믹서(chaotic mixer) 개발을 위해 많은 연구가 실행되고 있으며[2], 보다 간단한 구조를 이용한 고효율 믹서 개발이 중요시 되고 있다.

본 연구는 두 종류의 유체를 나선형 파이프 속으로 흘러 보냈을 때 파이프의 단면을 기준으로 두 종류의 유체 분포를 균일하게 하는 것이 목표이다. 여기서 혼합하고자 하는 유체의 점성은 같으며, 확산에 의한 효과는 없는 것으로 가정한다. 이러한 목표를 달성하기 위해서는, 파이프 단면에서의 유체 입자의 카오스적인 운동을 유발하기 위한 파이프의 구조를 결정하는 것이 중요하다.

2. 모델의 기하학적 구조

본 연구에서는 단면이 반지름 a 의 원형인 나선형 파이프 속을 흐르는 두 종류의 비압축성 유체를 혼합시키는 것을 목표로 하여 파이프의 구조를 결정한다. 곡률(curvature)과 열률(torsion)이 일정한 나선을 중심선으로 갖는 원형 파이프의 경우에는 유체의 카오스적인 움직임이 두드러지지 않으며, 유체의 확산 효과가 없는 경우에는 유체를 효율적으로 혼합시키는 것이 불가능 하다. 하지만 카오스를 발생시키기 위하여, 3 차원 공간에서 중심선의 곡률과 열률이 주기적으로 변화하도록 다음과 같이 곡선을 정의한다.

$$x = A \cos \eta, y = B \sin \eta, z = c\eta - d \sin \eta. \quad (1)$$

식 (1)과 같은 곡선을 중심선으로 하는 파이프는 Fig. 1 과 같은 형태를 갖는다. 여기서 A 와 B 는 파이프가 감겨진 원통의 장반경, 단반경을 나타내며, c 는 피치를 나타낸다. 그리고 d 는 z 축 방향의 주기성의 크기를 의미하며, 모든 변수는 파이프의 반경 a 로 무차원화 하였다.

곡선을 표현하는 식 (1)과 Frenet-Serret frame 을 이용하여 곡률 $\kappa(\eta)$ 와 열률 $\tau(\eta)$ 를 구할 수가 있다. 식 (1)이 η 에 관한 삼각함수로 이루어져 있기 때문에, $\kappa(\eta)$ 와 $\tau(\eta)$ 도 η 에 대해서 주기 2π 의 주기함수가 된다.

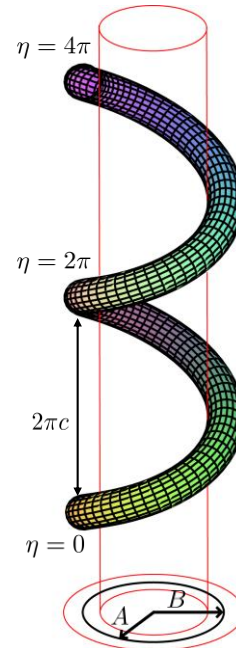


Fig. 1 Schematic diagram of a helix-like pipe twisted around a circular or elliptical cylinder.

3. 단면 방향의 유체입자의 운동

일정한 곡률을 가진 파이프 속을 흐르는 비압축성 점성 유체의 속도장(velocity field)에 관하여 Dean 은 다음과 같은 근사해를 도출하였다[3].

$$\begin{aligned} u_s(s, r, \theta) &= 2(1 - r^2), \\ u_r(s, r, \theta) &= \frac{Re}{72} \kappa (1 - r^2)^2 (4 - r^2) \sin \theta, \\ u_\theta(s, r, \theta) &= \frac{Re}{72} \kappa (1 - r^2) (4 - 23r^2 + 7r^4) \cos \theta. \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 r 과 θ 는 파이프 단면의 극좌표계이고, $\theta=0$ 은 곡률 중심의 방향을 의미한다. 그리고 s 는 파이프의 축 방향의 좌표를 나타낸다. 그리고 u_r, u_θ, u_s 는 각각 r, θ, s 방향의 속도를 의미한다. 유체의 점성을 ν , s 방향의 평균 속도를 U 라고 하였을 때, 레이놀즈 수는 $Re = aU/\nu$ 로 정의된다.

Fig. 2는 식 (2)에 의한 유선을 나타내었는데, 좌우 대칭인 두 개의 소용돌이로 이루어진 것을 알 수 있다. 이 근사해는 Re 와 κ 가 작은 경우에 실제 속도장에 근접하게 된다. 그리고, 본 연구에서는 곡률과 열률이 주기적으로 변화하지만, 그 변화가 작다고 가정하고 Dean의 근사해를 사용하기로 한다. 이러한 조건하에, 다음과 같은 식을 사용하여 유체입자의 운동을 수치적으로 살펴 보도록 한다.

$$\frac{dr}{d\eta} = \frac{ds}{d\eta} u_r, r \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{ds}{d\eta} [u_\theta - r\tau]. \quad (3)$$

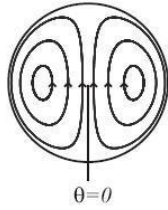


Fig. 2 Cross-sectional streamlines obtained from Eq. (2)

4. 결과

유체 입자의 운동방정식 (3)을 수치적으로 계산하여 유체 입자의 카오스적인 운동을 살펴보기 위하여 Poincaré Section 을 작성한다. Poincaré Section 은 3 차원 시스템에서 유체 입자의 운동을 2 차원 평면에 투영하여 카오스적인 현상의 관찰을 용이하게 해 준다. Poincaré Section 에서 많은 점으로 이루어진 부분을 카오스 영역(chaotic region)이라고 부르며, 카오스 영역에서 출발한 유체 입자는 카오스적인 운동을 한다는 사실이 알려져 있다. 그리고 폐곡선으로 이루어진 영역을 규칙 영역(regular region)이라고 하며, 이 영역에 속한 유체 입자는 규칙 영역 안에서 운동을 하게 된다. 본 연구에서는 $\eta = 2n\pi$ (n 은 자연수)에서의 파이프 단면의 유체 입자 좌표 (r, θ) 를 기록하여 Poincaré Section 을 작성한다.

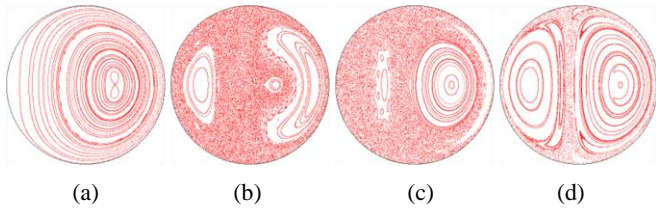


Fig. 3 Dependence of Poincaré Sections on Re . (a) $Re=10$, (b) $Re=30$, (c) $Re=40$, (d) $Re=90$. $A=B=c=d=16$.

Fig. 3 은 서로 다른 레이놀즈 수에 대한 Poincaré Section 을 작성함으로써 레이놀즈 수 의존성을 보여주고 있다. 레이놀즈 수가 작은 경우에는, 파이프 단면 유동의 크기가 작아져, 상대적으로 열물의 효과가 커지게 된다. 따라서 Fig. 3(a)에서 카오스 영역이 거의 존재하지 않는 것을 확인할 수 있다. 그리고 레이놀즈 수가 큰 경우에는 파이프 단면 유동이 커지면서, 곡률의 효과가 열물의 효과보다 상대적으로 작아지게 되어 Fig. 3(d)와 같이 카오스 영역이 작은 것을 알 수 있다. 하지만, 중간 크기의 레이놀즈 수의 경우에는 곡률과 열물의 효과가 균형을 이루며 동시에 영향을 주기 때문에 Fig. 3(b), (c)와 같이 넓은 크기의 카오스 영역을 확인할 수 있다.

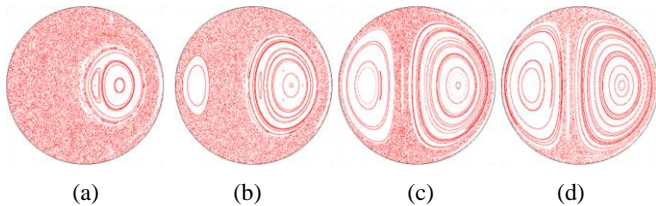


Fig. 4 Dependence of Poincaré Sections on $A=B$. (a) $A=B=8$, (b) $A=B=12$, (c) $A=B=24$, (d) $A=B=32$. $Re=50$, $c=d=16$.

파이프가 감겨진 원통의 반경이 큰 경우에는 곡률과 열물의 크기는 양쪽 모두 작은 값을 갖게 되지만, 곡률 보다 열물의 크기가 상대적으로 더 빠르게 작아지게 된다. 따라서 곡률의 효과가 지배적인 Fig. 4(d)에서 카오스 영역이 작

게 발견되며, $A=B$ 의 값이 작은 경우에는 곡률과 함께 열물의 효과도 영향을 미치기 때문에 Fig. 4(a)와 같이 카오스 영역이 넓게 분포하는 것을 확인할 수 있다.

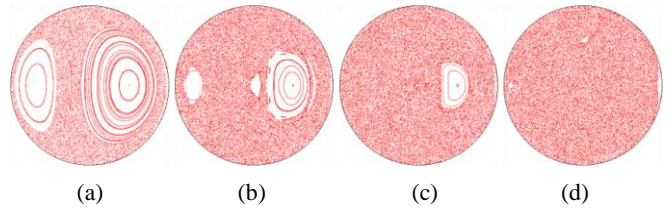


Fig. 5 Dependence of Poincaré Sections on $A \neq B$. (a) $A=16.00$, $B=16.00$, (b) $A=12.01$, $B=19.53$, (c) $A=10.00$, $B=21.01$, (d) $A=6.00$, $B=23.37$. $Re=50$, $c=d=16$.

$A \neq B$ 의 경우에는 파이프가 원통이 아닌 단면이 타원형인 통에 감겨진 경우가 된다. 이 경우에는 곡률과 열물의 변동의 크기가 원통에 감겨진 경우보다 커지기 때문에, Fig. 5 에서 알 수 있듯이 가늘고 긴 타원형의 경우가 카오스 영역이 넓은 것을 알 수 있다.

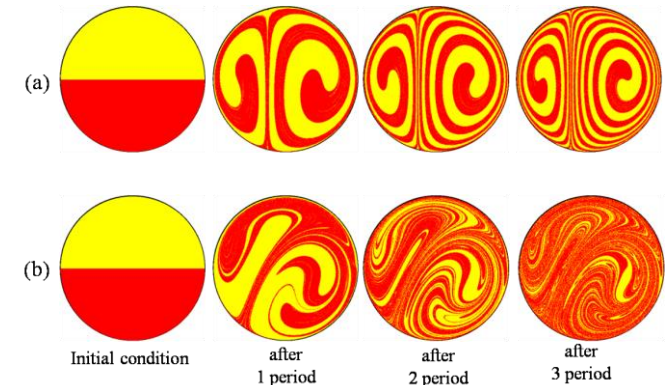


Fig. 6 Arrangements of initially-separated two kinds of fluid particles in the cross-section after a few periods of η . (a) $Re=50$, $A=B=c=16$, $d=0$ (b) $Re=50$, $A=8.02$, $B=22.28$, $c=d=16$.

Fig. 6 은 두 종류의 유체를 η 에 대하여 1-3 주기에서의 단면 배치를 나타낸 그림이다. Poincaré Section 을 이용하여 카오스 영역이 전혀 없는 경우 Fig. 6(a)와 넓은 영역의 카오스 영역을 갖고 있는 경우 Fig. 6(b)를 비교했을 때, 카오스 영역이 넓은 경우가 빠른 속도로 유체가 혼합되는 것을 확인할 수 있다.

5. 결론

나선형 파이프의 곡률과 열물을 주기적으로 변화시킴으로써 유체 운동의 카오스를 발생시켜 효율적인 믹서를 설계하였다. Poincaré Section 을 이용하여, 카오스적 현상이 두드러지는 파이프의 구체적인 구조를 설계할 수 있었다. 실제로 유체 입자의 운동을 시각적으로 살펴봄으로써 유체 입자의 카오스적인 운동이 지배적인 나선형 파이프에서 효율적인 유체 혼합이 이루어진다는 것을 확인하였다.

참고문헌

1. Aref, H., "Chaotic advection of fluid particles." *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **333**, 273-288, 1990.
2. Jones, S. W., Thomas, O. M., and Aref, H., "Chaotic advection by laminar-flow in a twisted pipe.", *J. Fluid Mech.* **209**, 335-357, 1989.
3. Dean, W. R., "Note on the motion of fluid in a curved pipe." *Phil. Mag.* **4**, 208-223, 1927.