

탄성 대변형 다물체 시스템의 동응력 계산에 관한 연구 A Study on Dynamic Stress Analysis Method for Very Flexible Multibody Systems

*정일호¹, #박태원²

*I. H. Jung(ilhojung@hanmail.net)¹, #T. W. Park²

¹ 국방기술품질원 기동화력센터, ² 아주대학교 기계공학과

Key words : ANCF(Absolute Nodal Coordinate Frame), Very Flexible Multibody systems, Dynamic Stress

1. 서론

현재 사용되고 있는 동응력 이력을 계산하는 방법은 유한요소해석을 이용하여 계산된 부품의 선형 정적 응력과 다물체 동역학 해석으로 계산된 동하중 이력을 중첩하여 동응력을 계산하는 준정적(Quasi-Static) 방법과, 유한요소해석을 이용하여 계산된 부품의 모달응력과 해당 부품의 탄성효과를 고려하기 위하여 모달 좌표를 이용한 탄성 다물체 동역학 해석으로 계산된 모달 좌표이력을 선형 중첩하여 동응력을 산출하는 모달 응력 합성법(MSR : Modal Stress Superposition Method)이다. 일반적인 기계 부품은 대부분 위에서 제안한 두 가지 방법들로 동응력을 계산할 수 있다.

그러나 케이블, 로프, 그리고 와이어 하니스 등과 같이 변형량이 큰 부품의 경우는 동특성이 기존의 탄성 다물체 동역학 방법으로는 구현하기 어렵거나 불가능하다. 이는 동응력을 예측할 수 없음을 뜻한다. 이에 본 연구에서는 절대 절점 좌표(ANCF)를 적용하여 부품의 탄성 대변형 효과를 고려할 수 있는 탄성 대변형 다물체 동역학 해석 방법을 이용하여 동응력을 계산하는 방법을 제안하였다. 이를 위하여 먼저 강체 좌표와 절대 절점 좌표를 혼용하여 조합 운동 방정식을 구성하였고, 이 조합 운동 방정식을 이용하여 다물체 시스템에 대한 하나의 시뮬레이션 모델만으로 물체의 변위, 속도, 가속도, 힘 등의 동적 특성은 물론, 탄성체의 구조적 특성인 변형량이나 동응력까지도 동시에 계산할 수 있는 방법을 제안하였다. 특별히 강체와 탄성체간의 고정 조인트를 개발하여 효율적으로 동역학 모델링을 수행할 수 있도록 하였으며, 또한 강체와 탄성체간의 다양한 조인트 개발의 기반을 마련하였다. 마지막으로 제안된 절대 절점 좌표를 이용하여 산출된 동응력 해석 결과를 상용 프로그램으로 계산된 결과와 비교하여 그 유용성을 검증하였다.

2. ANCF를 이용한 동역학 및 동응력 방정식

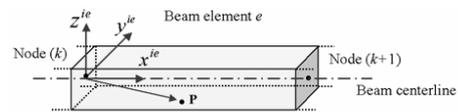
절대절점좌표를 이용한 3 차원 탄성 대변형 동역학에서의 빔 요소는 변위와 기울기를 이용해 정의할 수 있다. Fig. 1에서는 대변형 탄성체 i 를 구성하는 빔 요소 e 의 기준좌표계와 빔의 변형상태에서 임의의 위치 점에 대한 전역변위벡터(Global Position Vector)를 나타내고 있다. 빔 요소 내의 임의의 위치에 대한 전역변위벡터는 요소의 형상함수와 절대절점좌표를 이용하여 식(1)과 같이 쓸 수 있다.

여기서, \mathbf{S}^{ie} 는 빔 요소의 강체모드까지 표현이 가능한 전역형상함수(Global Shape Function) 이고, \mathbf{e}^{ie} 는 빔 요소 e 를 정의하기 위한 절대절점좌표이다. 하나의 빔 요소는 2개의 노드로 구성되고 각 노드는 식(2)와 같이 변위와 기울기를 이용해 정의된다. 여기서, \mathbf{r}^{iek} 는 노드 k 의 위치를 나타내는 전역변위벡터이고, 나머지는 노드 k 에서의 기울기를 정의하는 전역변위벡터 구배이므로 각각의 노드에 대해서 12개의 독립좌표로 구성된다.

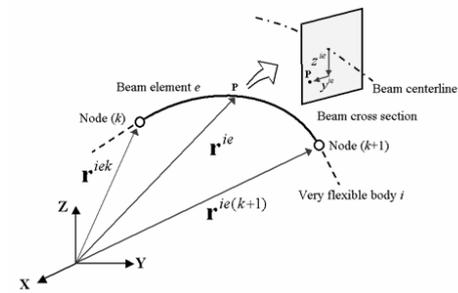
3 차원 빔 요소의 운동에너지는 식(3)과 같이 정의되고, 여기서, ρ^{ie} 와 V^{ie} 는 빔 요소 e 의 밀도와 체적을 의미하며 질량 \mathbf{M}^{ie} 은 식(4)와 같이 계산될 수 있다. 대변형 탄성체 i 를 구성하는 빔 요소 e 의 전체 탄성변형에너지는 식(4)와 같다. 여기서, \mathbf{K}_a^{ie} 는 3 차원 빔 요소의 강성행렬로서 절점좌

표에 의한 비선형함수로 표현된다. 탄성변형에너지를 일반좌표로 편미분하면 식(5)의 탄성력벡터가 된다.

절대절점좌표를 이용한 3 차원 빔 요소의 탄성력은 연속체 이론을 이용하여 계산이 가능하다. 이 경우, 변형률과 변위와의 관계식을 이용하여 일반적인 탄성력의 계산식을 유도할 수 있다. 이때 계산되는 변형률로부터 응력을 계산할 수 있다. Cauchy-Green 식을 이용한 라그랑지 변형 텐서(Lagrangian Strain Tensor) ϵ_m^{ie} 는 식(6)과 같이 쓸 수 있다. 여기서, \mathbf{I} 는 3×3 의 단위행렬을 의미한다. 빔 요소의 응력 성분 벡터는 구성식(Constitutive Equation)을 이용하면 식(7)과 같다. 이때 계산된 응력 성분들의 시간에 대한 변화를 동응력 이력으로 사용할 수 있다. 이는 동역학 해석 중에 동응력 이력을 계산할 수 있음을 의미한다. 여기서, 행렬 \mathbf{E}^{ie} 는 빔 요소에 대한 재료의 탄성계수행렬이다.



(a) Local element coordinates of a beam element



(b) Deformation of a beam after a general motion

Fig. 1 Element in the absolute nodal coordinate formulation

$$\mathbf{r}^{ie} = \mathbf{S}^{ie} (x^{ie}, y^{ie}, z^{ie}) \mathbf{e}^{ie}(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{e}^{iek} = \left[\mathbf{r}^{iekT} \left(\frac{\partial \mathbf{r}^{iek}}{\partial x^{ie}} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{r}^{iek}}{\partial y^{ie}} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{r}^{iek}}{\partial z^{ie}} \right)^T \right]^T \quad (2)$$

$$T^{ie} = \frac{1}{2} \int_{V^{ie}} \rho^{ie} \dot{\mathbf{r}}^{ieT} \dot{\mathbf{r}}^{ie} dV^{ie} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^{ieT} \left(\int_{V^{ie}} \rho^{ie} \mathbf{S}^{ieT} \mathbf{S}^{ie} dV^{ie} \right) \dot{\mathbf{e}}^{ie} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^{ieT} \mathbf{M}^{ie} \dot{\mathbf{e}}^{ie} \quad (3)$$

$$U^{ie} = \frac{1}{2} \int_{V^{ie}} \epsilon^{ieT} \mathbf{E}^{ie} \epsilon^{ie} dV^{ie} = \frac{1}{2} \mathbf{e}^{ieT} \mathbf{K}_a^{ie} \mathbf{e}^{ie} \quad (4)$$

$$\mathbf{Q}_k^{ie} = - \left(\frac{\partial U^{ie}}{\partial \mathbf{e}^{ie}} \right)^T \quad (5)$$

$$\epsilon_m^{ie} = \frac{1}{2} (\mathbf{D}^{ieT} \mathbf{D}^{ie} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^{ie} & \epsilon_{12}^{ie} & \epsilon_{13}^{ie} \\ \epsilon_{21}^{ie} & \epsilon_{22}^{ie} & \epsilon_{23}^{ie} \\ \epsilon_{31}^{ie} & \epsilon_{32}^{ie} & \epsilon_{33}^{ie} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{,X}^{ieT} \mathbf{r}_{,X}^{ie} - 1 & \mathbf{r}_{,X}^{ieT} \mathbf{r}_{,Y}^{ie} & \mathbf{r}_{,X}^{ieT} \mathbf{r}_{,Z}^{ie} \\ \mathbf{r}_{,Y}^{ieT} \mathbf{r}_{,X}^{ie} - 1 & \mathbf{r}_{,Y}^{ieT} \mathbf{r}_{,Y}^{ie} & \mathbf{r}_{,Y}^{ieT} \mathbf{r}_{,Z}^{ie} \\ \text{symmetric} & \mathbf{r}_{,Z}^{ieT} \mathbf{r}_{,X}^{ie} & \mathbf{r}_{,Z}^{ieT} \mathbf{r}_{,Z}^{ie} - 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Where, $\mathbf{r}_{,\alpha}^{ie} = \frac{\partial \mathbf{r}^{ie}}{\partial \alpha}$, $\alpha = X, Y, Z$

$$\boldsymbol{\sigma}^{ie} = \mathbf{E}^{ie} \boldsymbol{\epsilon}^{ie} \quad (7)$$

3. 고정 조인트(3 차원)

강체나 탄성체는 각각 조인트에 의해 상호 거동을 하게 된다. 이를 모델링하기 위해서는 일반 좌표들을 혼용하여 조인트 구속식이 유도되어야 한다. 이에 일반 좌표들을 혼용한 3 차원 조인트 구속식들이 많이 제안되었다. 이 중 고정 조인트의 경우는 6 개의 구속식만이 주로 제안되어 있다. 3 개의 구속식은 구 조인트를 이용한 절점 위치 고정이고, 3 개의 구속식은 내적(Dot Product)을 이용한 절점 회전 고정 구속식이다. 그러나 한 노드(Node)에 12 개의 일반좌표를 사용하는 탄성체를 포함한 조합 운동방정식에서는 해당 절점만을 고정하고, 단면은 고정할 수 없게 된다. 절점을 포함한 초기 단면을 강체 단면으로 정의하기 위해서는 6 개의 구속식이 조인트의 연결 상태에 따라 추가로 필요하다. 이에 본 연구에서는 대변형 빔의 조인트 좌표계에서 \mathbf{I} 가 식(2)와 같이 기울기 벡터 중 하나인 $\hat{\mathbf{r}}_x$ 의 단위 벡터인 $\hat{\mathbf{r}}_x$ 와 항상 같으므로 \mathbf{J}, \mathbf{K} 가 $\hat{\mathbf{r}}_x, \hat{\mathbf{r}}_z$ 와 초기에 갖는 차이를 계속 유지한다면 절점을 포함하는 해당 전단면이 절점에 항상 구속될 것이라는 점에 착안하여 추가적인 6 개(강체 단면 구속식)의 구속식을 제안하여 강체와 탄성체간의 고정 조인트를 완전하게 구현하였다. Fig. 2 와 같은 강체와 대변형 탄성체 사이에서 3 차원 고정 조인트의 총 12 개 구속식들은 최종적으로 식(8)과 같다. 강체 동역학을 포함하고, 절대절점좌표를 이용한 대변형 탄성체 동역학의 운동방정식들을 함께 조합하여 식(9)와 같이 일반적인 탄성 다물체 동역학에 대한 최종적인 조합운동방정식을 얻을 수 있다. 여기서, Φ_q 는 시스템의 일반좌표와 관련된 구속식의 자코비안 행렬이다. λ 는 전체시스템에 대한 라그랑지 승수벡터이고, \mathbf{Q}_r 와 \mathbf{Q}_a 는 각각 강체 좌표, 절대절점좌표와 관련된 일반외력벡터이다. 그리고 γ 는 전체시스템 구속식에 대한 가속도 우변항이다.

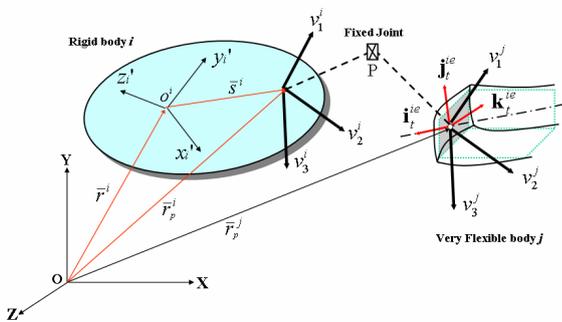


Fig. 2 Graphical illustration of a 3-D bracket joint

$$\Phi^{\infty}(\mathbf{q}^i, \mathbf{q}^j) = \begin{bmatrix} \Phi^s \\ \Phi^{d-1} \\ \Phi^{d-2} \\ \Phi^{d-3} \\ \Phi^{\infty} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_p^j - \mathbf{r}_p^i \\ \mathbf{v}_1^j \mathbf{v}_2^i \\ \mathbf{v}_1^j \mathbf{v}_3^i \\ \mathbf{v}_1^j \mathbf{v}_1^i \\ \mathbf{j} - \hat{\mathbf{r}}_y \\ \mathbf{k} - \hat{\mathbf{r}}_z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_r & \mathbf{0} & \Phi_{q_r}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_a & \Phi_e^T \\ \Phi_{q_r} & \Phi_e & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_r \\ \dot{\mathbf{e}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_r \\ \mathbf{Q}_a \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (9)$$

4. 검증 예제

강체-탄성체 사이의 고정 조인트를 포함하여 3 차원 빔 요소를 이용한 탄성 대변형 다물체 동역학 해석 이론을 검증을 위하여 Fig. 3 과 같은 굽힘 변형 예제를 수행하였으며, 이를 상용중인 유한요소해석 프로그램의 과도 해석 결과와 비교하여 그 신뢰성을 확보하였다. 그림과 같이 -Z 방향으

로 구를 중력 가속도에 의하여 자유 낙하 시키는 시뮬레이션을 수행하여 굽힘 변형을 발생시켰다. 해석 결과 중 Fig. 4 는 4 번 절점의 중력 방향(-Z)의 변위와 1 번 요소의 중앙 위치 상단 표면에서 발생하는 동응력 이력이다. 각각의 결과는 상용 유한요소 프로그램인 NASTRAN 의 과도 해석 결과와 비교하여 보여주고 있다. 변위는 그 크기와 경향은 매우 잘 일치하였으나 약간의 위상 차가 발생하였는데 이는 시간에 대한 증분방법(Incremental Method)이나 사용된 빔 요소의 특성 때문으로 사료된다. 동응력은 매우 잘 일치함을 확인하였다.

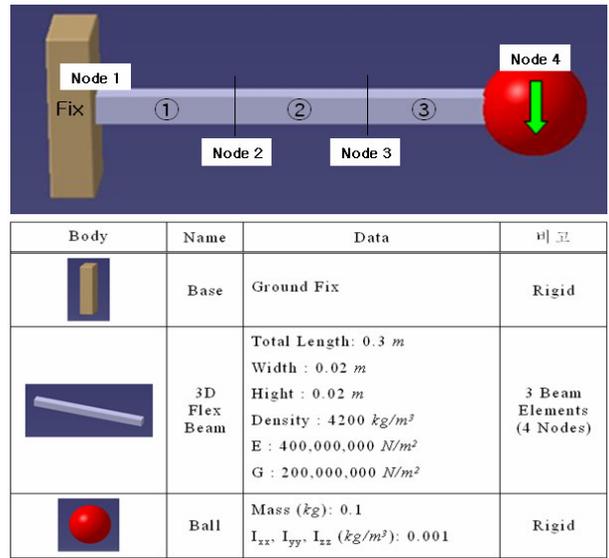


Fig. 3 Simulation model for bending deformation

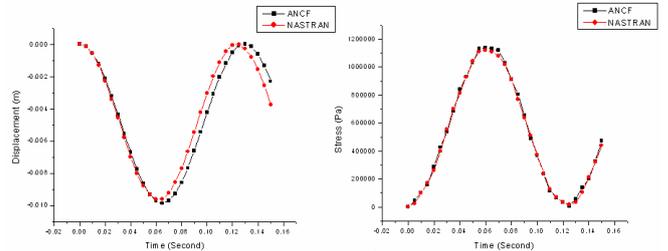


Fig. 4 Displacement (Z) & stress of node 4

5. 결론

본 장에서는 강체와 대변형 탄성체를 포함하는 다물체 시스템의 동특성을 해석하고 탄성체 부품의 동응력을 계산하기 위하여 강체 좌표와 절대절점좌표를 조합한 운동방정식을 제안하였다. 또한 일반 좌표들을 혼용하여 강체와 탄성체간의 고정 조인트를 유도하였다. 끝으로 조합운동방정식의 일반 외력인 빔 요소의 탄성력이 변형률과 변위와의 관계식으로부터 유도되는 점에 착안하여 동응력 이력 계산 방법을 제안하고, 이를 상용 프로그램과 비교하여 그 유용성을 검증하였다. 제안된 이론은 탄성 다물체 시스템에 대한 하나의 수치적 모델만으로 동적 특성은 물론 탄성체의 구조적 특성인 변형량이나 동응력까지도 동시에 계산할 수 있고 또 준정적 방법이나 모달 응력 합성법으로 계산이 어려운 케이블, 로프, 그리고 와이어 하니스 등과 같이 변형량이 큰 부품의 동응력 이력을 계산할 수 있다는 장점이 있다.

참고문헌

1. Jung, I. H., "Dynamic Stress Analysis Method and Its Applications for Flexible Multibody Systems," Ph.D. Dissertation, The University of Ajou, 2007.