

## 해밀토니안의 시간 불연속 변분적분기를 이용한 2차원 탄소성 응력과 해석

조상순<sup>1</sup> · 허 훈<sup>#</sup> · 박광춘<sup>2</sup>

### Analysis of 2-Dimensional Elasto-Plastic Stress by a Time-Discontinuous Variational Integrator of Hamiltonian

S. S. Cho<sup>1</sup>, H. Huh<sup>#</sup>, K. C. Park<sup>2</sup>

#### Abstract

This paper is concerned with the analysis of elasto-plastic stress waves in a mode I semi-infinite cracked solid subjected to Heaviside pulse load. This study adopts a time-discontinuous variational integrator based on Hamiltonian in order to reduce the numerical dispersive and dissipative errors. This also utilizes an integration scheme of the constitutive model with 2nd-order accuracy which is formulated on the strain space for a rate and temperature dependent material model. Finite element analyses of elasto-plastic stress waves are carried out in order to compare the accuracy between a conventional Galerkin method and the time-discontinuous variational integrator.

**Key Words** : propagation of elasto-plastic stress waves in a cracked solid, time-discontinuous variational integrator

#### 1. 서론

탄성체에 충돌에 의한 동적인 하중이 작용하면 매질입자는 평형상태를 기준으로 진동을 하고, 매질을 통하여 입자의 진동이 전파하게 되는데 이를 응력파의 전파(propagation of the stress wave)라 한다. 충격하중을 받은 부재의 내부하중은 응력파의 형태로 고체속을 전파하고 이 응력파에 의한 응력장은 대체로 정하중에 의한 응력장과는 다른 특성을 보인다.

특히 균열선단(crack tip)과 자유표면(free surface)은 균열(crack)을 포함하는 균질한 탄성체를 통과하여 전파하는 응력파는 매질의 팽창 및 수축을 통해 전파되는 P파(primary wave), 매질의 전단저항을 통해 전파되는 S파(secondary or shear wave), 자유표면을 따라 전파되는 Rayleigh파(Rayleigh wave)의 3가지 형태로 전파된다. 또한 응력파는 물체의 형상이나 경계 조건에 따라서 투과뿐만 아니라 반사를 일으켜 후속의 진행과 혹은

다른 경계로부터의 반사파와 간섭, 회절을 일으켜서 어느 부분에 큰 응력을 유기하여 파괴에 이르는 경우가 있다. 응력파가 전파될 때 응력의 크기가 탄성범위를 벗어나게 되면 소성변형에 의한 소성응력파가 발생하여 탄성 응력파를 따라 전파하게 된다. 일반적으로 소성 응력파는 탄성 응력파보다 매질내의 전파속도가 늦고, 탄성 응력파와 마찬가지로 반사, 간섭 및 회절을 일으키기 때문에 이론적으로 예측하기 어렵다.

유한요소법은 현재 고체 내의 응력파를 해석하기 위하여 가장 많이 사용되는 방법이지만, 응력파의 전파를 해석하는데 있어서 크게 두 가지의 어려움을 갖는다. 그 중 첫 번째는 응력파의 정해가 파 선단에서 불연속성 또는 특이점을 갖는 반면, 유한요소법을 사용하여 파동방정식을 수치해석하는 경우 수치분산오차(dispersive error)나 소산오차(dissipative error)가 필연적으로 발생하여 파 선단부의 진폭이 현저하게 감소하게 된다. 또한 파 선단 또는 후미에 짧은 파들이 앞

1. KAIST 기계항공시스템학부

2. University of Colorado, USA

# 교신저자: KAIST, E-mail: [hhuh@kaist.ac.kr](mailto:hhuh@kaist.ac.kr)

서거나 뒤따르게 되므로 응력과 선단부의 불연속성을 고려할 수 없으며 실제와 매우 다른 형상으로 전달되는 단점을 갖는다. 두 번째 문제점은 요소의 크기에 비하여 비교적 짧은 파장을 갖는 응력파가 전파되는 경우 응력파의 형상을 계속 유지하면서 전파시키기가 어렵다는 것이다.

탄소성문제는 각 단계의 응력증분을 계산하기 위하여 재료의 거동을 실험적으로 구한 구성 방정식(constitutive equation)을 수치 적분하여야 한다. 구성방정식의 적분은 재료의 변형 중에 발생하는 소성일(plastic work)이 최대화되도록 응력증분을 계산하여야 하며, 계산된 응력값은 항복면내에 존재하여야 되는 제한조건을 가지고 있다. 특히 고속변형을 겪는 재료의 경우에는 변형률, 변형률속도 및 온도를 포함하는 구성방정식을 사용해야 한다. 재료가 고속변형을 하면 변형률속도와 온도가 시간에 따라 변화하기 때문에 유효 응력이 증가하기도 하며 감소하기도 하여 경화 및 연화현상을 동시에 겪는다. 따라서 변형률속도 및 온도에 의존하는 구성방정식의 적분은 응력공간보다 변형률 공간에서 적분을 수행하여야 보다 정확하고 효율적으로 계산할 수 있다[1].

본 연구에서는 균열을 갖는 2차원 평면 변형률 조건에서 균열선단에서 반사되어 전파되는 탄소성 응력파의 불연속성과 전파속도를 정확하게 계산하고자 한다. 응력파 해석시 발생하는 수치분산 및 소산오차를 줄이기 위하여 시간-불연속 변분적분기(time-discontinuous variational integrator)를 이용하였으며, 변형률속도 및 온도에 의존하는 구성방정식의 적분을 위하여 변형률 공간에서의 수식화를 적용하였다.

## 2. 해밀토니안의 시간 불연속 변분적분기

고전적인 해석역학에서 해밀토니안은 식 (1)과 같이 시스템이 갖는 전체 에너지로서 운동에너지와 위치에너지를 합으로 정의된다.

$$H = H(q, p; t) = 2T - (T - V) = T + V \quad (1)$$

여기서  $q$ 는 일반화좌표(generalized coordinate)를  $p$ 는 일반화운동량(generalized momentum)을 나타내고, 일반화 좌표와 일반화 운동량을 묶어서 표준변수(canonical variable)라 한다. 해밀토니안 운동경로는 변분법적 해석에서 식 (2)와 같이 정의되

는 작용 적분값을 최소로 되게 하는 경로로서 이를 해밀톤의 원리(Hamilton's principle)이라 한다.

$$\delta S = \delta \int_1^2 L dt = 0 \quad (2)$$

본 연구에서는 이산화된 시간영역의 각 절점에서 변위와 속도가 불연속이라 가정하여 식 (3)과 같이 해밀토니안의 작용적분과 각 항을 정의하였다[2].

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \sum_{k=1}^N \hat{S}_k = \sum_{k=1}^N \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_{k-1}+\epsilon}^{t_{k-1}+\Delta t} \left[ p^T \dot{q} - \left( \frac{1}{2} p^T M^{-1} p + V(q) \right) \right] dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_{k-1}-\epsilon}^{t_{k-1}+\epsilon} \left[ p^T \dot{q} - \left( \frac{1}{2} p^T M^{-1} p + V(q) \right) \right] dt \\ &= \sum_{k=1}^N \left( p_k^T \dot{q}_k \Delta t - \frac{\Delta t}{2} p_k^T M^{-1} p_k - \Delta t \hat{V}(q_k) + p_{k-1}^T q_{k-1} \right) \quad (3) \\ &\equiv \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} (p_{k-1^+} + p_k)^T (q_k - q_{k-1^+}) - \Delta t [\hat{T}_k + \hat{V}_k - \hat{\Lambda}_k] \\ &\quad + \sum_{k=1}^N p_{k-1}^T (q_{k-1^+} - q_{k-1^-}) \end{aligned}$$

식 (3)에서  $T_k$ 와  $V_k$ 는 각각 운동에너지(kinetic energy)와 위치에너지(potential energy)를 의미하며, 운동에너지는 식 (4)와 같이 정의하였고 위치에너지에 의한 내력벡터(internal force vector)는 식 (5)와 같이 정의하였다[2].

$$\hat{T}_k = \frac{1}{2} (p_{k-1^+} + p_k)^T M^{-1} (p_{k-1^+} + p_k) \quad (4)$$

$$F_{q_{k-1^+}}^{\text{int}} = \frac{\partial \hat{V}_k}{\partial q_{k-1^+}} = \frac{1}{3} K(q_{k-1^+}) q_{k-1^+} + \frac{1}{6} K(q_k) q_k \quad (5)$$

$$F_{q_{k-1^-}}^{\text{int}} = \frac{\partial \hat{V}_k}{\partial q_{k-1^-}} = \frac{1}{6} K(q_{k-1^+}) q_{k-1^+} + \frac{1}{3} K(q_k) q_k$$

또한 응력파가 불연속일 때 발생하는 진동현상을 더욱 감소시키기 위하여 억제 운동에너지(suppressed kinetic energy)를 식 (6)과 같이 정의하였다[2].

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{S}_k}{\partial p_{k-1^+}} &= \phi M^{-1} (p_{k-1^+} - p_{k-1^-}) \\ \frac{\partial \hat{S}_k}{\partial p_{k-1^-}} &= \phi M^{-1} (p_{k-1^+} - p_{k-1^-}) \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)에서  $\phi$  는 억제 운동에너지의 양을 제어하는 변수를 의미한다. 따라서 위의 식(3)의 작용적분에 1 차 변분을 적용하면 식(7)과 같은 시간 불연속 변분적분기에 의한 유한요소식을 얻을 수 있다.[2]

$$\begin{aligned} F_1^{int} + \frac{1}{2}MV_1 + \frac{1}{2}MV_2 &= MV_0 + F_1^{ext} \\ F_2^{int} - \frac{1}{2}MV_1 + \frac{1}{2}MV_2 &= F_2^{ext} \\ U_1 &= U_0 \\ U_2 &= U_1 + \frac{\Delta t}{2}(1-4\phi)V_1 + \frac{\Delta t}{2}(1+4\phi)V_2 \end{aligned} \quad (6)$$

### 3. 변형률 공간에서의 구성방정식 적분

변형률 공간에서 등방성 탄소성에 대한 항복함수는 식(7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\varepsilon}^p, d^p, T) \\ = \sqrt{6\mu^2(\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\varepsilon}^p) : (\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\varepsilon}^p)} - g(\boldsymbol{\varepsilon}^p, d^p, T) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)에서  $g(\boldsymbol{\varepsilon}^p, d^p, T)$  는 유효응력을 나타내며,  $\boldsymbol{\varepsilon}^p, d^p$  와  $T$  는 각각 유효 소성변형률, 유효 소성변형률속도와 온도를 의미한다. 즉 구성방정식은 변형률속도 및 온도에 의존한다. 그리고 식(8)과 같이 소성변형률속도 텐서는 Prandtl-Reuss 유동법칙을 따르며, 변형률속도 텐서는 탄성 변형률속도 텐서와 소성 변형률속도 텐서로 분리할 수 있으므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{D}^e = \mathbf{D} - \mathbf{D}^p = \mathbf{D} - \frac{1}{2\mu} d^p \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D} - \frac{1}{2\mu} d^p \mathbf{a} \quad (8)$$

소성유동에 의한 소성변형률과 탄성변형률증분을 구하기 위하여 식(8)을 아래 식(9)와 같이 적분한다.

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \mathbf{D}^e dt = \mathbf{D}\Delta t - \frac{1}{2\mu} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} d^p \mathbf{a} dt \quad (9)$$

위의 식(9)에서 적분항 내의  $d^p$  와  $\mathbf{a}$  는 모두 적분구간에서 시간에 따라 변화하는 변수이다. 따라서 아래 식(10)과 같이 부분적분(integration by part)과 연쇄법칙(chain rule)을 적용할 수 있다.

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{D}\Delta t - \frac{1}{2\mu} \left[ \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left\{ \frac{d}{dt} \{ d^p \Delta t \mathbf{a} \} dt - \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} (d^p \Delta t \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}) dt \right\} \right] \quad (10)$$

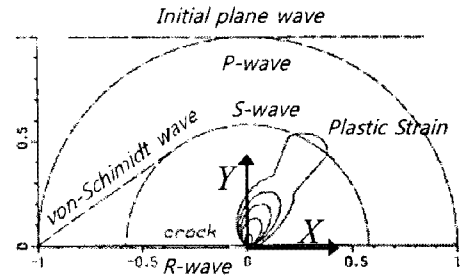


Fig.1 Elasto-plastic stress waves in a cracked solid subjected to Heaviside pulse load.

위의 식(10)을 수치 적분하기 위하여 내연적분지-쿠타 방법(implicit Runge-Kutta method)의 2-stage Lobatto IIIA 를 적용하여 적분을 수행하였으며, 위의 식(10)의 마지막 적분항은 시간  $\tau=t$  에서  $d^p \Delta t=0$  이기 때문에 모든 변수는 시간  $\tau=t+\Delta t$  에서의 값으로 아래 식(11)와 같이 표현할 수 있다[1].

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{D}\Delta t - \frac{\Delta t}{2\mu} d^p \mathbf{a} + \frac{\Delta t^2}{4\mu} d^p \left( \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \left( \mathbf{D} - \frac{1}{2\mu} \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{D}}{3\mu + H} \mathbf{a} \right) \right) \quad (11)$$

### 4. 탄소성 응력파 전파의 수치 해석

2차원 평면 변형률 조건의 균열을 가진 탄성체에 충격하중이 양 끝단에 부과되면 응력파가 균열부로 전파되고, 균열부에 도달한 응력파는 균열선단으로부터 반사가 되어 응력파가 주위로 전파된다. 이 때 평면 변형률 조건으로 가정하면 Fig.1 과 같이 P-파, S-파, von-Shimidt 파(von-Shimidt wave) 그리고 R-파(Rayleigh wave)가 발생하여 균열선단으로부터 주위로 전파된다. 이 때 P-파의 전파속도가 가장 빠르며 그 뒤를 따라 S-파가 전파되고, 균열의 자유면을 따라 P-파와 S-파 사이에 von-Shimidt 파가 발생한다. 또한 표면파의 하나인 R-파는 균열선단으로부터 자유면을 따라 전파되며 이와 같은 표면파는 자유면에서의 진폭이 가장 크고 탄성체 내부로 들어감에 따라 감소하는 것으로 알려져 있다. 또한 Fig.1과 같이 균열선단으로부터 소성변형이 발생하여 전파된다.

이와 같은 탄소성 응력파의 전파를 수치해석하기 위하여 Fig.2(b)와 같이 경계조건을 부과하였고 유한요소를 모델링하였다. 또한 속도는  $V_0=35\text{m/s}$  로 일정하게 부과하였다. 요소의 개수는 가로와

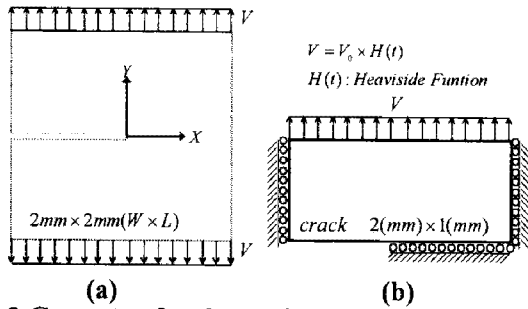


Fig.2 Geometry for the mode I semi-infinite crack problem subjected to Heaviside pulse load: (a) a cracked solid in plane strain condition; (b) boundary conditions and symmetric model for finite element analysis.

세로로 각각 100x50 개로 모델링하였고 물성치는 식(12)와 같이 변형률 속도와 온도 의존 모델인 Johnson-Cook 모델을 사용하였다[3]. 그리고 변형률 공간에서의 수식화를 이용한 구성방정식 적분법은 연속 갤러킨방법과 시간 불연속 변분적분기에 모두 적용하였고 그 결과를 비교하였다.

$$E = 200\text{GPa}, r = 7,800\text{kg/m}^3, n = 0.3, c = 477\text{J/kgK}$$

$$\bar{\sigma} = (1.579 + 0.479e^{0.18})(1 + 0.012 \ln \frac{1}{1 - T^*}) [\text{GPa}] \quad (12)$$

where,

$$T^* = (T - T_r) / (T_m - T_r), T_r = 25^\circ\text{C}, T_m = 1763^\circ\text{C}$$

Fig.3과 Fig.4는 각각 연속 갤러킨방법과 제한기의 값이 0.003인 시간 불연속 변분적분기에 의한 최대전단응력과 유효소성변형률의 분포를 보여준다. 응력파가 균열선단에 도달하면 반사파가 발생하고 P-파, S-파, von-Shimidt 파 그리고 R-파가 발생하는 것을 알 수 있다. 또한 균열선단으로부터 유효소성변형률이 발생하여 S-파의 파두와 같이 전파되는 것을 알 수 있다. Fig.3(a)와 Fig.4(a)는 각각 연속 갤러킨방법에 의한 결과로서 진동 현상이 매우 심하게 발생하는 것을 알 수 있다.

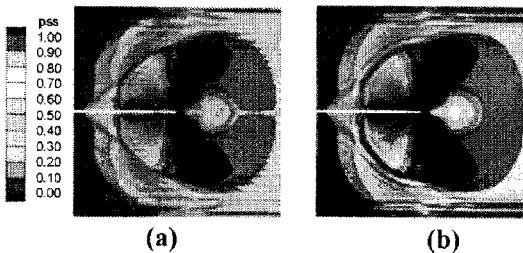


Fig.3 Comparison of the maximum shear stress (unit: GPa) around the crack tip: (a) a continuous Galerkin method; (b) a proposed method.

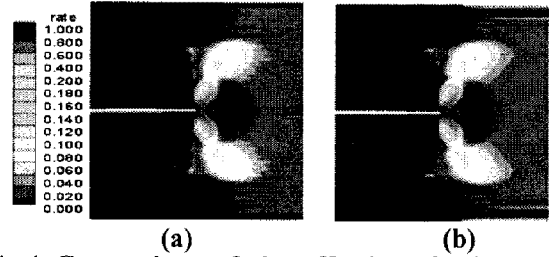


Fig.4 Comparison of the effective plastic strain rates (unit:  $1/\mu\text{s}$ ) around the crack tip: (a) a continuous Galerkin method; (b) a proposed method.

반면 Fig.3(b)와 Fig.4(b)와 같이 시간 불연속 변분적분기의 결과에서는 분산오차의 하나인 진동 현상이 거의 제거되었으며, 4가지 응력파도 보다 쉽게 구분되는 것을 확인할 수 있다.

## 5. 결론

본 연구에서는 균열을 포함하는 고체 내에 탄소성 응력파가 전파될 때 응력파 선단에서 발생하는 수치분산 및 소산오차의 감소와 변형률속도 및 온도에 의존하는 구성방정식의 적분을 위하여 시간 불연속 변분적분기와 변형률 공간에서의 수식화를 이용하였다.

연속 갤러킨방법의 결과에서는 응력파와 유효소성변형률속도가 분산 및 소산오차에 의하여 심하게 진동하는 반면, 시간 불연속 변분적분기에서는 수치오차가 감소되어 진동현상이 획기적으로 감소하였고 응력파의 분해능이 증가하였다.

## 참고 문헌

- [1] S. S. Cho and H. Huh, Modified Integration Algorithm in the Strain Space for Rate and Temperature Dependent Elasto-Plastic Constitutive Model, Int. J. of Modern Physics B, Vol. 22, No.9-11, pp.1243~1248, 2008.
- [2] 조상순, 허 훈, 해밀토니안의 시간 불연속 변분적분기를 이용한 탄소성 응력파 해석, 한국소성가공학회 춘계학술대회, Vol. 3, pp. 1608~1613, 2008.
- [3] G. R. Johnson and W. H. Cook, A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures, Proceedings of the Seventh International Symposium on Ballistics, The Hague, Netherlands, pp. 541~547, 1983.