

하중전이를 고려한 앵커보강사면의 안정해석

Stability Analysis of Anchored Slope Considering Load Transfer

김낙경¹⁾, Nak-Kyung Kim, 윤승권²⁾, Seung-Kwon Yun, 김성규³⁾, Sung-Kyu Kim, 주용선⁴⁾, Yong-Sun Joo, 박종식⁵⁾, Jong-Sik Park

- 1) 성균관대학교 건설환경시스템공학과 부교수, Professor, Dept. of Civil & Environmental Engineering, Sungkyunkwan Univ.
- 2) 성균관대학교 건설환경시스템공학과 석사과정, Graduate student, Dept. of Civil & Environmental Engineering, Sungkyunkwan Univ.
- 3) 성균관대학교 건설환경시스템공학과 박사과정, Graduate student, Dept. of Civil & Environmental Engineering, Sungkyunkwan Univ.
- 4) 성균관대학교 건설환경시스템공학과 박사과정, Graduate student, Dept. of Civil & Environmental Engineering, Sungkyunkwan Univ.
- 5) 한화건설 기술연구소 토목연구팀 선임연구원, Senior Researcher, Hanwha Institute of Construction Technology, Hanwha E&C Co, Ltd.

SYNOPSIS : The limit equilibrium method and finite element method have been commonly used to assess the stability of anchored slope. However, the existing limit equilibrium methods do not consider the load transfer of anchor and, if the potential failure surface crosses the bonded zone of anchors, the anchor loads are not included in computing the factor of safety.

In this paper, simplified bishop method, one among several methods based on the limit equilibrium is used to develop the Excel Sheet program and the working load of anchor along the failure surface is calculated by Flamant's formula, proposed by Morlier and Tenier(1982). Additionally, the finite element analysis of anchored slope considering the load transfer is performed in order to compare with the result from the limit equilibrium analysis and analyze the reinforced effect of anchor.

From this study, new modelling method that limits the reinforcing range and considers the load transfer is proposed and Excel Sheet program is developed. The factor of safety for several cases between PC STABL and Excel Sheet program is also compared for verification of the program.

Keywords : Load Transfer, Anchored Slope, Flamant's Formula, Excel Sheet Program

1. 서론

사면의 안정성을 평가하기 위해서는 한계평형법(LEM) 또는 유한요소법(FEM)을 이용하여 수행할 수 있으며 한계평형법을 이용한 안정해석 및 설계가 보편적으로 널리 사용된다. 본 논문에서는 한계평형법을 이용한 앵커보강사면의 안정해석시 임의의 파괴면에 작용하는 앵커하중은 Morlier and Tenier(1982)에 의해 제안된 Flamant's Formula를 이용하여 산정하였다. 그러나 기존의 해석법은 앵커의 하중전이(Load Transfer)를 고려하지 않고 있으며 파괴면이 앵커의 정착장을 통과하게 되는 경우 앵커하중을 무시하는 보수적인 해석을 수행하고 있다. 따라서, 본 논문에서는 지중에 수직으로 설치된 앵커에 대한

유한요소해석을 통해 얻은 결과를 바탕으로 하중전이를 고려한 앵커보강사면의 해석 모델링을 제안하였다. 또한, 제안된 모델링을 반영한 Excel Sheet 프로그램을 개발하였으며 여러 가지 사례에 대해서 기존의 상용 프로그램인 PC STABL과 안전율을 비교하였다.

2. 하중전이를 고려한 앵커보강사면의 해석 모델링

2.1 사면의 파괴면에 작용하는 앵커 하중 분포

앵커로 보강된 사면안정 해석의 문제점은 앵커의 다양한 하중전이 분포를 무시하여 보수적으로 해석을 실시하고 있다는 것이다. 따라서 보다 정밀한 해석을 위하여 앵커의 하중전이 분포의 특성이 고려되어야 하며 앵커의 정착장에 작용하는 하중의 크기에 따라 아래 그림 2. 1에서와 같이 활동면에 연직력의 크기가 변하는 것을 고려하여야 한다. 이러한 연직력의 변화는 파괴면에서의 전단강도에 영향을 미치므로 사면의 안정성 해석에 중요한 역할을 한다.

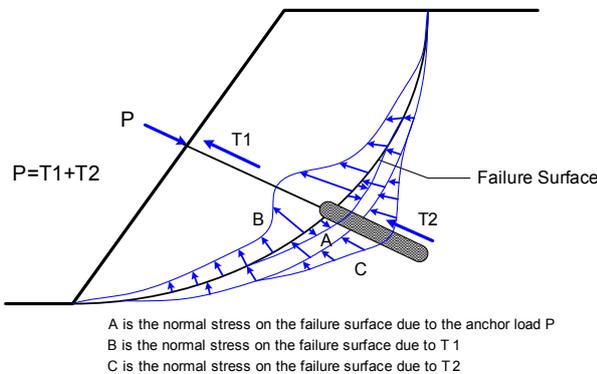


그림 2.1 앵커의 하중으로 인한 활동면의 응력

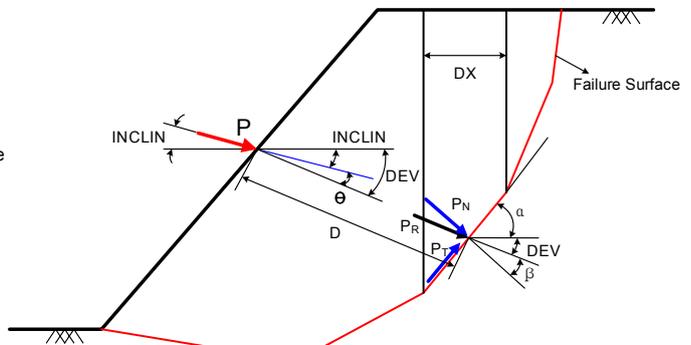


그림 2.2 파괴면에 작용하는 앵커하중(Morlier and Tenier, 1982)

2.2 기존의 모델링과 문제점

파괴면에 작용하는 앵커하중의 분포의 기존 모델링은 Morlier and Tenier(1982)에 의해 제안된 Flamant's Formula에 의해 식 (2. 1)과 같이 원호응력으로 계산하여 슬라이스 전체에 분배하는 방법으로 수행할 수 있다.

$$\sigma_r = \frac{2P \cos \theta}{\pi D} \quad (2.1)$$

하지만 Flamant's Formula에 의한 모델링은 두 가지의 문제점을 안고 있다. 첫 번째 문제점은 앵커의 정착장을 무시하고 있다는 점이다. 앵커의 자유장만을 유효길이라고 해서 해석에 반영하기 때문에 파괴면이 정착장을 통과하는 경우 정착장 내의 하중전이 효과를 고려하지 않는 보수적인 해석을 수행한다.

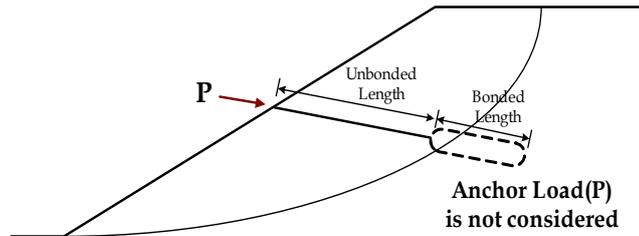


그림 2.3 파괴면이 정착장 통과시 앵커하중 무시

또 다른 문제점은 파괴면에 대한 앵커하중의 보강효과가 사면 정상 부근에서 지나치게 크다는 점이다. 이러한 결과는 Flamant 공식의 변수들을 개별로 분석해보면 보강범위에서 기인하는 것임을 알 수 있다. 식 (2. 1)의 원호응력 공식에서 고정값인 P , π 를 제외하고 나머지 변수들을 포인트별로 나타내면 사면의 하단과 정상 지점의 D 의 차이는 크지 않으나 θ 에서 차이가 발생하는 것을 알 수 있다.

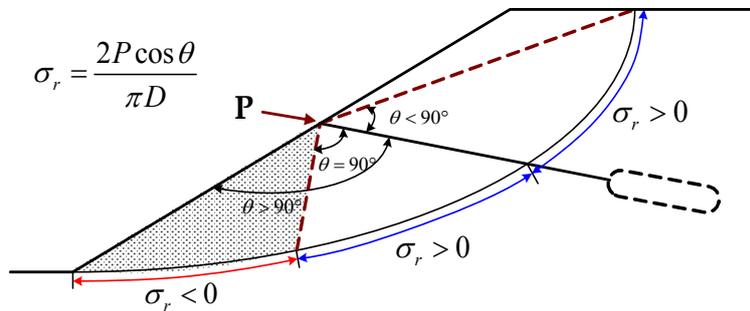


그림 2.4 각 θ 에 따른 원호응력 변화

또한, 앵커보강사면에 대해서 유한요소해석을 실시하여 동일한 파괴면에서의 연직응력(Normal Stress)를 비교하면 사면 정상부근에서 차이가 발생하는 것을 확인할 수 있다. 앵커보강사면의 유한요소해석은 그림 와 같은 모델링을 통해 수행되었으며 지반모델은 2차원 평면변형률 조건으로 Mohr-Coulomb 파괴규준을 적용한 탄소성 모델을 사용하였고 해석에 사용된 지반정수는 표 2. 1과 같다.

앵커는 평면변형률 조건으로 트리스(truss) 요소로 모사하였으며 하중은 지표면에 설치된 블록에 집중하중으로 재하하고 앵커의 정착장내 하중전이를 고려하기 위해 정착장 구간내 일정하게 하중이 작용하는 것으로 가정하였다.

앵커의 작용하중은 100KN이며 앵커 단면적은 $0.0029m^2$, 탄성계수는 $2.1 \times 10^7 KN/m^2$ 이며 앵커 자유장은 스프링(spring)으로 모사하였으며 스프링 계수(K)는 식 (2. 2)와 같이 계산된다.

$$F = K\delta = \left(\frac{AE}{L_u}\right)\delta$$

여기서, F =앵커 정착하중

L_u =앵커 자유장

A =긴장재 단면적

E =긴장재 탄성계수

K =긴장재 스프링계수

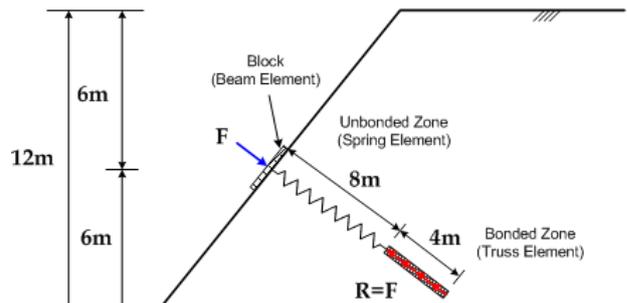


그림 2.5 앵커보강사면의 모델링 개요도

(2. 2)

γ (KN/m ³)	ϕ (°)	c (Kpa)	E_s (Kpa)	ψ (°)	ν
20.0	30.0	15.0	10^5	0.0	0.3

표 2.1 유한요소해석에 사용된 지반정수

앵커블록은 1×1×0.3m로 평면변형률 조건의 빔(Beam)요소로 모델링 하였다. 블록은 선형탄성이며 탄성계수 및 포아송비는 $2.1 \times 10^7 \text{KN/m}^2$, 0.2이다. 앵커와 지반사이의 경계면 요소는 사용하지 않았고 일체화 거동하는 것으로 모사하였다. 앵커보강사면의 유한요소해석은 다음과 같은 5단계로 해석을 수행하였다.

- 1) 초기응력조건 설정
- 2) Step 1 : 중력재하
- 3) Step 2 : 앵커 및 블록 생성
- 4) Step 3 : 앵커 정착장과 블록에 집중하중 재하
- 5) Step 4 : 자유장 생성
- 6) Step 5 : 지표면의 경계조건 제거

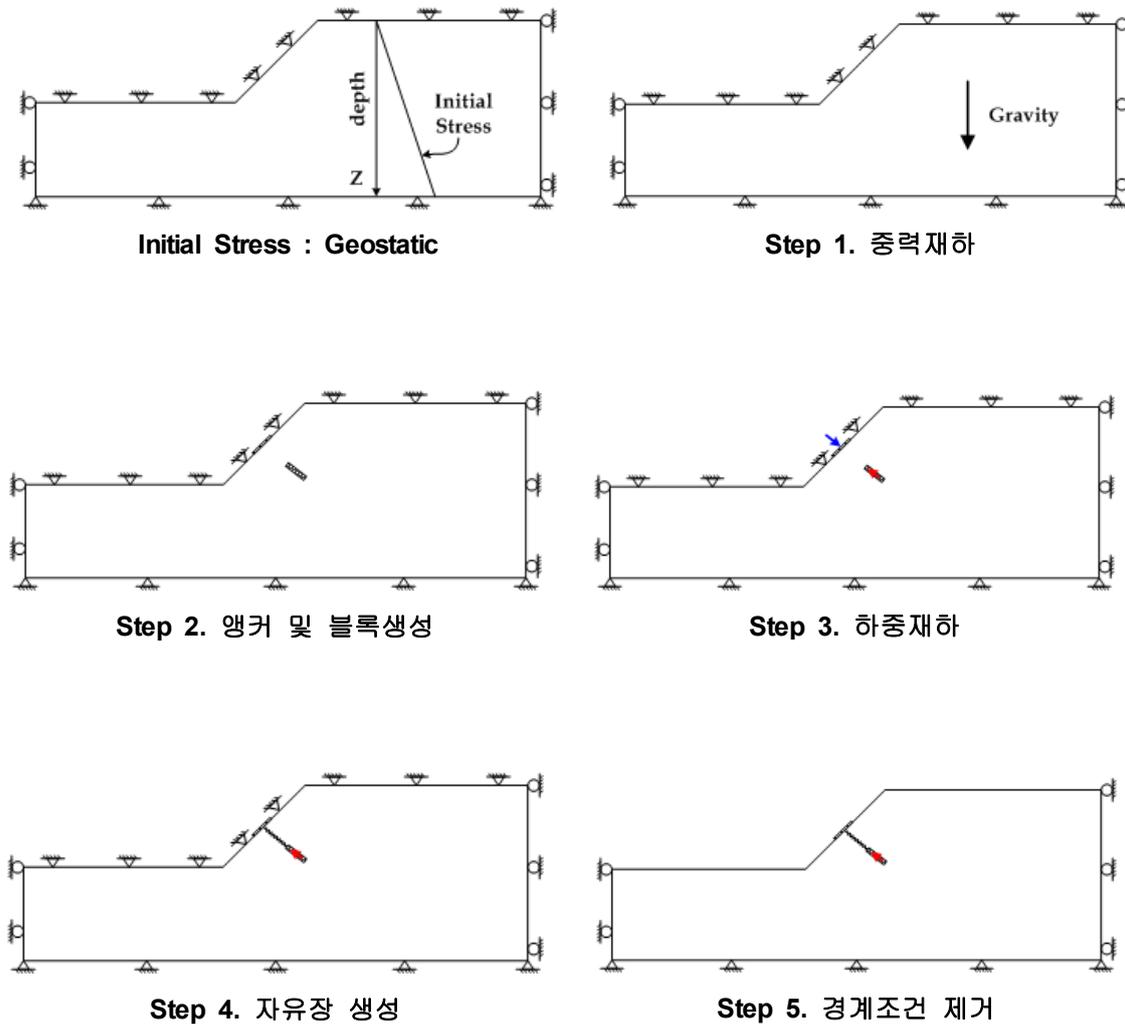


그림 2.6 앵커보강사면의 유한요소해석 절차

앵커하중으로 유발된 연직응력의 증감을 동일한 파괴면을 대상으로 21개의 기점을 기준으로 산정하여 비교, 분석한 결과 FEM에 의하면 사면 정상 부근에 가까워질수록 감소하는 것을 알 수 있으나 Flamant공식에 의해 산정된 값은 크게 나타나는 차이점을 확인할 수 있다.

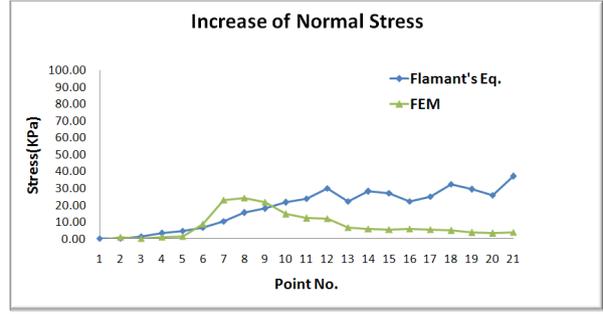
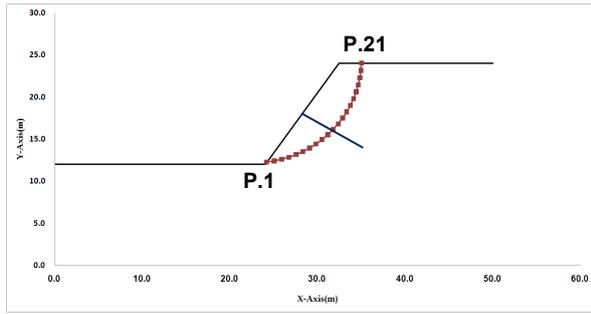


그림 2.7 임의의 파괴면(좌)과 연직응력증감 분포도(우)

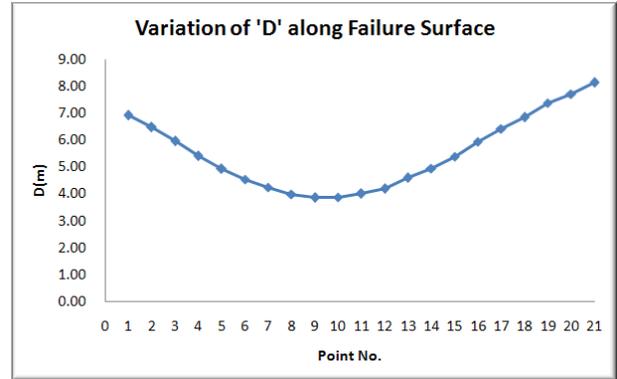
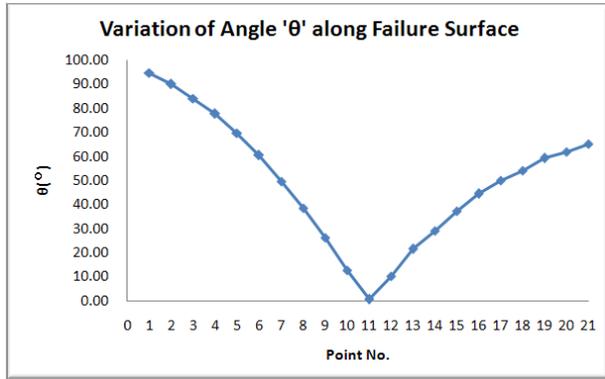


그림 2.8 원호응력공식에서 매개변수의 변화

2.3 앵커의 하중전이를 고려한 해석 모델링 제안

2.3.1 앵커하중에 의한 보강 범위

앵커의 하중전이를 고려한 해석 모델링을 제안하기 위해 지중내에 수직으로 설치된 앵커를 대상으로 유한요소해석을 실시하였다. 앵커하중으로 인한 수직응력 변화와 정착장내 하중전이를 고려하기 위하여 ① 보강전 지중응력을 구현한 상태 ② 앵커에 집중하중만을 재하한 상태 ③ 정착장내 하중을 재하하여 하중전이를 고려한 상태의 3가지 경우에 대한 해석을 실시하고 앵커가 설치된 중심선을 기준으로 횡방향과 종방향으로 각 1m단위의 지점에서 수직응력의 변화를 분석하였다. 해석을 위해 사용된 지반정수와 앵커정수는 표 2. 2와 같다.

γ (KN/m^3)	ϕ ($^\circ$)	c (Kpa)	E_s (Kpa)	ψ ($^\circ$)	ν
20.0	Variable	15.0	10^5	0	0.3

표 2.2 유한요소해석에 사용된 지반정수

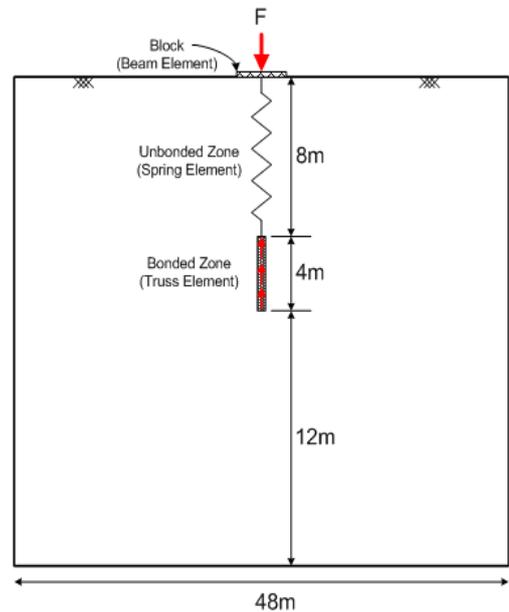


그림 2.9 유한요소해석 모델링(수직앵커)

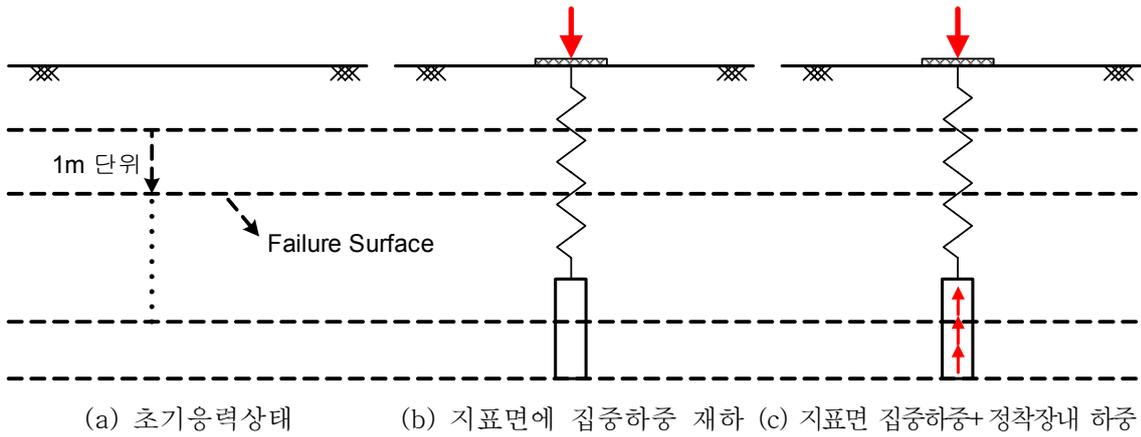


그림 2.10 가정된 파괴면에 대한 연직응력 증감 확인

그림 2. 10과 같이 (a), (b), (c)에 대해서 각각 연직응력의 분포를 확인하여 증감을 나타내면 그림 2. 11와 같이 앵커가 설치된 중심선에서 최대가 되고 횡방향으로 멀어질수록 그 크기는 감소하게 된다.

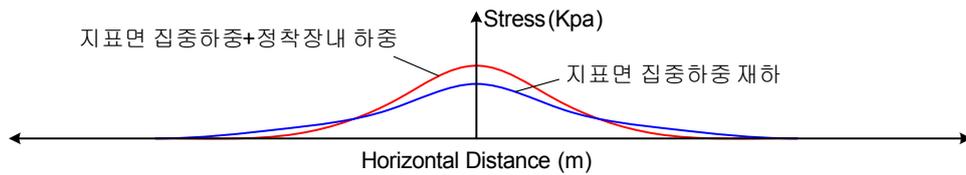


그림 2.11 임의의 깊이에서 연직응력 증감 분포도

따라서 적절한 보강범위를 설정하기 위해 앵커가 설치된 중심점에서의 수직응력 증가량($\Delta\sigma_n$)의 10%에 해당하는 $0.1\Delta\sigma_n$ 범위까지의 거리를 깊이 1m 단위별로 확인하여 마찰각에 따른 거리의 변화를 비교한 결과 ϕ 값이 커질수록 수직응력이 증가되는 범위는 상대적으로 줄어드는 것을 확인할 수 있다. 그리고 그 범위는 선형적으로 단순화 시켜 앵커가 설치되어 있는 중심선으로부터 대략 $45-\phi/2$ 의 범위로 제한하였다. 또한, 정착장 내에 작용하는 하중으로 인해 정착장에 가까운 자유장 영역에서는 수직응력이 증가하고 정착장 내의 영역에서는 수직응력의 증가량이 감소하는 것을 확인할 수 있다.

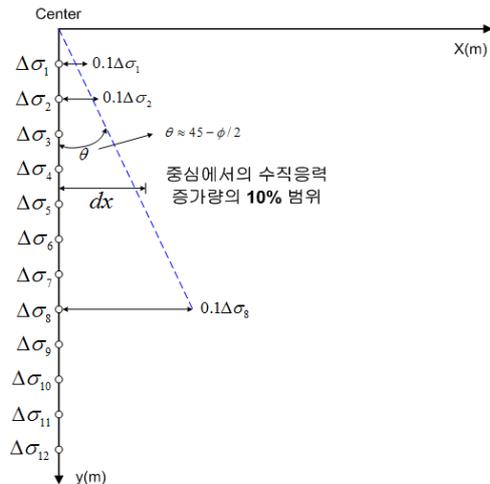


그림 2.12 보강범위 산정방법

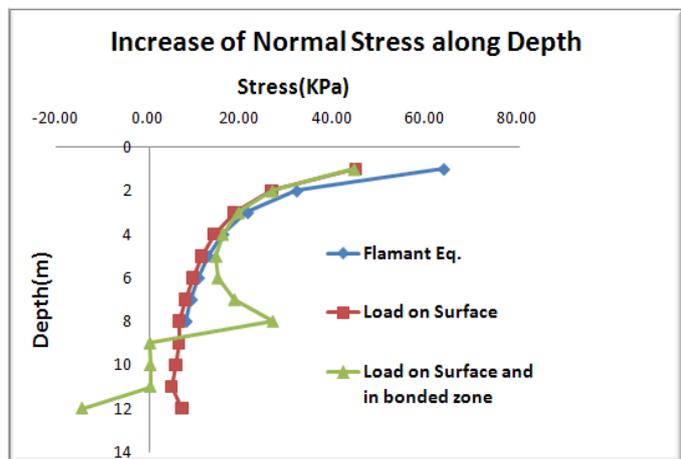
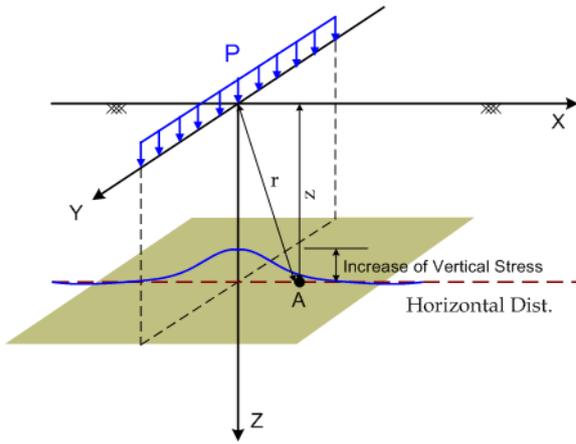


그림 2.13 깊이별 수직응력의 증가(center 기준)

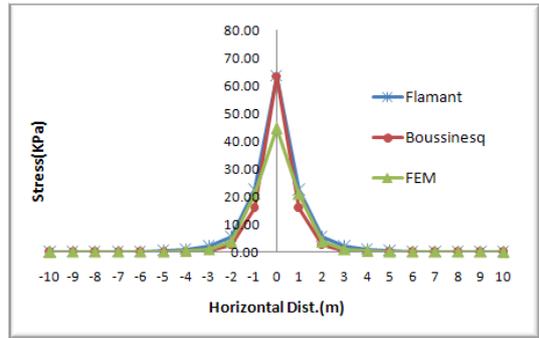
2.3.2 앵커하중에 의한 보강력

앵커하중에 의한 보강력에 대한 모델링을 위해 지표면에 선하중(Line Loading)을 작용하여 Flamant, Boussinesq, FEM 결과를 깊이별로 비교하였다. 선하중 P에 의하여 점 A에서 발생하는 연직응력을 구하기 위한 Boussinesq(1883) 해는 다음과 같다.

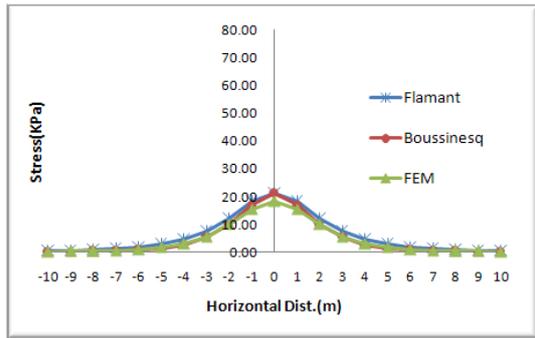
$$\sigma_z = \frac{2P}{\pi} \frac{z^3}{r^4} \quad (2.3)$$



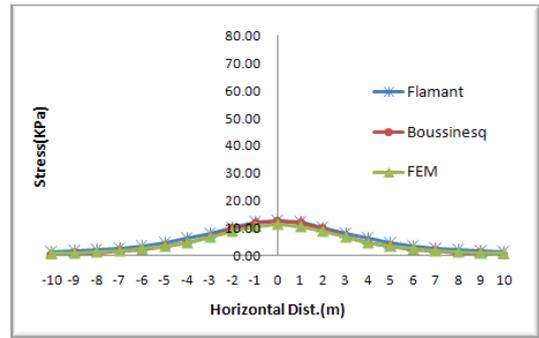
(a) 지표면에 작용하는 선하중



(b) 깊이 1m지점에서의 연직응력 증가



(c) 깊이 3m지점에서의 연직응력 증가



(d) 깊이 5m지점에서의 연직응력 증가

그림 2. 14 지표면에 작용하는 선하중으로 인한 연직응력 증가 비교

지표면에 작용하는 선하중으로 인한 깊이별 연직응력 증가량을 비교해보면 하중이 작용하는 지표면과 근접한 깊이에서는 연직응력 증가량이 Boussinesq와 Flamant값이 거의 일치하지만 FEM값은 다소 작게 나타나고 깊이가 깊어질수록 거의 유사하게 나타남을 알 수 있다.

2.3.3 해석 모델링 제안

이러한 결과를 바탕으로 앵커의 정착장내의 하중전이를 고려하기 위해 다음과 같은 사항을 제안하였다. 정착장내의 하중으로 인한 수직응력 증가분은 앵커두부에 가해지는 하중으로 인한 보강원리와 동일하게 적용한다. 즉, 원호응력 공식을 이용하여 슬라이스에 분배하여 작용하도록 반영한다. 또한, 정착장내의 하중으로 인한 보강범위 또한 정착장의 가운데 지점을 기준으로 $45-\phi/2$ 의 범위로 제한한다.

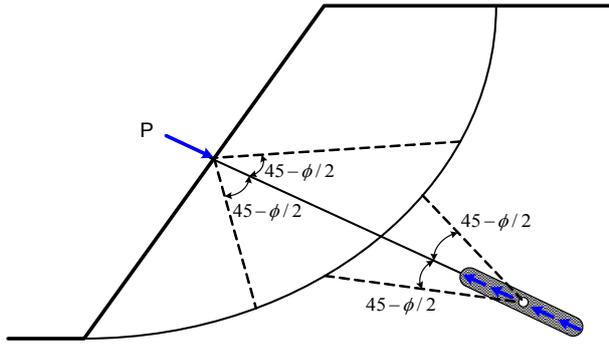


그림 2.15 앵커하중의 보강범위 설정

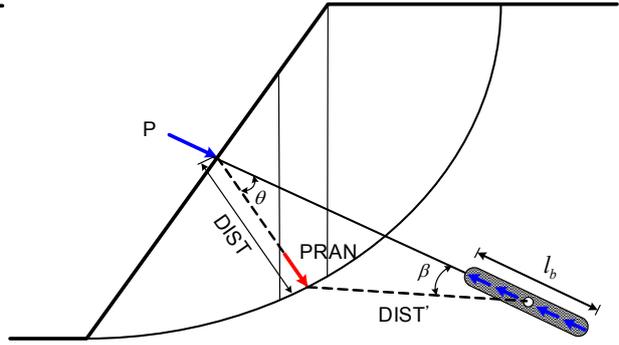


그림 2.16 하중전이를 고려한 보강원리 개요도

따라서, 파괴면을 따라 작용하는 원호응력 공식은 다음과 같이 표현된다.

$$\sigma_r = \frac{2P\cos\theta}{\pi D} + \frac{2P\cos\beta}{\pi D'} \quad (2.4)$$

여기서,

l_b = 정착장 길이

β = 정착장 중심점으로부터 슬라이스 바닥 중점을 잇는 선과 앵커가 설치된 선의 사잇각

D' = 정착장 중심점으로부터 슬라이스 바닥 중심점간의 거리

$\theta, \beta \leq 45 - \phi/2$

반면에, 가정된 파괴면이 정착장을 통과하게 되는 경우 앵커의 부분하중이 작용하도록 반영하였으며 정착장 전체 길이(l_b)에 대한 파괴면 바깥쪽 부분의 길이 b 만큼의 비의 하중이 작용하는 것으로 다음의 식 (2.5)을 통해 산정할 수 있다.

$$\sigma_r = \frac{2(P*b/l_b)\cos\theta}{\pi D} \quad (2.5)$$

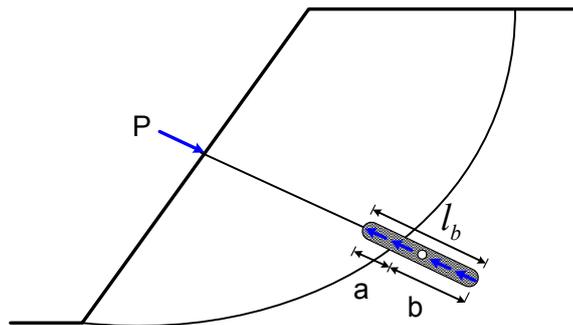


그림 2.17 파괴면이 정착장을 통과할 경우

3. 프로그램 개발 및 사례 분석

본 연구를 수행하기 위해 개발한 Excel Sheet 프로그램은 한계평형법을 이용한 2차원 사면안정해석 프로그램으로 앞절에서 제안된 해석 모델링을 반영하여 제작 되었으며 무보강사면 또는 인장형 앵커의 보강사면을 대상으로 Bishop의 간편법을 이용하여 안전율을 계산한다.

사례 분석을 위해 여러 가지 사례에 대해서 Excel Sheet 프로그램의 모델인 PC STABL에서 먼저

해석을 수행한 다음 해석결과 Output Data를 바탕으로 Excel Sheet 프로그램에서 안전율을 계산하고 값을 비교하였다. 각 사례별로 동일한 파괴면을 기준으로 안전율을 비교하였으며 프로그램 검증을 위한 비교, 분석 절차는 다음과 같다.

Slope Stability Analysis with Method of Slice															
Analysis Type : Simplified Bishop Method															
===== Define Geometry Information =====															
External Boundary					Soil Layer Profile					Ground Water Level					
Point No.	Left End		Right End		Profile No.	Point No.	Left End		Right End		Point No.	Left End		Right End	
	X	Y	X	Y			X	Y	X	Y		X	Y	X	Y
1	0.0	20.0	20.0	20.0		1									
2	20.0	20.0	30.0	30.0		2									
3	30.0	30.0	30.0	30.0	Layer-1	3									
4						4									
5						5									
6						1									
7						2									
8					Layer-2	3									
9						4									
10						5									
11						1									
12						2									
13					Layer-3	3									
14						4									
15						5									
16						1									
17						2									
18					Layer-4	3									
19						4									
20						5									

그림 3. 1 Excel Sheet 프로그램(일부)

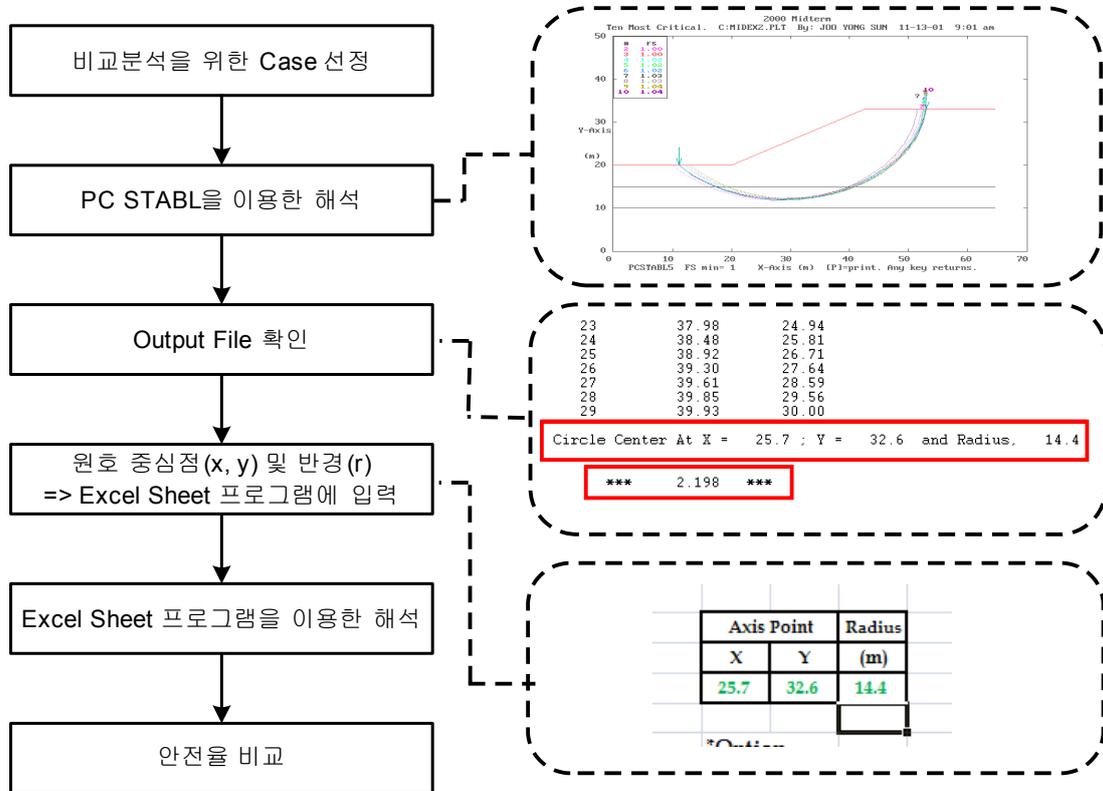


그림 3. 2 사례 분석을 위한 비교 분석 절차

해석을 위해 사용된 대상사면은 단일토층이고 토질정수는 $\gamma = 20\text{KN/m}^3$, $\phi = 30^\circ$, $c=15\text{Kpa}$ 이다. 사면고(H)는 10m로 일정하고 사면의 경사각은 30, 45, 60°로 구분하였다. 또한, 사면에 앵커 1개를 보강하고 앵커하중 100KN, 앵커 총길이(Total Length) 12m, 자유장(Unbonded Length)과 정착장(Bonded Length), 앵커 설치각은 사례별로 가정하여 안전율을 계산, 비교하였다.

Soil Properties			Anchor Properties				
$\gamma(KN/m^3)$	$\phi(^{\circ})$	$c(KPa)$	P(KN)	Total Length(m)	Unbonded Length(m)	Bonded Length(m)	Inclin.($^{\circ}$)
20	30	15	100	12	variable	variable	variable

표 3. 1 해석에 사용된 토질 및 앵커 정수

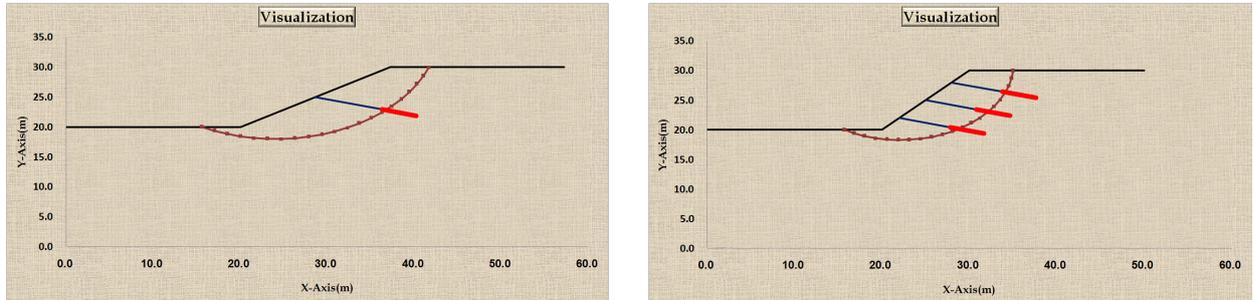


그림 3. 3 사례별 안정해석 및 안전율 비교(그래픽 출력)

각 사례별로 안전율을 비교한 결과는 표 3. 2에 종합하였다. 전체적으로 Excel Sheet 프로그램을 이용한 해석결과의 안전율이 높게 나타나는 것을 알 수 있는데 이는 PC STABL에서는 앵커의 정착장 길이를 해석에 반영하지 않아 파괴면이 자유장 밖으로 형성되면 보강효과가 없는 것으로 해석되지만 Excel Sheet 프로그램은 앵커의 정착장을 해석에 반영하기 때문에 파괴면이 정착장을 통과하게 되는 경우에도 앵커하중이 부분적으로 작용하기 때문에 안전율이 높게 나타난다. 또한 Excel Sheet 프로그램은 앵커의 하중전이 효과를 고려하기 때문에 상대적으로 안전율이 높게 나타나는 것을 알 수 있다.

	사례	PC STABL	Excel Sheet
1	사면 경사각에 따른 비교 (정착장 8m, 자유장 4m)	30 $^{\circ}$	2.162
		45 $^{\circ}$	1.689
		60 $^{\circ}$	1.463
2	앵커 설치각에 따른 비교 (정착장 8m, 자유장 4m, 사면경사각 45 $^{\circ}$)	0 $^{\circ}$	1.696
		10 $^{\circ}$	1.696
		20 $^{\circ}$	1.681
		30 $^{\circ}$	1.661
3	앵커 자유장 길이에 따른 비교 (총 길이 12m 유지)	1m	1.448
		2m	1.448
		3m	1.448
		4m	1.448
		5m	1.525
		6m	1.689
		7m	1.689
		8m	1.689
4	앵커 개수 다수일 경우 비교 (앵커 3개 설치)	자유장 4m	1.525
		자유장 6m	1.828
		자유장 8m	2.006

표 3. 2 각 사례별 안전율

4. 결론

본 논문에서는 하중전이를 고려한 앵커보강사면의 안정 해석을 위한 프로그램을 개발을 위해 사면의 파괴면에 작용하는 앵커하중의 분포를 Flamant의 이론을 적용한 모델링의 문제점을 분석하여 새로운 해석 모델링을 제안하였다. 하중전이의 영향과 앵커하중으로 인한 보강범위를 분석하기 위해 지중에 수직앵커를 설치하고 앵커가 설치된 지점의 지표면과 정착장내에 하중을 재하하도록 모델링을 하여 유한요소해석을 실시하였다. 앵커하중의 크기는 Flamant이론에 의한 원호력 공식을 적용하였으며 앵커하중으로 인한 유효 보강범위는 앵커를 따라 깊이별 응력증가량의 10% 범위로 가정하고 이를 단순화시켜 앵커의 설치각을 기준으로 $\pm 45 - \phi/2$ 의 범위로 제한하였다. 또한, 가정된 파괴면이 앵커의 정착장을 통과하게 되는 경우 정착장 전체 길이에 대한 파괴면 밖으로 형성된 길이의 비로서 앵커의 부분하중이 작용할 수 있도록 프로그램을 제작하였다.

사례 분석을 위해 여러 가지 사례에 대해서 PC STABL과 Excel Sheet 프로그램을 이용하여 해석을 수행하고 동일한 파괴면에 대해서 안전율을 비교한 결과 PC STABL은 정착장을 무시하기 때문에 보수적으로 해석이 수행되지만 Excel Sheet 프로그램은 정착장을 해석에 반영하여 하중전이 효과를 고려하기 때문에 Excel Sheet 프로그램의 안전율이 다소 높게 나타났다.

참고문헌

1. 김낙경(2001), "인장형 앵커와 압축형 앵커의 하중전이에 관한 연구", 한국지반공학회지, 제 17권, 3호, pp. 59~68
2. 김성규(2001), "압축형 그라운드 앵커의 하중전이에 관한 연구", 성균관대학교 석사학위 논문
3. 김성규(2008), "앵커보강사면에서 안정해석시 하중전이의 영향", 한국지반공학회 봄학술발표회
4. James R. Carpenter, "Analysis of Tieback Slopes and Walls Using STABL5 and PCSTABL5", Transportation Research Record
5. P. Tenier and P. Morlier(1982). Influence des surcharges concentrées sur la stabilité des talus. (Influence of Concentrated Loads on Slope Stability.) Canadian Geotechnical Journal, Vol. 19, Feb. 1982, pp. 396-400
6. Fei Cai and Keizo Ugai(2003), "Reinforcing mechanism of anchors in slopes : a numerical comparison of results of LEM and FEM", International Journal For Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, v.27, pp. 549-564
7. J. Michael Duncan Stephen G. Wright(2005), "Soil Strength and Slope Stability", John Wiley&Sons, Inc., Hoboken, New Jersey
8. Weatheby, D. E.(1998), "Design Manual for Permanent Ground Anchor Walls", Report No. FHWA-RD-97-130
9. Bishop, A. W.(1955), "The Use of Slip Circle in the Stability Analysis of Earth Slopes", Geotechnique, Vol. 5, No. 1, pp.7-17
10. Karl Terzaghi, Ralph B. Peck and Gholamreza Mesri(1996), "Soil Mechanics in Engineering Practice, 3rd edition", Wiley, New York.
11. PC STABL4M User Guide, U.S Department of Transportation
12. James Michael Duncan(1996), "State of The Art : Limit Equilibrium and Finite-Element Analysis of Slopes", Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 122, No. 7, pp. 577~596
13. Kim Nak Kyung(1994), "A Beam-Column Method For Tieback Walls", the thesis of Doctor of Philosophy Dissertation, Texas A&M Univ.
14. AASHTO(1990), "Permanent Ground Anchor Specification In-Situ Soil Improvement

- Technique", AASHTO-AGC-ARTBA TF27 Rep., AASHTO, Washington, D.C
15. ABAQUS, Version 6.5, Hibbit, Karlson&Sorensen Inc., Pawtucket, P.I., 2004.
 16. Briaud J.L., Lim. Y(1999), "Tieback Walls In Sand : Numerical Simulation and Design Implications", Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, Vol. 125, No. 2, pp 101-110
 17. BSI(1989), "British Standard Code of Practice for Ground Anchors", London, England
 18. Frelund, D.G&Krahn. J.(1977), "Comparison of Slope Stability Method of Analysis", Canadian Geotechnical Journal, Vol. 95, SM5, pp. 429-439
 19. Griffiths, D.V&Lane. P.A.(1999), "Slope Stability Analysis by Finite Elements", Geotechnique, Vol. 49, No. 3, pp. 387-403
 20. Weerasinghe R.B., Littlejohn G.S.(1977), "Load Transfer and Failure of Anchorages In Weak Mudstone", In: Proc., Conference on Ground Anchorages and Anchored Structures, Institution of Civil Engineers, London.
 21. Boussinesq, J.(1883), "Application des Potentials à L'Etude de L' Equilibre et du Mouvement des Solides Elastiques, Gauthier-Villars, Paris.
 22. Poulos, G.H., and Davis, E.H.(1974), "Elastic Solutions for Soil and Rock Mechanics", Wiley, New York.