한국해안·해양공학회 학술발표논문집 (2009)
2009년 11월 5일-11월 6일
제18권, pp. 53-56

흐름함수로 표현된 확장형 완경사방정식
Extended Mild-Slope Equation in Terms of Stream Function

김건우[1], 이창훈[2]
Gunwoo Kim[1], Changhoon Lee[2]

1. 서 론

파랑변형을 해석하기 위한 수치 모형은 1970년대부터 컴퓨터의 발달과 더불어 완경사방정식과 Boussinesq 방정식과 같은 수심적분 모형의 개발로 크게 발전하기 시작하였다. 이후 Massel (1993)은 고차의 수심변화 항, 즉 바닥의 곡률항과 바닥경사의 제곱항을 고려하여 바닥경사가 급하거나 수심이 급변하는 지역에도 정확한 결과를 얻을 수 있는 확장형 완경사방정식을 개발하였다. 지금까지 개발된 대부분의 완경사방정식과 확장형 완경사방정식은 속도포텐셜을 사용하여 유도되었다. 최근에 Kim and Bai(2004)가 Hamilton 이론을 이용하여 흐름함수로 표현된 확장형 완경사방정식을 최초로 유도한 바 있다..

본 연구에서는 Green의 제2정리를 사용하여 흐름함수로 표현된 확장형 완경사방정식을 유도하고, Kim and Bai의 식과 비교하였다. 그리고, 경사면 위를 진행하는 파의 반사, 포물선형 마운드 위를 진행하는 파의 반사, 사련군에 의한 Bragg 반사의 경우에 수치 실험을 수행하여 본 연구에서 유도한 식의 정확성을 검증하였다.

2. 확장형 완경사 방정식

선형파 이론에서 흐름함수 $\psi(x,z,t)$는 다음과 같이 정의된다.

$$\psi(x,z,t) \equiv \int_{-h}^{z} u(x,z_0,t)dz_0 \qquad (1)$$

흐름함수로 표현된 지배방정식과 경계조건은 아래와 같다.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0, \qquad -h<z<0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{g}{\omega^2}\nabla(\nabla\cdot\psi)=0 \ \text{ on } \ z=0 \qquad (3)$$

$$\psi=0 \quad \text{on } \ z=-h \qquad (4)$$

변수심 위를 진행하는 파에 대해서, 소멸파 성분을 제외한 진행파 성분에 적용되는 흐름함수는 다음과 표현된다.

$$\psi=f\tilde{\psi}, \qquad f=\frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh} \qquad (5)$$

여기서 파수 k는 다음의 선형 분산관계식을 만족한다.

$$\omega^2=gk\tanh kh \qquad (6)$$

위 식에서 ω는 각주파수이다. 수심적분된 식을 구하기 위해서 다음과 같이 Green의 제2정리를 f와 ψ에 적용하였다.

$$\int_{-h}^{0}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}f-\psi\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)dz=\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}f-\psi\frac{\partial f}{\partial z}\right)_h^0 \qquad (7)$$

진행파에 대해서 정리하면 적분식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{C_g}{C}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\right)+k^2\frac{C_g}{C}\tilde{\psi} \qquad (8)$$
$$+\left(-\frac{\omega^2}{g}\int_{-h}^{0}f\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dz+\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_0\right)\tilde{\psi}=0$$

여기서, C와 C_g는 각각 파의 위상속도와 군속도이다. 식 (8)의 마지막 괄호 안의 항들은 수심변화를 표현하는 고차항이다. 위 식에서 $\partial f/\partial x$와 $\partial^2 f/\partial x^2$는 각각 다음과 같이 표현된다.

---

1 발표자: 한국해양연구원 연안개발· 에너지연구부 선임연구원
2 세종대학교 토목환경공학과 부교수

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{\partial f}{\partial h}+\frac{\partial f}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial h}\right)\frac{\partial h}{\partial x} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=&\left(\frac{\partial f}{\partial h}+\frac{\partial f}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial h}\right)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\\ &+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial h^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial h\partial k}\frac{\partial k}{\partial h}+\frac{\partial^2 f}{\partial k^2}\left(\frac{\partial k}{\partial h}\right)^2\right.\\ &\quad\left.+\frac{\partial f}{\partial k}\frac{\partial^2 k}{\partial h^2}\right]\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\end{aligned} \tag{10}$$

식 (9),(10)을 식 (8)에 대입하고 정리하면 다음과 같은 확장형 완경사방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{C_g}{C}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\right)+k^2\frac{C_g}{C}\tilde{\psi}\\ &+\left[S_c\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+S_s\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right]\tilde{\psi}=0\end{aligned} \tag{11}$$

여기서, S_c와 S_s는 각각 수심의 곡률항과 바닥경사의 제곱의 계수이고 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}S_c=&-\frac{\omega^2}{g}\frac{1}{\sinh^2 kh}\frac{1}{2}\{(-1+kh\coth kh)\\ &+\frac{1}{4(2kh+\sinh 2kh)}[\sinh 2kh-2kh\cosh 2kh\\ &\qquad -2kh\coth kh(2kh-\sinh 2kh)]\}\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}S_s=&-\frac{\omega^2}{g}\frac{k}{\sinh^2 kh}\langle\coth kh(1-kh\coth kh)\\ &+\frac{1}{2kh+\sinh 2kh}\times\\ &[1-5kh\coth kh-(kh)^2+4(kh)^2\coth^2 kh]\\ &+\frac{1}{6(2kh+\sinh 2kh)^2}[3\sinh 2kh-6kh\cosh 2kh\\ &\quad+6kh\coth kh(-\sinh 2kh+2kh\cosh 2kh)\\ &\quad+12(kh\coth kh)^2(2kh-\sinh 2kh)+8(kh)^3]\\ &+\frac{1}{2(2kh+\sinh 2kh)^2}\{1+\cosh 2kh\\ &\quad+\frac{2}{2kh+\sinh 2kh}(\sinh 2kh+kh-kh\cosh 2kh)\\ &\quad[-\sinh 2kh+2kh\cosh 2kh+2kh\coth kh\times\\ &\quad(2kh-\sinh 2kh)]\}\rangle\end{aligned} \tag{13}$$

식 (12)로 표현된 S_c는 Kim and Bai의 S_c와 일치하는 반면 식 (13)으로 표현된 S_s는 Kim and Bai의 S_s와 일치하지 않았다. 본 연구에서 유도한 식 (11)은 다음과 같이 속도포텐셜로 표현된 확장형 완경사방정식(Massel, 1993; Suh et al., 1997)과 비교할 수 있다.

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot(CC_g\nabla\tilde{\phi})+k^2CC_g\tilde{\phi}\\ &+[P_c\nabla^2 h+P_s(\nabla h)^2]\tilde{\phi}=0\end{aligned} \tag{14}$$

여기서 P_s와 P_c는 고차의 수심변화항이고, 수면에서의 속도포텐셜 $\tilde{\phi}$는 소멸파 성분을 무시하면 다음과 같이 정의된다.

$$\phi=\tilde{\phi}\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \tag{15}$$

3. 수치 실험

3.1 경사면에 의한 파의 반사

Booij(1983)의 경사면 실험은 수평 1차원의 경우 경사면 위로 파랑이 전파하는 현상을 모의하여 경사도에 따른 파랑의 반사율을 측정하는 것이다. 이 실험은 Booij가 완경사방정식의 적용한계를 구하기 위해서 사용한 이래로 파랑변형모형의 검증 예로 많이 사용되고 있다. 수심이 $h_1=0.6m$와 $h_2=0.2m$인 두 수평면 사이에 경사면을 두고 주기 $T=2s$의 선형파가 $0.6m$수심에서 출발하여 경사면을 지나가면서 발생한 반사율을 측정한다. 본 연구에서 유도한 식과 Kim and Bai(2004)의 식, 흐름함수에 대한 완경사방정식을 유한차분한 각각의 결과와 Laplace 식을 유한요소법을 사용한 해석 결과를 함께 비교하였다. Laplace 식의 결과는 엄밀해에 해당된다. 본 연구에서 유도한 식의 결과는 Laplace 방정식의 결과와 잘 일치하는 반면에, Kim and Bai의 식은 급경사에서 반사율이 더 크게 나왔다. 완경사방정식은 완경사에서도 오차를 보였다. 완경사방정식과 확장형 완경사바정식에서 나타난 오차는 속도포텐셜에 대해서 구한 결과(Suh et al., 1997; Lee et al., 1998; Lee et al., 2003)와 유사하다.

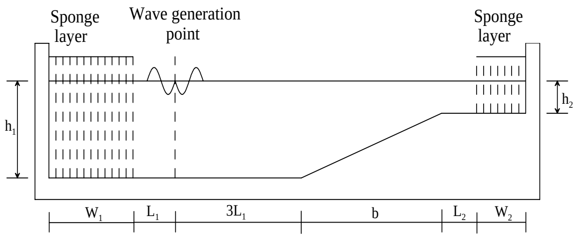

Fig. 1. computational domain for numerical test of waves propagating over a plane slope.

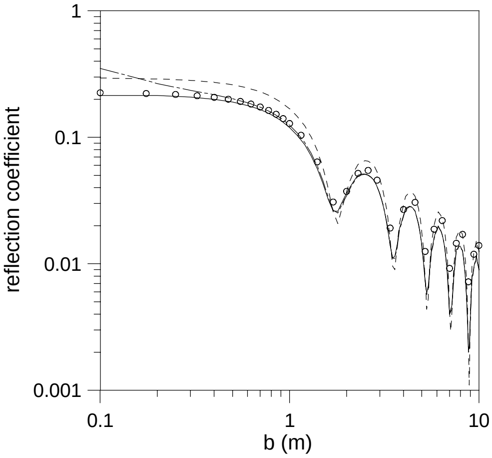

Fig. 2. Variation of reflection coefficients with slope width for Booij's (1983) planar slope; ——— = present equation, ○ = Laplace equation,---- = mild-slope equation in terms of stream function, -·-·- = Kim and Bai's (2004) equation.

3.2 포물선형 마운드에 의한 파의 반사

또한, 포물선 형태의 마운드를 지나는 선형파의 반사를 모의하는 수치실험을 수행하였다. 이 실험은 Porter and Staziker(1995)와 Kim and Bai(2004)에 의해서 수행된 바 있으며, 포물선형 마운드의 수심은 아래와 같이 표현된다.

$$h(x) = h_c\left\{2\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{\lambda}\right) + 1\right\} \quad (0 < x < \lambda) \tag{16}$$

여기서, h_c는 수심이 일정한 영역에서의 수심이고, λ는 마운드의 수평거리이다. 실험조건으로, h_c와 ω의 관계를 $\omega^2 h_c/g = 1$로 두었고, 이 때 $kh_c = 0.38\pi$이다. 바닥경사와 곡률의 크기는 $0 \leq |\partial h/\partial x| \leq 2h_c/\lambda$와 $|\partial^2 h/\partial x^2| = 4h_c/\lambda^2$이다. 계산영역은 Fig. 3과 같고, Fig. 4에 수치실험결과를 Bai and Yeung(1974)의 국소유한요소 결과와 비교하였다. $\omega^2\lambda/g$는 마운드의 수평거리와 파장비를 의미한다. 이 값이 작아짐에 따라 경사가 급해진다. 완경사방정식의 결과는 모든 $\omega^2\lambda/g$에서 국소유한요소 결과와 차이가 있는데 반해서, 2보다 큰 경우에 본 연구의 식과 Kim and Bai의 결과는 $\omega^2\lambda/g$가 국소유한요소 결과와 잘 일치하였다. 그리고, 본 연구의 결과가 Kim and Bai의 결과보다 급경사에서 국소유한요소 결과에 더 가까운 반사율을 보였다. $\omega^2\lambda/g$가 2보다 훨씬 더 작아지는 경우에 모든 확장형 식은 매우 큰 반사율을 보였으나, 완경사 식은 반사율이 작아지는 경향을 제대로 재현하였다.

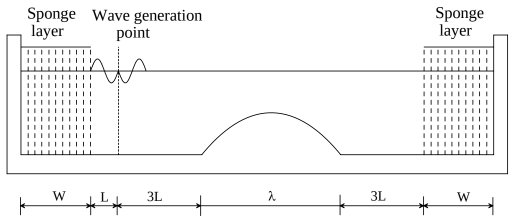

Fig. 3. domain for numerical test of waves propagating over parabolic mound.

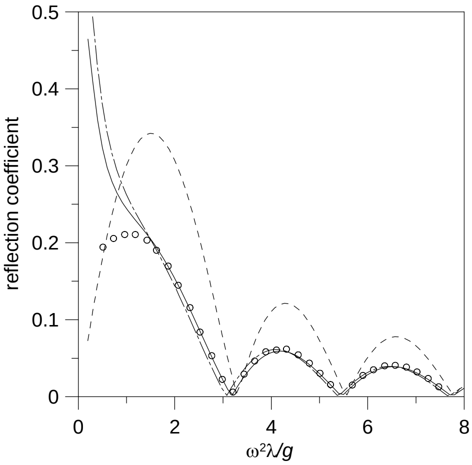

Fig. 4. Variation of reflection coefficients for the parabolic mound; ——— = present equation, ○ =localized element method, ----= mild-slope equation in terms of stream function, -·-·-= Kim and Bai's (2004) equation.

3.3 사련군에 의한 파의 반사

주기적으로 변화하는 바닥 위를 지나는 파랑의 파수(k)가 바닥 변화의 파수(K)와 2k/K=1의 관계를 가질 때 매우 많은 에너지가 반사하는 현상을 Bragg 반사라고 한다. 본 연구에서 Davies and Heathershaw(2983)가 사련군을 지나는 파랑의 반사에 대한 수리모형실험과 같은 조건으로 수치실험을 수행하였다. 사련의 수심은 아래와 같이 표현된다.

$$h(x) = \begin{cases} h_c, & x \leq x_r \\ h_c - A\sin[K(x - x_r)], & x_r \leq x \leq x_r + nL_r \\ h_c, & x \geq x_r + nL_r \end{cases} \tag{17}$$

여기서, $A = 5cm$, $L_r = 100cm$, $n = 10$, $h_c =$

31.3cm이다. 계산영역은 Fig. 5와 같고, Fig. 6에 수치실험결과를 Davies and Heathershaw (1983)의 수리실험결과와 비교하였다. 완경사 식은 반사율이 최대가 되는 경우의 주파수는 잘 맞추었지만, 수리실험보다 더 큰 반사율을 재현하였다. 이에 반해서, 본 연구의 식과 Kim and Bai의 식은 수리실험의 반사율을 제대로 재현하였다.

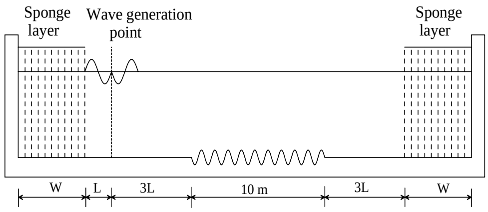

Fig. 5. Computational domain for numerical test of waves propagating over undulating bottom.

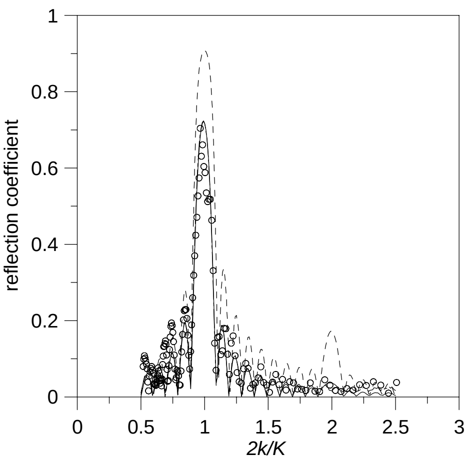

Fig. 6. Variation of reflection coefficient with 2k/K for a ripple bed; ——— = present equation, ○ = Davies and Heathershaw's (1983) experimental data, ----= mild-slope equation in terms of stream function, -·-·-= Kim and Bai's (2004) equation.

4. 결 론

본 연구에서 Green의 제2정리를 이용해서 흐름함수로 표현된 확장형 완경사방정식을 유도하고, Hamilton 원리로 유도한 Kim and Bai의 식과 비교하였다. 경사면, 포물선형 마운드, 사련군에 의한 반사 실험을 통해서, 본 연구에서 유도한 식이 가장 정확히 파랑변형을 재현함을 확인하였다. Kim and Bai의 식은 급경사에서 반사율을 크게 재현하였다.

감사의 글

본 논문의 제1저자는 해양연구원 기본연구사업(소멸파 성분을 고려한 파랑변형모형 연구, PE98426)의 지원을 받았습니다. 그리고, 제2저자는 2009년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 기초연구사업(No.2009-0080576)의 지원을 받았습니다.

참고문헌

Bai, K.J. and Yeung, R.W. (1974) Numerical solutions of free surface flow problem, Proc. 10th Symp. naval Hydrodyn. 609-641.

Booij, N. (1983) A note on the accuracy of the mild-slope equation. Coast. Engrg., 7, 191-203.

Davies, A.G. and Heathershaw, A.D. (1984) Surface-wave propagation over sinusoidally vaying topography, J. Fluid Mech., 291, 393-407.

Kim, J.W. and Bai, K.J. (2004) A new complementary mild-slope equation, J. Fluid Mech., 511, 25-40.

Lee, C., Kim, G. and Suh, K.D. (2003) Extended mild-slope equation for random waves. Coast. Engrg., 48, 277-287.

Lee, C., Park, W.S., Cho, Y.-S., and Suh, K.D.(1998) Hyperbolic mild-slope equations extended to account for rapidly varying topography. Coast. Engrg. 34, 243-257.

Liu, Y. and Yue, D.K.P.(1998) On generalized Bragg scattering by bottom ripples, J. Fluid Mech., 356, 297-326.

Massel, S.R. (1993) Extended refraction-diffraction equation for surface waves, Coast. Engrg., 19, 97-126.

Porter, D. and Staziker, D.J. (1995) Extensions of the mild-slope equation, J. Fluid Mech., 300, 367-382.

Suh, K.D., Lee, C., and Park, W.S. (1997) Time-dependent equations for wave propagation on rapidly varying topography. Coast. Engrg., 32, 91-117.