

## 경계적분요소법의 정밀도 향상 Improvement of BIEM Accuracy

서승남<sup>1</sup>  
 Seung-Nam Seo<sup>1</sup>

### 1. 서 론

경계적분 요소법(BIEM)은 지배방정식의 차원이 하나 줄어듦으로써 유한요소법, 유한차분법 등의 여타 수치방법보다 다루기 쉬우며 따라서 대부분의 공학문제의 해를 구하기 위해 광범위하게 사용되고 있다. 이 방법은 명칭에서 알 수 있듯이 경계와 주어진 경계조건만을 이용하며 경계상의 적분에 사용된 방법에 따라 수치해의 정확도가 결정된다. 본 논문에서는 주로 지형에 의한 파랑 변형을 계산하기 위한 경계적분 요소법의 정밀도 향상법을 다루고자 한다.

수심이 변하는 지형은 일반적인 함수로 나타낼 수 없기 때문에 격자점으로 표현하게 되며 이를 이용하여 경계를 표현한다. 그래서 주어진 격자점을 이용하여 격자간의 경계를 표현하는 방법 가운데 비교적 정밀한 Cubic spline방법(Jain et al., 1985)을 사용한 경계적분법을 제시하고자 한다. 한편 경계적분법은 경계상에 특이점인 Source point가 위치하며 이 부근에서 적분값이 월등히 크며 이 또한 수치해의 정밀도를 좌우하게 된다. 특이점을 포함하는 구간의 적분은 적분 가능한 특이적분(singular integration)이 포함되며 이는 해석적으로 구할 수 있다. 특이점 부근의 경계선이 곡선이면 특이적분을 빼어 정상적분(regular integration)으로 변형할 수 있고 상대적으로 크기가 작은 이 적분은 일반적인 수치적분을 이용할 수 있다.

결론적으로 경계적분법의 정밀도는 경계의 표현에 의해 좌우되며 본 논문에서는 이에 대한 방법을 소개하고 수심변화에 의한 파랑변형의 수치모형에 대해 언급하고자 한다.

### 2. 정식화

#### 2.1 미분방정식

2차원 선형 파랑운동의 미분방정식을 나타내기 위해 시간의존 함수  $e^{-i\omega t}$ 를 분리한 속도포텐셜  $\phi(x, y)$ 를 도입한다. 그러면 지배방정식 (1)과 해면과 해저 조건식 (2)는 다음과 같이 된다.

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\sigma^2}{g} \phi &= 0, \quad y = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= 0, \quad y = -h(x) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 각 주파수는  $\sigma$ , 수심  $h$ , 중력가속도  $g$  그리고  $n$ 은 경계상에서 외향단위 법선벡터를 각각 의미한다.

미분방정식의 정의구역은 수심변동 구역을 중심으로 좌우에 수심이 일정한 구역1과 2로 구성한다. 그리고 각 구역의 경계는 수심변동 구역의 시점과 종점으로부터 수심의 4배 이상 떨어진 곳에 위치시켜 수심변동 구역으로부터 생성되는 역류파의 영향이 좌우 경계에 영향을 주지 않게 한다. 그러면 정의구역 좌우측의 속도포텐셜은 진행파만으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi_1 &= a_i \frac{\cosh k_1(h_1 + y)}{\cosh k_1 h_1} e^{ik_1 x} + a_r \frac{\cosh k_1(h_1 + y)}{\cosh k_1 h_1} e^{-ik_1 x} \\ \phi_2 &= a_t \frac{\cosh k_2(h_2 + y)}{\cosh k_2 h_2} e^{ik_2 x} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 입사파 진폭  $a_i$ 는 주어진 값이나 반사파  $a_r$ 와 투과파  $a_t$ 는 미지수이다. 좌측 경계  $x_1$ 에서 정합조건 식 (4)를 이용하면 미지수  $a_r$ 을 소거할 수 있다.

<sup>1</sup> 발표자: 한국해양연구원 연안개발·에너지연구부 책임연구원

$$\phi = \phi_i + \phi_r$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \phi_r}{\partial x} \quad (4)$$

이를 정리하면 경계  $x_1$ 에서  $a_r$ 이 소거된 속도포텐셜만의 조건은 다음과 같다.

$$2ik_1\phi_i = ik_1\phi - \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (5a)$$

여기서 법선벡터의 기하학적 특성  $n = -x$ 이 사용되었다. 마찬가지로 경계  $x_2$ 에서 정합조건을 이용하여 미지수를 소거한 경계조건은 식 (5b)가 된다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = ik_2\phi \quad (5b)$$

## 2.2 경계적분법

경계적분식을 유도하기 위해 source point가 한 점  $(x_i, y_i)$ 에 위치한 Green함수  $G(x, y; x_i, y_i)$ 를 도입하고 이와 지배방정식을 내적한 후 Green의 제2 등식을 적용한다(Greenberg, 1978).

$$\int G \nabla^2 \phi dA = \int \left( G \frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n} \phi \right) ds + \int \phi \nabla^2 G dA$$

본 논문의 Green함수는  $\nabla^2 G = 2\pi\delta(x-x_i, y-y_i)$ 을 만족하나 경계조건이 부여되지 않은 미분방정식의 해로 설정한다. 이 경우 미분방정식의 해는 free space Green 함수이며 식 (6)이 된다.

$$G = \ln \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \equiv \ln r \quad (6)$$

그리고 점  $(x_i, y_i)$ 를 경계로 이동시키면 델타함수는 경계상의 내각  $\alpha$ 의 크기를 갖으며 이로부터 경계적분식 (7)을 얻는다.

$$\alpha \phi(x_i, y_i) = \int \left( \frac{\partial G}{\partial n} \phi - G \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds \quad (7)$$

식 (7)은 경계상의 함수로만 구성되었고 Green함수는 경계선이 주어지면 계산할 수 있고 미분방정식의 경계조건 식 (2)와 (5)을 이용하면 미지수는 경계상의  $\phi$ 만으로 구성된다. 수치모형에서는 각 격자점에서 미지수  $\phi_j$ 만을 사용하며 식 (7)로부터 연립방정식이 구성되어 이를 풀면 각 격자점에서  $\phi_j$ 를 구할 수 있다. 구한 경계상의  $\phi_j$ 와 주어진 경계조건을 이용하면 정의구역 내 임의 점에서  $\phi$ 를 계산할 수 있으며 이 경우에는  $\alpha = 2\pi$ 가 된다.

## 3. 수치 모형

### 3.1 경계선 내삽

경계선이 함수로 주어지면 경계적분법의 식

(7)의 각 구간에 대한 적분은 적분방법에 따른 오차만이 존재한다. 일반적으로 이 적분은 경계선이 함수로 주어진 경우에도 특수한 경우를 제외하고 수치적분에 의해 계산하게 된다. 만일 경계가 격자점으로만 주어진 경우 적분을 위해 격자간의 경계선을 내삽 하여야 한다. 이로부터 계산된 적분은 미지수의 연립방정식의 행렬이 되며 따라서 연립방정식의 해는 일차적으로 경계선의 내삽법에 따라 변하게 된다.

주어진 격자점을 이용하여 경계선을 구성하는 방법은 다양하나 여기서는 Cubic spline을 이용하고자 한다. 이를 이용하면 각 격자점에서 2차도함수까지 연속인 매끄러운 경계선을 얻을 수 있고 또한 외향법선 벡터  $n$ 도 이로부터 계산할 수 있는 장점이 있다. 만일 경계선의 임의 점에서 접선벡터가 연속이 아닌 경우(즉 내각  $\alpha \neq \pi$  이면) 이 점에서  $n$ 도 연속이 아닌 두 개의 값을 갖게 된다. 따라서 이러한 점을 찾아 이들을 포함하는 모든 중간 격자점들에 Spline을 사용한다. 예를 들면 경계선이 원이면 Spline은 한 번만 사용되나 격자점의 내각이  $\pi$ 가 아닌 점들이 존재하면 이 점의 개수만큼 Spline을 사용한다.

선정된 격자점들의 번호를 독립변수  $p$ 로 하고 좌표  $x, y$ 를 종속변수로 간주하여 Spline을 적용한다. 이 방법의 장점은 경계선 좌표가 항상 일가함수가 되어 복잡한 경계에도 사용할 수 있다. 매개변수  $p$ 로 표현된 경계상의 미소거리  $ds$ 는 식 (8)이 된다.

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2} dp \quad (8)$$

외향법선 단위벡터  $\hat{n}$ 을 구하기 위해 우선 접선 벡터  $\hat{t}$ 을 구하고 이는 식 (9)가 된다.

$$\hat{t} = \frac{dx}{ds} \hat{i} + \frac{dy}{ds} \hat{j} = \frac{dx}{dp} / \frac{ds}{dp} \hat{i} + \frac{dy}{dp} / \frac{ds}{dp} \hat{j} \quad (9)$$

여기서  $\hat{i}, \hat{j}$ 는  $x, y$ 에 상응하는 단위벡터이다. 반시계 방향으로 정의한 벡터  $\hat{t}$ 와 수직인 오른손 좌표계의 단위벡터  $\hat{k}$ 를 이용하면 벡터  $\hat{n}$ 을 구할 수 있다.

$$\hat{n} = \hat{t} \times \hat{k} = \frac{dy}{dp} / \frac{ds}{dp} \hat{i} - \frac{dx}{dp} / \frac{ds}{dp} \hat{j} \quad (10)$$

경계선의 좌표  $x, y$ 는 Spline으로부터 구한 3차다항식이고 벡터  $\hat{n}$ 은 식 (8)과 (10)로부터 이들의 1차 도함수를 구해 계산한다.

### 3.2 정상 적분

경계 적분에서 source point가 적분 구간에 존

제하지 않으면 피적분 함수  $G$ 는 위에 정의된 식에서 쉽게 구할 수 있으나  $\partial G/\partial n$ 은 다음 식으로 계산한다.

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}}{r^2} = \frac{\frac{dy}{ds}(x-x_i) - \frac{dx}{ds}(y-y_i)}{\sqrt{(x-x_i)^2 + s^2 LEFT(y-y_i)^2}} \quad (11)$$

한편 격자점에서 정의된 미지수  $\phi_j$ 는 구간  $j$ 에서 선정된 방법에 따라 다양한  $s$ 의 함수로 표현할 수 있으며 선형요소의 경우에는 식 (12)가 된다.

$$\phi = \phi_j \left( 1 - \frac{s-s_j}{s_{j+1}-s_j} \right) + \phi_{j+1} \frac{s-s_j}{s_{j+1}-s_j} \quad (12)$$

여기서  $s$ 의 첨자는 해당 격자까지의 거리를 의미한다.

정의된  $G$ , 식 (11)과 (12)를 식 (7)에 대입하면 구간  $j$ 에 대한 적분을 구할 수 있다. 이 때 피적분 함수가  $s$ 의 함수로 표현되면 쉽게 구할 수 있으나  $G$ 의 거리  $r$ 과 식 (11)의  $\partial G/\partial n$ 은 일반적으로  $s$ 의 함수로 표현되지 않기 때문에 수치적분을 사용한다. 여기서는 Gauss-Legendre 구적법을 사용하였고 식 (13)이 된다(Abramowitz and Stegun, 1972).

$$\int_{s_j}^{s_{j+1}} f(s) ds \cong \frac{s_{j+1}-s_j}{2} \sum_{m=1}^M f(\tau_m) w_m \quad (13)$$

여기서  $\tau_m$ 과  $w_m$ 은 구적법의 황좌표와 가중치로 언급한 참고문헌에 제시되어 있다. 식 (13)의 형태를 이용한 식 (7)의 수치적분을 구하기 위해 먼저 설정된 시점에서 구간  $j$  상의 거리  $s_j$ 가 계산되어야 한다. 이를 구하기 위해 식 (13)의 독립변수를 매개변수  $p$ 로 바꾸고 피적분함수를 식 (8)을 대입한 수치적분을 사용한다.

그리고 식 (13) 형태의 수치적분을 계산하기 위해 구적법 황좌표  $\tau_m$ 에 대응하는 매개변수  $p_{j,m}$  값이 필요하다. 만일  $p_{j,m}$ 을 알면 좌표  $x_{j,m}$ 과  $y_{j,m}$ 을 Spline으로부터 계산할 수 있고 이를 이용하면 경계적분의  $G$ 와  $\partial G/\partial n$ 를 쉽게 계산할 수 있다. 구간  $j$ 에서  $\tau_m$ 과  $s_{j,m}$ 은 구적법의 변수변환에 따라 식 (14)를 만족한다.

$$\frac{\tau_m + 1}{2} = \frac{s_{j,m} - s_j}{s_{j+1} - s_j} \quad (14)$$

한편  $p_{j,m}$ 이 미지수이면 이에 대응하는  $s_{j,m}$ 을 구하기 위해 식 (14)에 대입하면 식 (15)가 된다.

$$\tau_m = \frac{2}{s_{j+1} - s_j} \int_{p_j}^{p_{j,m}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2} dp - 1 \quad (15)$$

위 식에서 반복법을 사용하면  $p_{j,m}$ 을 구할 수 있고 수렴은 비교적 빠르나 이 경우 앞에서 기술한 형태의 수치적분이 필요하다.

다시 정리하면 정상적분에 대한 수치적분은  $\tau_m$ 의 함수이며 이는 매개변수  $p_{j,m}$ 와 연관된 식 (15)에서 계산된다. 그리고 이를 Spline에 대입하면 좌표  $x_{j,m}$ 과  $y_{j,m}$ 가 계산된다. 또한 좌표  $x$ ,  $y$ 에 관한 Spline의 1차 도함수를 구해 식 (8)과 (10)를 이용하면 식 (11)에 존재하는  $(dx/ds)_{j,m}$ ,  $(dy/ds)_{j,m}$ 를 계산할 수 있다. 이들은 경계적분식의 수치적분에서 계속 사용되기 때문에 기억장치에 저장하는 것이 효율적이다.

### 3.3 특이 적분

식 (6)으로 정의된  $G$ 는 좌표  $(x, y)$ 가 source point  $(x_i, y_i)$ 로 접근할수록 급격히 감소한다. 즉 점  $(x_i, y_i)$ 가 적분 구간에 포함되는 경우 이 구간의 적분의 절대값이 상당히 크게 된다. 예로 구간  $i$ 의 경우 선형요소에 대한 이 구간 적분은 식 (16)으로 변형할 수 있다.

$$\int_{s_i}^{s_{i+1}} \left[ \ln \frac{r}{s-s_i} + \ln(s-s_i) \right] \left[ \begin{aligned} &(\phi_n)_i \left( 1 - \frac{s-s_i}{s_{i+1}-s_i} \right) \\ &+ (\phi_n)_{i+1} \frac{s-s_i}{s_{i+1}-s_i} \end{aligned} \right] ds \quad (16)$$

여기서  $\phi$ 의 첨자  $n$ 은 미분을 의미한다. 피적분함수의  $\ln(s-s_i)$ 는 이 구간에서 특이함수이나 적분 가능하여 이를 해석적으로 계산할 수 있다. 그리고  $r/(s-s_i) \approx 1$ 인 정상함수로 이와 관련된 적분은 앞 절의 정상적분 방법을 사용하면 적분에 의한 수치오차를 크게 줄일 수 있다.

한편  $\partial G/\partial n$ 에 대한 구간 적분은 정상 적분으로 구할 수 있다. 이유는  $s \rightarrow s_i$ 이면  $\vec{r} \cdot \hat{n} \rightarrow 0$ 이 되고 이는  $r^2 \rightarrow 0$ 보다 감소율이 빠르기 때문에  $\partial G/\partial n \rightarrow 0$ 이 된다. 만일 구간  $i$ 의 경계선이 직선이면 모든 점에서  $\vec{r} \cdot \hat{n} = 0$ 을 만족한다. 그리고 구간  $i-1$ 에서는  $\ln|s-s_i|$ 을 대신 사용하여 계산한다.

### 3.4 파랑변형 모형

경계적분법을 선형 파랑변형에 적용할 경우 본 연구에서와 같이 수심이 연속적으로 변화하는 구역의 좌우측에 일정한 수심구역을 두게 되면 경계가 직선인 구간은 5개가 된다. 만일 비선형의 경우에는 해면이 변화함으로 직선 구간은 4개가 된다. 이 직선구간에도 앞에서 기술한 Spline 방법을 사용해도 되나 이 경우  $p_{j,m}$ 의 계산에 식 (15)의 적분을 사용하지 않고 식 (14)로부터 바로 구할 수 있다.

결국 선형 과량변형에는 수심이 변하는 구역에 만 Spline을 사용하고 식 (15)를 이용하여  $p_{j,m}$ 을 구한다. 만일 수심이 변하는 구역에 절곡점이 존재하면 이 개수만큼 Spline을 사용한다.

#### 4. 결 과

앞 절에 기술한 바와 같이 경계 내삽의 정밀도를 향상시키기 위한 방법으로 격자번호를 매개변수로 사용하고 격자점 좌표를 이용하여 경계를 내삽 하였다. 이로부터 구적법 횡좌표  $\tau_m$ 에 대응하는 매개변수  $p_{j,m}$ 을 구해 구적법의 좌표  $x_{j,m}$ ,  $y_{j,m}$ 와  $\partial G/\partial n$ 의 적분에 필요한  $(dx/ds)_{j,m}$ ,  $(dy/ds)_{j,m}$ 을 구한 결과를 검증하고자 한다. 만일 원으로 경계가 이루어진 경우 위의 값들은 해석적으로 구할 수 있으며 이를 본 방법의 결과와 비교하고자 한다.

반경  $a$ 의 원에 대한 경계 좌표를 중심각  $\theta$ 를 이용해 표현하면 경계는 식 (17),  $dx/ds$ 와  $dy/ds$ 은 식 (18)이 된다.

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta \\ y &= a \sin \theta \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{dx}{d\theta} / \frac{ds}{d\theta} = -\sin \theta \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{dy}{d\theta} / \frac{ds}{d\theta} = \cos \theta \end{aligned} \quad (18)$$

Fig. 1은 반경  $a$ 가 10인 원에 11개 비교적 작은 개수의 등간격 격자점을 이용함에도 불구하고 본 계산법으로 구한 구적법의 좌표의 정확도를 보여준다.

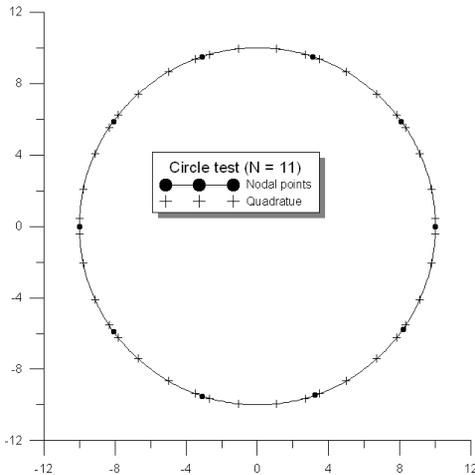


Fig. 1. Computed quadrature points for a circle with 11 nodal points

Fig. 2는 Fig. 1의 원에 격자점의 개수를 달리하여 계산한  $(dx/ds)_{j,m}$ 의 정확도를 보여주며 지면 관계상 생략한  $(dy/ds)_{j,m}$ 도 유사한 정밀도를 보인다.

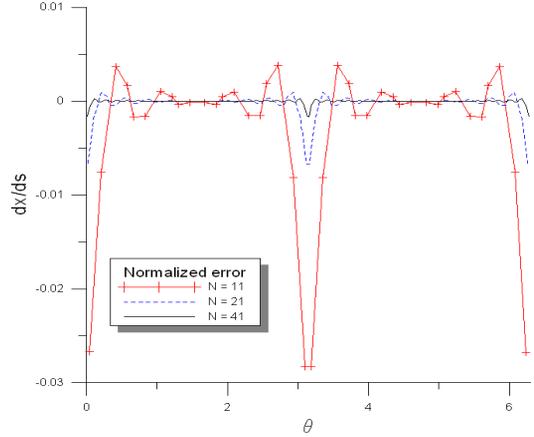


Fig. 2. Comparison of computed normalized errors of  $(dx/ds)_{j,m}$  for a circle with radius 10

#### 5. 결 론

선형요소를 포함하는 다양한 형태의 미지수 내삽법이 정해진 경우 경계적분법의 정밀도는 경계의 내삽과 외향법선 벡터에 대한 계산의 정밀도에 좌우된다. 본 연구에서는 Cubic spline 내삽과 함께 특이점 인접 구간의 해석적 적분을 도입하여 정밀도 향상에 대한 방법도 기술하였다.

#### 감사의 글

한국해양연구원 기본연구사업인 “운용해양(해양예보) 시스템 연구”, “연안 국지 해일 정밀예보 지원체제 현업화 기술”과 “해상과량 관측 및 조사” 연구에서 수행된 결과의 일부이다.

#### 참고문헌

- Abramowitz, M. and Stegun I.A. (1972). Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications, Inc., New York, NY.
- Greenberg, M.D. (1978). Foundations of Applied Mathematics, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J.
- Jain, M.K., Iyengar S.R.K. and Jain R.K. (1985). Numerical Methods for Scientific and Engineering Computation, Wiley Eastern Limited, India.