

파라미터 불확실성을 갖는 고차 선형시스템들의 상태일치

Consensus of High-order Linear Systems With Parameter Uncertainties

김수범*, 최현철**, 김형준*, 심형보***, 서진현***

Subum Kim, Hyoun-Chul Choi, Hyoung Joon Kim, Hyungbo Shim, Jin Heon Seo

Abstract - This paper deals with the consensus problem for multi-agent linear dynamic systems with parameter uncertainties. All the agents are identical high-order linear systems with parameter uncertainties and their state information is exchanged through a communication network. It is shown that a consensus is achieved if there exists a feasible solution to a set of linear matrix inequalities obtained for a simultaneous stabilization problem for multiple systems. A numerical example is presented to show the effectiveness of the proposed method.

Key Words : Consensus, high-order linear systems, parameter uncertainties, simultaneous stabilization, linear matrix inequality.

1. 서론

무인항공기의 협동제어, 이동로봇의 대형 이루기 및 센서 네트워크의 통신문제 등으로의 응용 가능성 때문에 최근 들어 다개체 시스템의 상태일치 문제에 대한 많은 연구가 이루어졌다[1, 2]. 그러나 대부분의 결과는 단일 적분기 시스템 또는 이중 적분기 시스템을 개체로 갖는 다개체 시스템에 국한된다[1]. 최근, 고차 시스템을 개체로 갖는 다개체 시스템의 상태일치 문제가 연구되고 있으나[2], 파라미터 불확실성을 갖는 고차 시스템들의 상태일치에 대한 연구 결과는 미흡하다. 이 논문에서는 파라미터 불확실성을 갖는 고차 다개체 시스템의 상태일치 문제를 다룬다. 주어진 상태일치 문제가 어느 특정한 시스템의 동시 점근안정화 문제 해법에 의해 풀릴 수 있음을 보이고, 선형행렬부등식(LMI) 기법[3]을 이용하여 동시 점근안정화 문제 해법을 제시함으로써 파라미터 불확실성을 갖는 고차 다개체 시스템의 상태일치 문제 해법을 제시한다. 마지막으로 예제를 통해 제안된 접근방법의 유용성을 보인다.

2. 상태일치 문제

이 논문에서 고려하는 다개체 시스템은 각 개체가 파라미터 불확실성을 갖는 동일한 n 차 선형시불변 시스템으로 표현되며 통신망을 통해 각 개체들이 상태정보를 서로 교환하는 시스템이다. 문제 설정을 위해, 다음과 같이 파라미터 불확실성을 갖는 N 개의 동일한 n 차 선형시불변 시스템으로 이루어진 다개체 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}^i(t) = (A + \Delta A)x^i(t) + Bu^i(t), \quad x^i \in \mathbb{R}^n, \quad u^i \in \mathbb{R}^m \quad (1)$$

여기서 $i \in \Pi = \{1, \dots, N\}$ 는 개체의 식별번호, x^i 는 상태변수, u^i 는 입력변수이다. 또한 시스템 행렬은 적절한 차원을 가지며 쌍 (A, B) 가 안정화가능하다고 가정한다. 이 개체들 사이의 통신 토폴로지(topology)는 가중 무방향성 그래프(weighted undirected graph) $\Gamma = (\Pi, \varepsilon, \Omega)$ 로 표현된다. 이 때 Π 는 노드(node) 집합, ε 은 에지(edge) 집합, Ω 는 가중인접(weighted adjacency) 행렬을 의미한다. 인접행렬 $\Omega = [\omega_{ij}]$ 및 Γ 의 Laplacian 행렬 $L = [l_{ij}]$ 이 주어지면, i 번째 개체는 이웃 개체들로부터 다음 규칙에 따라 상태정보를 수집한다.

$$\dot{z}^i(t) = \sum_{j \in \Pi} \omega_{ij} (x^j(t) - x^i(t)) = - \sum_{j \in \Pi} l_{ij} x^j(t) \quad (2)$$

여기서 $\Pi_i = \{j \in \Pi : \omega_{ij} \neq 0\}$ 이다. 이 정보는 다음 식과 같이 이득 K 와 곱해져서 각 개체에 반환된다.

$$u^i(t) = Kz^i(t) = -K \sum_{j \in \Pi} l_{ij} x^j(t) \quad (3)$$

이 논문에서는 임의의 초기값을 갖는 다개체 시스템의 상태를 상수 값 또는 각 개체의 동역학에 의존하는 시변 궤적에 일치시키는 이른바 상태일치 문제를 고려한다. 이 상태일치 문제는 모든 $i = 1, \dots, N$ 에 대해 다음 조건을 만족시키는 신호 $\zeta(t) \in \mathbb{R}^n$ 가 존재하면 풀린다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x^i(t) - \zeta(t)) = 0$$

여기서 우리는 상태일치가 이루어지면 식 (2)에 의해 $\dot{z}^i(t)$ 가 0으로 수렴하고 입력 $u^i(t)$ 도 식 (3)에 의해 0으로 수렴하는 것을 알 수 있으며, 결국 $\zeta(t)$ 가 $\dot{\zeta}(t) = (A + \Delta A)\zeta(t)$ 을 만족하게 됨을 알 수 있다. 이는 상태가 일치되는 신호 $\zeta(t)$ 가 각 개체의 내부 동역학에 의해 규정됨을 의미한다. 다양한(특히 진동하는) 신호 $\zeta(t)$ 를 얻기 위해 다음과 같은 가정을 한다.

가정 1: $(A + \Delta A)$ 의 모든 고유값은 복소평면의 닫힌 좌반부에 존재하며 한 개 이상의 고유값이 허수축 상에 존재한다.

저자 소개

* 準會員 : 서울大學校 電氣컴퓨터工學部 碩士課程

** 正會員 : 서울大學校 電氣컴퓨터工學部 博士後研究員 · 工博

*** 正會員 : 서울大學校 電氣컴퓨터工學部 教授 · 工博

이 논문에서는 개체들 사이의 통신 토폴로지를 가중 무방향성 그래프로 가정하였다. 무방향성 그래프의 통신 토폴로지 상에서 모든 개체들의 상태를 일치시키려면 그래프 Γ 가 연결되어(connected) 있어야 한다.

가정 2: 무방향성 그래프 Γ 는 연결되어 있다.

가정 2를 만족시키기 위한 필요충분조건은 L 의 고유값 0의 대수적 다중도(algebraic multiplicity)가 1이 되는 것이다[1]. 따라서 이 논문에서는 Laplacian 행렬 L 의 고유값 0의 대수적 다중도가 1인 경우만 고려한다. 참고로, 무방향성 그래프의 Laplacian 행렬 L 은 대칭행렬이며 음이 아닌 실수와 적어도 하나 이상의 0을 고유값으로 갖는다.

가정 3: $\Delta A = E_1 \Sigma E_2$ 을 만족한다고 가정하며, 여기서 E_1, E_2 는 알고 있는 상수행렬, Σ 는 미지의 상수행렬로 $\|\Sigma\| \leq I$ 을 만족한다.

주 1: 각 개체가 모두 동일해도 모델링의 부정확성으로 인해 대다수의 경우 시스템의 불확실성이 존재한다. 따라서 식 (1)에서 A 는 알고 있지만 (모두 동일한) ΔA 을 정확히 모르는 상황을 가정하는 것이 타당하다고 볼 수 있다.

3. 동시 안정화에 의한 상태일치

이 절에서는 주어진 상태일치 문제가 파라미터 불확실성을 갖는 어느 특정한 시스템의 동시 점근안정화 문제로 바뀔 수 있음을 보인다. 즉, 특정한 다중 시스템을 동시에 점근적으로 안정화하는 제어가 존재하면 주어진 상태일치 문제가 풀린다는 것을 보인다.

$\bar{x} := [x^1; \dots; x^N]$ 로 정의하고 식 (1)에 식 (3)의 프로토콜을 적용하면 전체 시스템은 다음 식으로 표현된다.

$$\dot{\bar{x}}(t) = [I_N \otimes (A + \Delta A) - L \otimes BK] \bar{x}(t)$$

이 식에 L 을 대각행렬 Λ 로 변환하는, 즉 $TLT^{-1} = \Lambda$ 로 변환하는 비특이행렬 T 로 좌표변환 $\bar{\xi} := (T \otimes I_n) \bar{x}$ 을 행하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\xi}}(t) &= (T \otimes I_n) [I_N \otimes (A + \Delta A) - L \otimes BK] (T^{-1} \otimes I_n) \bar{\xi}(t) \\ &= [I_N \otimes (A + \Delta A) - (\Lambda \otimes BK)] \bar{\xi}(t) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 초기값은 $\bar{\xi}(0) = (T \otimes I_n) \bar{x}(0) \in R^{Nn}$ 이다. 식 (4)는 대각화된 시스템 방정식이므로 다음 식을 만족한다.

$$\dot{\xi}^i(t) = [(A + \Delta A) - \lambda_i(L)BK] \xi^i(t) \quad (5)$$

여기서 $[\xi^1; \dots; \xi^N] = \bar{\xi}$ 이고 $\lambda_i(L)$ 는 L 의 고유값이다($i=1, \dots, N$). L 은 고유값 0을 항상 가지므로 편의상 $\lambda_1(L) = 0$ 으로 가정한다. 만약 시스템 (5) 중 $i=2, \dots, N$ 에 해당하는 시스템이 동시에 점근적으로 안정하게 되면 이들(즉 $\xi^i(t)$ 를 제외한 나머지 개체)의 상태들은 0으로 수렴하게 된다. T 가 $TLT^{-1} = \Lambda$ 을 만족하고 $\lambda_1(L) = 0$ 이므로, L 의 0-고유값에 해당하는 고유벡터인 1-벡터가 T^{-1} 의 첫 번째 열에 놓이게 된다. $\bar{x} = (T^{-1} \otimes I_n) \bar{\xi}$ 이고 모든 $i=2, \dots, N$ 에 대한 ξ^i 가 0으로 수렴하므로 결국에는 x^i ($i=1, \dots, N$)가 ξ^1 로 수렴하게 된다. 이러한 논의를 토대로 논문 [2]의 정리 1을 파라미터 불확실성을 갖는 시스템의 경우로 확장하면 다음 결과를 얻을 수 있다.

정리 1: 가정 1, 2가 만족한다고 하자. 모든 $i=2, \dots, N$ 에 대해 $N-1$ 개의 시스템

$$\dot{\xi}^i(t) = [(A + \Delta A) - \lambda_i(L)BK] \xi^i(t)$$

이 동시에 점근적으로 안정하면 주어진 상태일치 문제는 풀린다. 즉, 임의의 초기값에 대해 제어입력 (3)을 적용한 시스템 (1)의 해는

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x^i(t) - \zeta(t)) = 0, \quad i=1, \dots, N$$

을 만족한다. 이 때, $\zeta(t)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\zeta(t) = \sum_{j=1}^{r^*} \sum_{k=1}^{m_j} \sum_{l=0}^{m_j-k} \frac{\mu_{(j,k+l)} t^l e^{\lambda_j t}}{l!} v_{(j,k)}$$

여기서 λ_j ($j=1, \dots, r^*$)는 허수축 상에 존재하는 $(A + \Delta A)$ 의 고유값이고, 벡터집합 $\{v_{(j,1)}, \dots, v_{(j,m_j)}\}$ 는 $(A + \Delta A)$ 의 j 번째 Jordan 블록 $J_{m_j}(\lambda_j)$ 에 대응되는 일반화된 고유벡터의 사슬(chain)이다. 또한 $[\mu_{(1,1)}; \dots; \mu_{(1,m_1)}; \mu_{(2,1)}; \dots; \mu_{(2,m_2)}; \dots; \mu_{(r,m_r)}] = Mx^1(0)$ 이고 이 때 M 은 $(A + \Delta A)$ 를 Jordan 표준형으로 변환하는 행렬로서 $J_A = MAM^{-1}$ 을 만족하는 행렬이다. ■

4. 동시 안정화 제어기 설계: LMI 기법

이 절에서는 앞 절의 논의를 토대로 하여, 특정 LMI 식의 해가 존재하면 주어진 상태일치 문제가 풀린다는 것을 보이며 그 결과로 상태일치를 이루는 제어기 이득을 제시한다.

정리 2: 가정 1, 2, 3이 만족된다고 하자. 아래의 LMI (6)을 만족하는 행렬들 $X > 0$, Y 및 상수 $\gamma > 0$ 가 존재하면 식 (1)과 (3)으로 주어지는 다개체 시스템들의 상태일치가 이루어진다. 이 때, 상태제환 제어기이득은 $K = YX^{-1}$ 으로 주어진다.

$$\begin{bmatrix} XA^T + AX - \lambda_i(L)Y^T B^T - \lambda_i(L)BY & \gamma E_1 & XE_2^T \\ * & -\gamma I & 0 \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad i=2, \dots, N \quad (6)$$

증명: 정리 1에 의해 이 정리의 증명은 식 (6)의 조건이 $N-1$ 개의 시스템

$$\dot{\xi}^i(t) = (A + \Delta A)\xi^i(t) - \lambda_i(L)Bv^i(t), \quad i=2, \dots, N \quad (7)$$

의 동시적 점근안정화 상태제환 제어입력 $v^i(t) = K\xi^i(t)$ 를 존재하게 할 충분조건임을 보이면 된다.

Lyapunov 함수를 다음과 같이 정의하자.

$$V = \sum_{i=2}^N \xi^{iT}(t) P \xi^i(t), \quad P > 0 \quad (8)$$

가정 3과 부등식 $2x^T y \leq \frac{1}{\mu} x^T x + \mu y^T y$, $\mu > 0$ 을 이용하여 시스템 (7)의 상태제적에 따른 Lyapunov 함수의 시간미분을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=2}^N \xi^{iT}(t) [(A - \lambda_i(L)BK)^T P + P(A - \lambda_i(L)BK)] \xi^i(t) + 2 \sum_{i=2}^N \xi^{iT}(t) P E_1 \Sigma E_2^T \xi^i(t) \\ &\leq \sum_{i=2}^N \xi^{iT}(t) (A^T P + P A - \lambda_i(L)K^T B^T P - \lambda_i(L)P B K) \xi^i(t) \\ &\quad + \sum_{i=2}^N \xi^{iT}(t) \left(\frac{1}{\mu} P E_1 E_1^T P + \mu E_2^T E_2 \right) \xi^i(t) \\ &= \sum_{i=2}^N \xi^{iT}(t) (A^T P + P A - \lambda_i(L)K^T B^T P - \lambda_i(L)P B K + \frac{1}{\mu} P E_1 E_1^T P + \mu E_2^T E_2) \xi^i(t) \end{aligned}$$

따라서 $\dot{V} < 0$ 일 충분조건은 $i=2, \dots, N$ 에 대해

$$A^T P + P A - \lambda_i(L)K^T B^T P - \lambda_i(L)P B K + \frac{1}{\mu} P E_1 E_1^T P + \mu E_2^T E_2 < 0 \quad (9)$$

을 만족하는 행렬 $P > 0$, K 및 상수 $\mu > 0$ 가 존재하는 것이다. Schur 보수법[3]을 적용하면 식 (9)는

$$\Psi_i := \begin{bmatrix} A^T P + PA - \lambda_i(L) K^T B^T P - \lambda_i(L) P B K + \mu E_2^T E_2 & \frac{1}{\mu} P E_1 \\ * & -\frac{1}{\mu} I \end{bmatrix} < 0$$

와 동치임을 알 수 있고, 여기에 $\text{blockdiag}(P^{-1}, I)$ 에 의한 합동 변환과 변수치환 $X := P^{-1}, Y := K P^{-1}, \gamma := \frac{1}{\mu}$, 그리고 Schur 보수법을 다시 적용하면 다음과 같이 $\Psi_i < 0$ 와 동치인 LMI를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A^T P + PA - \lambda_i(L) K^T B^T P - \lambda_i(L) P B K + \mu E_2^T E_2 & \frac{1}{\mu} P E_1 \\ * & -\frac{1}{\mu} I \end{bmatrix} < 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} P^{-1} 0 \\ 0 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T P + PA - \lambda_i(L) K^T B^T P - \lambda_i(L) P B K + \mu E_2^T E_2 & \frac{1}{\mu} P E_1 \\ * & -\frac{1}{\mu} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} 0 \\ 0 I \end{bmatrix} < 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} P^{-1} A^T + A P^{-1} - \lambda_i(L) P^{-1} K^T B^T - \lambda_i(L) B K P^{-1} + \mu P^{-1} E_2^T E_2 P^{-1} & \frac{1}{\mu} E_1 \\ * & -\frac{1}{\mu} I \end{bmatrix} < 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} X A^T + A X - \lambda_i(L) Y^T B^T - \lambda_i(L) B Y & \gamma E_1 & X E_1^T \\ * & -\gamma I & 0 \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

따라서 $i=2, \dots, N$ 에 대해서 위의 LMI를 만족하는 행렬들 $X > 0, Y$ 및 상수 $\gamma > 0$ 가 존재하면 식 (1)과 (3)으로 주어지는 다개체 시스템들의 상태일치가 이루어진다. 이 때, 상태제어 제어이득은 $K = Y X^{-1}$ 으로 주어진다. ■

주 2: 실제로 정리 2를 이용하여 제어이득을 구할 때 $(N-1)$ 개의 모든 LMI 조건을 고려할 필요는 없다. $\lambda_i(L)$ 의 최대값과 최소값에 대한 2개의 LMI 조건만을 고려하여 원하는 제어이득을 구할 수 있다.

$$\lambda_{\max} := \max\{\lambda_i(L) | i=2, \dots, N\}, \lambda_{\min} := \min\{\lambda_i(L) | i=2, \dots, N\},$$

$$\alpha_1^i := \frac{\lambda_i(L) - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}, \alpha_2^i := \frac{\lambda_{\max} - \lambda_i(L)}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}, (\alpha_1^i + \alpha_2^i = 1, \alpha_1^i, \alpha_2^i \geq 0),$$

$$S_1 := (A + \Delta A) - \lambda_{\max} B K, S_2 := (A + \Delta A) - \lambda_{\min} B K$$

라고 정의하자 ($\lambda_{\max} = \lambda_{\min}$ 인 경우는 1개의 LMI 조건만 갖게 되는 경우이므로 논의에서 제외). 위 정의에 따라

$$\dot{\xi}^i(t) = [(A + \Delta A) - \lambda_i(L) B K] \xi^i(t) = \sum_{j=1}^2 \alpha_j^i S_j \xi^i(t)$$

을 얻게 되고, 식 (8)에서 정의한 Lyapunov 함수의 상태제어에 따른 시간미분을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=2}^N \xi^{iT}(t) \left[\left(\sum_{j=1}^2 \alpha_j^i S_j \right)^T P + P \left(\sum_{j=1}^2 \alpha_j^i S_j \right) \right] \xi^i(t) \\ &= \sum_{i=2}^N \xi^{iT}(t) \left[\sum_{j=1}^2 \alpha_j^i (S_j^T P + P S_j) \right] \xi^i(t) \end{aligned}$$

결국 $j=1,2$ 에 대해 $S_j^T P + P S_j < 0$ 을 만족하면 $\dot{V} < 0$ 을 만족하게 된다는 것을 알 수 있다. ■

5. 예제

파라미터 불확실성을 갖는 4개의 동일한 2자유도 스프링-질량 시스템을 고려하자. 스프링 계수 k 가 불확실한 파라미터이며 $1.05 \leq k \leq 1.45$ 을 만족할 때, 각 개체의 동역학을 다음과 같이 나타낼 수 있다[4]. (감쇄율이 0이기 때문에 시스템 극점이 모두 허수축 상에 존재한다.)

$$\dot{x}^i(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0.1 \\ -1.25 & 1.25 & 0 \\ 1.25 & -1.25 & 0 \end{pmatrix} x^i(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.75 \\ 0.75 \end{pmatrix} \Sigma [1 \ -1 \ 0 \ 1] x^i(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u^i(t),$$

$\|\Sigma\| \leq 1, i=1, \dots, 4$

Laplacian 행렬과 그 고유값은 각각 다음과 같이 주어진다.

$$L = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 & -2 \\ -4 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -5 \\ -2 & 0 & -5 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\{\lambda_1(L), \dots, \lambda_4(L)\} = \{0, 4.8873, 8.8164, 14.2964\}$$

이 논문에서 제시한 방법으로 MATLAB LMI Control Toolbox를 이용하여 LMI 식 (6)의 해를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 32.7725 & 27.0447 & -5.4898 & 3.8052 \\ 27.0447 & 28.9991 & -9.6344 & -5.7371 \\ -5.4898 & -9.6344 & 7.4876 & 1.2925 \\ 3.8052 & -5.7371 & 1.2925 & 26.9434 \end{bmatrix}, \\ Y &= [2.0687 \quad 3.5605 \quad -1.4229 \quad 4.9122], \\ \gamma &= 10.7651 \end{aligned}$$

이에 해당하는 제어이득은 다음과 같다.

$$K = [-3.0289 \quad 4.0868 \quad 2.6139 \quad 1.3549]$$

각 개체의 초기값을 무작위로 부여하고 모의실험을 했을 때 다개체 시스템의 상태일치 결과는 그림 1과 같다. 이로부터, 모든 상태가 램프(ramp) 및 정현파 궤적으로 일치되어 가는 것을 확인할 수 있다.

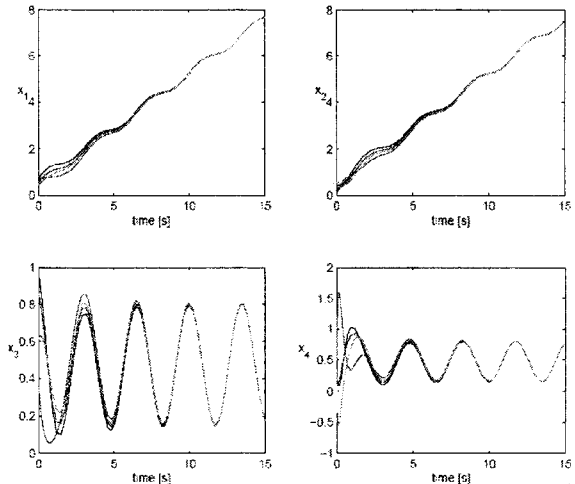


그림 1. 4개의 2자유도 스프링-질량 시스템의 상태일치 결과

6. 결론

이 논문에서는 파라미터 불확실성을 갖는 고차 다개체 시스템의 상태일치 문제가 어느 특정한 파라미터 불확실성을 갖는 시스템의 동시 점근안정화 문제 해법에 의해 풀릴 수 있음을 보였고, 선형행렬부등식(LMI) 기법을 이용하여 동시 점근안정화 문제 해법을 제시함으로써 파라미터 불확실성을 갖는 고차 다개체 시스템의 상태일치 문제를 해결하였다.

참고문헌

- [1] W. Ren, W. Beard, *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control*, Springer, 2008.
- [2] J.H. Seo, H. Shim, J. Back, "Consensus of high-order linear systems using dynamic output feedback compensator: low gain approach," submitted, 2009.
- [3] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, 1994.
- [4] B. Wic and D.S. Bernstein, *Benchmark problems for robust control design*, proceedings of the 1992 American Control Conference, Chicago, 1992.