

제어불가능 불안정 선형화를 가지는 비선형 시스템에 대한 다이나믹 안정화

Dynamic stabilization for a nonlinear system with uncontrollable unstable linearization

서상보*, 서진헌**, 심형보**
Sangbo Seo, Jin Heon Seo, Hyungbo Shim

Abstract - In this paper, we design a dynamic state feedback smooth stabilizer for a nonlinear system whose Jacobian linearization may have uncontrollable because its eigenvalues are on the right half-plane. After designing an augmented system, a dynamic exponent scaling and backstepping enable one to explicitly design a smooth stabilizer and a continuously differentiable Lyapunov function which is positive definite and proper.

Key Words : dynamic state feedback, exponent scaling, uncontrollable unstable linearization, backstepping

1. Introduction

본 논문에서는 아래의 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2^3 + x_1 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \quad (1)$$

와 같이 되고, 이 시스템의 자코비안(Jacobian) 선형화는 제어불가능(uncontrollable)함을 알 수 있다. 그리고 제어불가능모드는 양의 고유값(eigenvalue)을 가지므로, 국소(local)든 광역(global)이든 어떠한 smooth한 상태 궤환 제어로도 안정화할 수 없다[1].

Smooth한 국소 상태 궤환 제어기로 안정화 할 수 없는 이 시스템을 안정화하기 위한 다양한 연구들이 이루어져왔다 [2-9]. 그 한 연구로 동차 근사화(homogeneous approximation)를 이용한 안정화 연구가 있는데, 이는 근사화 방법의 의존하기 때문에 국소 안정화와 저차 시스템에 대한 결과로 제한이 있었다[2-5]. 반면 고차 시스템에 대한 연구는 하삼각 시스템(lower triangular systems)에 대해서 연속인 국소 안정화 제어를 설계하였다[6]. [7]에서는 특정한 조건을 만족하는 드리프트 항을 가지는 고차 하삼각 시스템에 대해서 연속인 안정화 제어를 설계하였다.

위의 연구들이 동차성에 기반한 연구들인 반면, 역진(backstepping) 기법을 이용한 연구들도 있었다[8-10]. [8]에서는 p_i 와 f_i 에 대해서 특정한 조건을 가정한 후에 smooth한 제어를 설계하였고, [9]에서는 이 조건 없이 일반적인 고차 시스템에 대한 연속 제어를 설계하였다. 그리고 [10]에서는 시간 함수를 이용한 스케일링 방법을 사용한 smooth한 다이나믹 안정화기의 설계 방법이 소개되었다.

이 논문에서는 (1)의 시스템에 대해서 다이나믹 광역 안정화 제어를 설계하고자 한다. 이를 위해 추가 다이나믹스를 설계한 다음, 역진 기법을 이용한 가상 제어기와 실제 제어를 설계하기 위해서 차수 보정법(exponent scaling)을 사용한다. 설계된 제어기들은 추가 다이나믹스의 상태 변수가 분모 부분에 들어가므로 원점 근처에서 발산가능성을 지니고 있다. 우리는 이 문제를 해결하기 위해서 차수 지표자(degree indicator)의 개념을 도입한다. 최종 설계된 제어기를 (1)의 시스템에 적용한 폐 시스템은 smooth하므로 해의 존재성과 유일성을 쉽게 증명할 수 있다. [8-9]에서는 해가 많이 존재할 수 있음에도 원점이 안정화 될 수 있다는 Global Strong Stability의 개념을 도입하였고, [10]에서는 시변 제어기이므로 존재성과 유일성을 증명하기에 어려움이 있다. 이에 반해 본 논문에서 제시되는 제어기는 원점주변에서 smooth하므로 쉽게 해의 존재성과 유일성을 증명할 수 있다.

2. Motivation

이 장에서는 간단한 예제로 이 논문의 주요 아이디어를 소개하고자 한다. 다음의 1차 시스템을 고려하자.

$$\dot{x} = u^3 + x \quad (2)$$

이 시스템은 일반적인 smooth 상태 궤환법으로는 안정화될 수 없다. 그러므로 $u = -(2x)^{1/3}$ 와 같은 연속인 제어기의 설계를 통해 안정화될 수 있다. 그러나 고차의 시스템에 대해서 역진 기법(backstepping)을 적용하기 위해서는 미분 가능한 가상의 입력이 설계되어야만 한다. 왜냐하면 어떤 단계에서 설계된 가상의 입력은 다음 단계에서 그 미분에 관계된 항들을 포함하기 때문이다. 이 장에서는 이 문제를 해결하기 위한 다이나믹 제어기의 설계 방법을 제시한다.

시스템 (2)에 대해서 다음의 다이나믹 제어를 제시한다.

저자 소개

- * 正會員 : 서울大 工大 電氣컴퓨터工學部 博士課程
- ** 正會員 : 서울大 工大 電氣컴퓨터工學部 教授 · 工博
- ** 正會員 : 서울大 工大 電氣컴퓨터工學部 教授 · 工博

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= -k_0 x_0 + \frac{\gamma x^4}{x_0} =: f_0(x_0, x), \\ u &= -x \left(\frac{\gamma + (k+1)^2}{x_0} \right)^{1/3} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 k, γ 는 이득값들이다. 이 제어기는 영역 $R^{(+,1)} := \{(x_0, x) : x_0 > 0\}$ 에서 잘 정의됨을 알 수 있고, 우리는 추가 다이나믹스의 초기값을 $x_0(0) > 0$ 으로 설정한다. 그러면 이 시스템은 0으로 수렴해가는 동안 항상 $R^{(+,1)}$ 의 영역에 머무르게 된다. 이후로는 (3)의 제어기가 (2)의 시스템에 대해서 exponential 안정화 제어기임을 보일 것이다. 이를 위해 다음 두 항목을 고려하자.

(1) 초기값 $x(0)$ 와 $x_0(0) > 0$ 에 대해서 $(x_0(t), x(t)) \in R^{(+,1)}$ 의 영역에서 (2)과 (3)의 페루프 시스템의 해 $(x_0(t), x(t))$ 는 유일한 해를 가진다.

(2) 해 $(x_0(t), x(t))$ 는 다이나믹 제어기 (3)에 의해서 exponential 안정화 된다.

(3) $f_0(x_0, x)$ 와 $u(x_0, x)$ 는 해가 원점으로 수렴하는 동안 유계하다.

항 (1)의 증명은 쉽게 이루어진다[11]. 항 (2)의 증명은 다음과 같이 리아푸노프 안정화 이론에 의해서 이루어진다. Positive definite, proper한 미분가능한 리아푸노프 함수 $V = x_0 + x^2/2$ 로 다음이 유도된다.

$$\dot{V} = -k_0 x_0 + \frac{\gamma x^4}{x_0} + x u^3 + x^2 + (-k x^2 + k x^2)$$

여기서 $k x^2$ 이 더해지고 빼졌고 k 는 이득값이다. 여기서 $-k x^2$ 는 exponential 안정화를 증명할 부분이고, $+k x^2$ 는 차수 보정법을 통해서 차수를 4로 상승시킬 것이다. smooth한 입력 u 를 설계하기 위해서는 제거될 항들 $x^2, k x^2$ 이 차수 4를 가져야 한다. 이를 위해 다음의 차수 보정법을 소개한다.

$$(k+1)x^2 \times \frac{x_0^{1/2}}{x_0^{1/2}} \leq \frac{x_0}{4} + \frac{x^4(k+1)^2}{x_0} \quad (4)$$

위의 보정법을 통해서 우리는

$$\dot{V} \leq -(k_0 - 0.25)x_0 - k x^2 + x u^3 + \frac{x^4(\gamma + (k+1)^2)}{x_0}$$

를 얻고, 제어기 (4)에 의해서

$$\dot{V} \leq -(k_0 - 0.25)x_0 - k x^2$$

의 결론에 도달하게 되어, $k_0 > 0.25, k > 0$ 의 설정으로 페루프 시스템의 원점이 exponential 안정임을 알 수 있다.

마지막으로 항 (3)의 증명을 위해 영역 $P := \{(x_0, x) : k_0 x_0^2 \geq \gamma x^4, x_0 > 0\}$ 와 $P_R := P \cap B_R$ 을 정의하자. 여기서 B_R 은 원점이 중심인 반지름이 R 인 열린(open) 구이다. 시스템의 해가 이 구에 도달하는 시간을 T_R 이라고 했을 때, 시간 $t \in [0, T_R]$ 동안 f_0 와 u 가 유계함을 쉽게 증명할 수 있다. 대신 $t \in [T_R, \infty)$ 시간 동안, 즉 영역 P_R 내에서 유계함을 증명해주어야 한다. 이 증명은 차수 지표자 D 개념의 도입으로 쉽게 해결된다.

$$D(g(x_0, x)) := \inf \beta \quad \text{subject to} \\ \limsup_{x_0 \rightarrow +0} \bar{g}(x_0) x_0^\beta < \infty$$

여기서 $\bar{g}(x_0) := \max_{\sqrt{\gamma x^4/k_0} \leq x_0} |g(x_0, x)|$ 이다. 이 정의에 의해서 함수 $g(x_0, x)$ 는 영역 P_R 내에서 유계함은 $D(g(x_0, x)) \leq 0$ 과 동치조건이다. 즉, $D(f_0) = -1, D(u) = -1/6$ 이므로 유한함을 쉽게 알 수 있다.

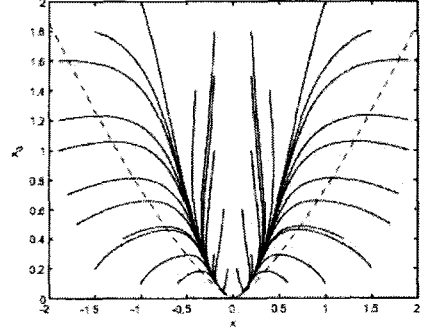


그림 1: (2)과 (3)의 페루프 시스템

그림 1은 다양한 초기값들에 대해서 (2)과 (3)의 페루프 시스템의 궤적들을 나타낸 것이다.

3. Construction of Stabilizer

이 장에서는 시스템 (1)에 대해서 역진 기법을 사용한 다이나믹 제어를 설계할 것이다. 우선 추가 다이나믹스를 다음과 같이 정의한다.

$$\dot{x}_0 = -k_0 x_0 + \frac{\gamma_1 x_1^4}{x_0} + \frac{\gamma_2 \bar{x}_2^{-\bar{p}_2}}{x_0^{q_2}}, \quad x_0(0) > 0 \quad (5)$$

여기서 $k_0 > 0$ 는 이득값, \bar{p}_2 는 짝수인 양의 정수, q_2 는 음이 아닌 실수이다. 그리고 $\bar{x}_2 = x_2 - x_2^*$ 이고 x_2^* 는 첫 단계에서 설계될 가상의 입력이다.

단계 1: 이 단계에서의 설계는 앞 장에서 설계된 제어기로 대체될 수 있다. 즉,

$$x_2^* = -x_1 \left(\frac{\gamma + (k+1)^2}{x_0} \right)^{1/3}, \quad \bar{x}_2 = x_2 - x_2^* \quad (6)$$

이 되고, 이 단계에서의 리아푸노프 함수는

$$\dot{V}_1 \leq -(k_0 - 0.25)x_0 - k x^2 + \frac{\gamma_2 \bar{x}_2^{-\bar{p}_2}}{x_0^{q_2}} + x_1(x_2^3 - x_2^{*3})$$

가 된다.

단계 2: 이 단계에서는 제어 입력 u 를 설계할 것이다. 리아푸노프 함수를 $V_2 = V_1 + \bar{x}_2^2/2$ 로 잡으면,

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -(k_0 - 0.25)x_0 - k x^2 + \frac{\gamma_2 \bar{x}_2^{-\bar{p}_2}}{x_0^{q_2}} + x_1(x_2^3 - x_2^{*3}) + \bar{x}_2 u \\ & - \bar{x}_2 \left(\frac{\partial x_2^*}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial x_2^*}{\partial x_0} x_0 \right) \end{aligned}$$

가 되고, 앞 단계에서의 항 $x_1(x_2^3 - x_2^{*3})$ 는 아래와 같이 입력에 의해 제어될 수 있는 형태로 유도된다.

$$x_1(x_2^3 - x_2^{*3}) = x_1 \bar{x}_2(x_2^2 + x_2 x_2^* + x_2^{*2}) \quad (7)$$

(7)의 관계를 위의 리아푸노프 함수에 적용하면 아래와 같이 다이내믹 제어기를 설계할 수 있다.

$$u = -k_2 \bar{x}_2 - x_1(x_2^2 + x_2 x_2^* + x_2^{*2}) + \frac{\partial x_2^*}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial x_2^*}{\partial x_0} x_0 - \frac{\gamma_2 \bar{x}_2^{-p_2-1}}{x_0^{q_2}}$$

그러면

$$\dot{V}_2 \leq -(k_0 - 0.25)x_0 - k_1 x_1^2 - k_2 \bar{x}_2^{-2}$$

가 얻어진다. $k_0 > 0.25$, $k_1, k_2 > 0$ 인 이득값들의 설정으로 (1)과 (7)의 폐루프 시스템의 원점이 exponential 안정임을 쉽게 알 수 있다.

4. Degree Indicator of the controller

이 장에서는 설계된 제어기가 유한함을 증명할 것이다. 2장에서와 같이 영역 P_R 내에서의 유한함을 보이는 것으로 제어기의 유한함을 보이는 것이 충분할 것이다. 차수 지표자는

$$D(g(x_0, x)) := \inf \beta \quad \text{subject to} \\ \limsup_{x_0 \rightarrow +0} \bar{g}(x_0) x_0^\beta < \infty$$

와 같이 정의되고, 여기서 $\bar{g}(x_0) := \max_{P_R} |g(x_0, x)|$ 이다. 이 차수 지표자의 성질들은 [12]에서 참고할 수 있다. 앞 장에서와 같이 f_0 와 가상의 입력 x_2^* 의 차수 지표자값은 $D(f_0) = -1$, $D(x_2^*) = -1/6$ 이다. 이로부터 $D(x_2) \leq \max\{-1, -(q_2+1)/\bar{p}_2, -1/6\}$ 가 얻어진다. 또한 u 의 마지막 항으로부터 $D(\bar{x}_2^{-p_2-1}/x_0^{q_2}) \leq -1 + (q_2+1)/\bar{p}_2$ 가 얻어진다. 그러므로 우리는 \bar{p}_2, q_2 의 범위를 $1 \geq (q_2+1)/\bar{p}_2 \geq 1/6$ 으로 설정한다. 그러면 $D(x_2) \leq -1/6$ 가 된다.

다음으로 가상의 입력 x_2^* 의 편미분에 대해서 알아보자. 제어입력에는 x_2^* 의 x_1, x_0 에 대한 미분이 포함되어 있다. 각각의 차수 지표자값들은

$$D\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{3}, \quad D\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial x_0}\right) = \frac{5}{6}$$

이다. 이를 바탕으로

$$D\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial x_1} x_1\right) \leq \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}, \quad D\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial x_0} x_0\right) \leq \frac{5}{6} - 1 = -\frac{1}{6}$$

가 유도된다. 마지막으로 항 $x_1(x_2^2 + x_2 x_2^* + x_2^{*2})$ 의 차수 지표자는

$$D(x_1(x_2^2 + x_2 x_2^* + x_2^{*2})) \leq -\frac{1}{2} + \max\left\{-1, -\frac{1}{2} - \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right\} \leq -\frac{5}{6}$$

가 되어, 우리는 제어 입력 u 의 모든 항들이 모두 음의 차수 지표자값들을 가져서 영역 P_R 내에서 유한함을 알 수 있다.

5. Conclusion

본 논문에서는 자코비안 선형화가 제어불가능하고 불안정

한 시스템에 대한 다이내믹 안정화 제어기를 제시하였다. 추가된 다이내믹스의 상태변수를 이용한 지수 보정법을 통한 역진 기법을 사용하여 가상의 입력과 제어 입력을 설계하였고, 원점 주변에서 특이 현상이 없음을 보이기 위해서 차수 지표자의 개념을 통해서 제어기들이 유한함을 보였다. 차후의 연구는 일반적인 고차의 시스템으로 확장이 될 것이다.

참고 문헌

- [1] R.W. Brockett, Asymptotic stability and feedback stabilization, Differential Geometric Control Theory, Birkhauser, Basel, pp. 181-191, 1983.
- [2] M. Kawski, "Stabilization of nonlinear systems in the plane", Systems Control Lett., vol. 12, no. 2, pp. 169-175, 1989.
- [3] M. Kawski, "Homogeneous stabilizing feedback laws", Control Theory Adv. Technol., vol. 6, pp. 497-516, 1990.
- [4] W.P. Dayawansa, "Recent advances in the stabilization problem for low dimensional systems", Proceedings of second IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems Design Symposium, Bordeaux, pp. 1-8, 1992.
- [5] W.P. Dayawansa, C.F. Martin, G. Knowles, "Asymptotic stabilization of a class of smooth two dimensional systems", SIAM J. Control Optim. vol. 28, pp. 1321-1349, 1990.
- [6] J.M. Coron, L. Praly, "Adding an integrator for the stabilization problem", Systems Control Lett., vol. 17, pp. 89-104, 1991.
- [7] M. Tsiniias, J. Tsiniias, "Explicit formulas of feedback stabilizers for a class of triangular systems with uncontrollable linearization", Systems Control Lett., vol. 38, pp. 115-126, 1999.
- [8] W. Lin, C. Qian, "Adding one power integrator: a tool for global stabilization of high-order lower-triangular systems", Systems Control Lett. vol. 28, pp. 339-351, 2000.
- [9] C. Qian, W. Lin, "Non-Lipschitz continuous stabilizers for nonlinear systems with uncontrollable unstable linearization", Systems Control Lett., vol. 42, pp. 185-200, 2001.
- [10] D.B. Dačić, P.V. Kokotović, "A scaled feedback stabilization of power integrator triangular systems", Automatica, vol. 54, pp. 645-653, 2005.
- [11] H.K. Khalil, Nonlinear Systems, NJ:Prentice-Hall, 3rd edition, 2002.
- [12] S. Seo, H. Shim, J.H. Seo, "Global finite-time stabilization of a nonlinear system using dynamic exponent scaling", Proc. 47th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico pp. 3805-3810, 2008.