

# 통신지연을 갖는 고차 선형시스템들의 상태일치

## Consensus of High-order Linear Systems With Communication Delay

최현철\*, 김수범\*\*, 김성준\*\*, 심형보\*\*\*, 서진현\*\*\*

Hyoun-Chul Choi, Subum Kim, Seongjun Kim, Hyungbo Shim, Jin Heon Seo

**Abstract** - This paper deals with the consensus problem for multi-agent linear dynamic systems with communication delay. All the agents are identical high-order linear systems and their state information is exchanged through a communication network with constant communication delay. It is shown that a consensus is achieved if there exists a feasible solution to a set of linear matrix inequalities obtained for a simultaneous stabilization problem for multiple systems with delay. A numerical example is presented to show the effectiveness of the proposed method.

**Key Words** : Consensus, high-order linear systems, time delay, simultaneous stabilization, linear matrix inequality.

### 1. 서론

무인항공기의 협동제어, 이동로봇의 대형 이루기 및 센서 네트워크의 통신문제 등의 응용을 위하여 최근 들어 다개체 시스템의 상태일치 문제에 대한 많은 연구가 이루어졌다[1, 2]. 그러나 대부분의 결과는 단일 적분기 또는 이중 적분기를 개체로 갖는 다개체 시스템에 국한된다[1]. 최근, 고차 시스템을 개체로 갖는 다개체 시스템의 상태일치 문제가 연구되고 있으나[2], 통신지연을 갖는 다개체 시스템의 상태일치에 대한 연구 결과는 미흡하다. 비록 시간지연이 있는 고차 비선형 시스템의 상태일치 문제에 대한 결과[3]가 최근 발표되었지만, 그 결과는 궤환선형화가 가능하고 상대차수(relative degree)가 1인 시스템에만 적용가능하다는 한계가 있다.

이 논문에서는 통신지연을 갖는 고차 다개체 시스템의 상태일치 문제가 어느 특정한 다중 시간지연 시스템의 동시 점근안정화 문제 해법에 의해 풀릴 수 있음을 보이고, 선형행렬 부등식(LMI) 기법[4]을 이용하여 시간지연 시스템의 동시 점근안정화 문제 해법을 제시함으로써 통신지연을 갖는 고차 다개체 시스템의 상태일치 문제 해법을 제시한다. 이 논문의 결과는 상대차수에 대한 제한이 없다. 또한, 이 논문에서 제안하는 LMI 조건은 기존에 많이 연구되어 왔던 Moon 부등식[5] 기반의 지연종속적 LMI 조건[6]에 비해 덜 보수적이다. 예제를 통해, 이 논문에서 제안하는 기법의 유용성을 보인다.

### 2. 상태일치 문제

이 논문에서 고려하는 다개체 시스템은 각 개체가 동일한  $n$ 차 선형시불변 시스템으로 표현되며 시간지연이 존재하는

통신망을 통해 각 개체들이 상태정보를 서로 교환하는 시스템이다. 문제 설정을 위해, 다음과 같이  $N$ 개의 동일한  $n$ 차 선형시불변 시스템으로 이루어진 다개체 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}^i(t) = Ax^i(t) + Bu^i(t), \quad x^i \in R^n, \quad u^i \in R^m \quad (1)$$

여기서  $i \in \Pi = \{1, \dots, N\}$ 는 개체의 식별번호,  $x^i$ 는 상태변수,  $u^i$ 는 입력변수이다. 또한 시스템 행렬은 적절한 차원을 가지며 쌍  $(A, B)$ 가 안정화가가능하다고 가정한다. 이 개체들 사이의 통신 토폴로지(topology)는 가중 무방향성 그래프(weighted undirected graph)  $\Gamma = (\Pi, e, \Omega)$ 로 표현된다. 이 때  $\Pi$ 는 노드(node) 집합,  $e$ 는 에지(edge) 집합,  $\Omega$ 는 가중인접(weighted adjacency) 행렬을 의미한다. 통신지연의 경우 일반적인 경우인 시변 통신지연을 고려하는 것이 마땅하겠으나, 이 논문에서는 문제를 보다 간단하게 하기 위하여 일정한 상수 값을 갖는 시간지연만을 고려한다. 시간지연  $h > 0$ , 인접행렬  $\Omega = [\omega_{ij}]$  및  $\Gamma$ 의 Laplacian 행렬  $L = [l_{ij}]$ 이 주어지면,  $i$ 번째 개체는 이웃 개체들로부터 다음 규칙에 따라 상태정보를 수집한다.

$$z^i(t) = \sum_{j \in \Pi_i} \omega_{ij} (x^j(t-h) - x^i(t-h)) = - \sum_{j \in \Pi} l_{ij} x^j(t-h) \quad (2)$$

여기서  $\Pi_i = \{j \in \Pi : \omega_{ij} \neq 0\}$ 이다. 이 정보는 다음 식과 같이 이득  $K$ 와 곱해져 각 개체에 궤환된다.

$$u^i(t) = Kz^i(t) = -K \sum_{j \in \Pi} l_{ij} x^j(t-h) \quad (3)$$

이 논문에서는 임의의 초기값을 갖는 다개체 시스템의 상태를 상수 값 또는 각 개체의 동역학에 의존하는 시변 궤적에 일치시키는 이른바 상태일치 문제를 고려한다. 이 상태일치 문제는 모든  $i = 1, \dots, N$ 에 대해 다음 조건을 만족시키는 신호  $\zeta(t) \in R^n$ 가 존재하면 풀린다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x^i(t) - \zeta(t)) = 0$$

여기서 우리는 상태일치가 이루어지면 식 (2)에 의해  $z^i(t)$ 가 0으로 수렴하고 입력  $u^i(t)$ 도 식 (3)에 의해 0으로 수렴하는

저자 소개

\* 正會員 : 서울大學校 電氣컴퓨터工學部 博士後研究員 · 工博

\*\* 準會員 : 서울大學校 電氣컴퓨터工學部 碩士課程

\*\*\* 正會員 : 서울大學校 電氣컴퓨터工學部 教授 · 工博

것을 알 수 있으며, 결국  $\zeta(t)$ 가  $\dot{\zeta}(t) = A\zeta(t)$ 를 만족하게 됨을 알 수 있다. 이는 상태일치된 신호  $\zeta(t)$ 가 각 개체의 내부 동역학에 의해 규정됨을 의미한다. 다양한 (특히 진동하는) 신호  $\zeta(t)$ 를 얻기 위해 다음과 같은 가정을 한다.

**가정 1:**  $A$ 의 모든 고유값은 복소평면의 닫힌 좌반부에 존재하며 한 개 이상의 고유값이 허수축 상에 존재한다.

이 논문에서는 개체들 사이의 통신 토폴로지를 가중 무방향성 그래프로 가정하였다. 무방향성 그래프의 통신 토폴로지 상에서 모든 개체들의 상태를 일치시키려면 그래프  $\Gamma$ 가 연결되어(connected) 있어야 한다.

**가정 2:** 무방향성 그래프  $\Gamma$ 는 연결되어 있다.

가정 2를 만족시키기 위한 필요충분조건은  $L$ 의 고유값 0의 대수적 다중도(algebraic multiplicity)가 1이 되는 것이다[1]. 따라서 이 논문에서는 Laplacian 행렬  $L$ 의 고유값 0의 대수적 다중도가 1인 경우만 고려한다. 참고로, 무방향성 그래프의 Laplacian 행렬  $L$ 은 대칭행렬이며 음이 아닌 실수와 적어도 하나 이상의 0을 고유값으로 갖는다.

### 3. 동시 안정화에 의한 상태일치

이 절에서는 주어진 상태일치 문제가 어느 특정한 다중 시간지연 시스템의 동시 점근안정화 문제로 바뀔 수 있음을 보인다. 즉, 특정한 다중 시스템을 동시에 점근적으로 안정화하는 제어가 존재하면 주어진 상태일치 문제가 풀린다는 것을 보인다.

$\bar{x} := [x^1; \dots; x^N]$ 로 정의하고 시스템 (1)에 제어입력 (3)을 적용하면 전체 시스템은 다음 식으로 표현된다.

$$\dot{\bar{x}}(t) = (I_N \otimes A)\bar{x}(t) - (L \otimes BK)\bar{x}(t-h)$$

이 식에  $L$ 을 대각행렬  $\Lambda$ 로 변환하는, 즉  $TLT^{-1} = \Lambda$ 로 변환하는 비특이행렬  $T$ 로 좌표변환  $\bar{\xi} := (T \otimes I_n)\bar{x}$ 을 행하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\xi}}(t) &= (T \otimes I_n)(I_N \otimes A)(T^{-1} \otimes I_n)\bar{\xi}(t) \\ &\quad - (T \otimes I_n)(L \otimes BK)(T^{-1} \otimes I_n)\bar{\xi}(t-h) \\ &= (I_N \otimes A)\bar{\xi}(t) - (\Lambda \otimes BK)\bar{\xi}(t-h) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 초기값은  $\bar{\xi}(0) = (T \otimes I_n)\bar{x}(0) \in R^{Nn}$ 이다. 식 (4)는 대각화된 시스템 방정식이므로 다음 식을 만족한다.

$$\dot{\xi}^i(t) = A\xi^i(t) - \lambda_i(L)BK\xi^i(t-h) \quad (5)$$

여기서  $[\xi^1; \dots; \xi^N] = \bar{\xi}$ 이고  $\lambda_i(L)$ 는  $L$ 의 고유값이다( $i=1, \dots, N$ ).  $L$ 의 고유값이 음이 아닌 실수이고 가정 2에 의해 고유값 0의 대수적 다중도가 1이므로 편의상  $\lambda_1(L) = 0$ 으로 정의하고 나머지 고유값은  $0 < \lambda_2(L) \leq \dots \leq \lambda_N(L)$ 으로 놓는다. 만약 시스템 (5) 중  $i=2, \dots, N$ 에 해당하는 시스템이 동시에 점근적으로 안정하게 되면 이들(즉  $\xi^i(t)$ 를 제외한 나머지 개체)의 상태들은 0으로 수렴하게 된다.  $T$ 가  $TLT^{-1} = \Lambda$ 을 만족하고  $\lambda_1(L) = 0$ 이므로,  $L$ 의 0-고유값에 해당하는 고유벡터인 1-벡터가  $T^{-1}$ 의 첫 번째 열에 놓이게 된다.  $\bar{x} = (T^{-1} \otimes I_n)\bar{\xi}$ 이고 모든  $i=2, \dots, N$ 에 대한  $\xi^i$ 가 0으로 수렴하므로 결국에는  $x^i$  ( $i=1, \dots, N$ )가  $\xi^1$ 로 수렴하게 된다. 이러한 논의를 토대로 논문 [2]의 정리 1을 시간지연 시스템의 경우로 확장하면 다음 결과를 얻을 수 있다.

**정리 1:** 가정 1, 2가 만족한다고 하자. 모든  $i=2, \dots, N$ 에

대해  $N-1$ 개의 시스템

$$\dot{\xi}^i(t) = A\xi^i(t) - \lambda_i(L)BK\xi^i(t-h) \quad (6)$$

이 동시에 점근적으로 안정하면 주어진 상태일치 문제는 풀린다. 즉, 임의의 초기값에 대해 제어입력 (3)을 적용한 시스템 (1)의 해는

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} (x^i(t) - \zeta(t)) &= 0, \quad i=1, \dots, N \\ \zeta(t) &= \sum_{j=1}^{r^*} \sum_{k=1}^{m_j} \sum_{l=0}^{m_j-k} \frac{\mu_{(j,k+l)} t^l e^{\lambda_j t}}{l!} v_{(j,k)} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서  $\lambda_j$  ( $j=1, \dots, r^*$ )는 허수축 상에 존재하는  $A$ 의 고유값이고, 벡터집합  $\{v_{(j,1)}, \dots, v_{(j,m_j)}\}$ 는  $A$ 의  $j$ 번째 Jordan 블록  $J_{m_j}(\lambda_j)$ 에 대응되는 일반화된 고유벡터의 사슬(chain)이다. 또한  $[\mu_{(1,1)}; \dots; \mu_{(1,m_1)}; \mu_{(2,1)}; \dots; \mu_{(2,m_2)}; \dots; \mu_{(r,m_r)}] = Mx^i(0)$ 이고 이때  $M$ 은  $A$ 를 Jordan 표준형으로 변환하는 행렬로서  $J_A = MAM^{-1}$ 을 만족하는 행렬이다. ■

### 4. 동시 안정화 제어가 설계: LMI 기법

이 절에서는 앞 절의 논의를 토대로 하여, 특정 LMI 식의 해가 존재하면 주어진 상태일치 문제가 풀린다는 것을 보이며 그 결과로 상태일치를 이루는 제어가 있음을 제시한다. 다음 보조정리는 주요 정리(정리 2)의 결과를 유도하는데 필요한 결과이다.

**보조정리 1 [7]:** 임의의 행렬  $R > 0$  및 스칼라  $h > 0$ 에 대해 다음 식이 만족한다.

$$\begin{aligned} -h \int_{t-h}^t \dot{x}(\tau)^T R \dot{x}(\tau) d\tau &\leq - \left( \int_{t-h}^t \dot{x}(\tau) d\tau \right)^T R \left( \int_{t-h}^t \dot{x}(\tau) d\tau \right) \\ &= - [x(t)^T \quad x(t-h)^T] \begin{bmatrix} R & -R \\ -R & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**정리 2:** 가정 1, 2가 만족한다고 하자. 주어진 스칼라  $\gamma > 0$  및  $\bar{h}$  ( $0 < h \leq \bar{h}$ )에 대해 LMI (8)을 만족하는 행렬들  $X > 0$ ,  $Y$  및  $Z > 0$ 가 존재하면 식 (1)과 (3)으로 주어지는 다개체 시스템들의 상태일치가 이루어진다. 이 때, 상태레환 제어이득은  $K = YX^{-1}$ 으로 주어진다.

$$\begin{bmatrix} XA^T + AX + Z - \gamma \bar{h}^{-1} X & * & * \\ -\lambda_i Y^T B^T + \gamma \bar{h}^{-1} X & -Z - \gamma \bar{h}^{-1} X & * \\ \gamma \bar{h} AX & -\gamma \lambda_i \bar{h} BY & -\gamma \bar{h} X \end{bmatrix} < 0, \quad i=2, \dots, N \quad (8)$$

여기서, \*는 대칭행렬의 대칭요소를 의미하고,  $\lambda_i$ 는  $\lambda_i(L)$ 을 편의상 줄여 쓴 것이다.

**증명:** 정리 1에 의해 이 정리의 증명은 식 (8)의 조건이,  $N-1$ 개의 시스템

$$\dot{\xi}^i(t) = A\xi^i(t) - \lambda_i B v^i(t), \quad i=2, \dots, N \quad (9)$$

을 동시에 점근 안정화하는 시간지연 상태레환 제어입력  $v^i(t) = K\xi^i(t-h)$ 를 존재하게 할 충분조건임을 보이면 된다.

Lyapunov-Krasovskii 함수를 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned} V(t, \bar{\xi}) &= \sum_{i=2}^N (\xi^i(t)^T P \xi^i(t) + \int_{t-h}^t \xi^i(\alpha)^T Q \xi^i(\alpha) d\alpha \\ &\quad + \gamma \int_{-h}^0 \int_{t+\beta}^t \xi^i(\alpha)^T P \xi^i(\alpha) d\alpha d\beta), \quad P > 0, Q > 0, \gamma > 0 \end{aligned}$$

여기서  $\bar{\xi} = [\xi^2; \dots; \xi^N]$ 으로 정의된다. 시스템 (9)의 상태레환에 따른 이 함수의 시간미분을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \bar{\xi}) = & \sum_{i=2}^N (\xi^i(t)^T (A^T P + PA) \xi^i(t) - 2\lambda_i \xi^i(t)^T PBK \xi^i(t-h) \\ & + \xi^i(t)^T Q \xi^i(t) - \xi^i(t-h)^T Q \xi^i(t-h) + \gamma h \xi^i(t)^T P \xi^i(t) \\ & - \gamma \int_{t-h}^t \xi^i(\alpha)^T P \xi^i(\alpha) d\alpha \end{aligned}$$

위 식에  $h \leq \bar{h}$ 의 관계와 보조정리 1을 적용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \bar{\xi}) & \leq \sum_{i=2}^N (\xi^i(t)^T (A^T P + PA) \xi^i(t) - 2\lambda_i \xi^i(t)^T PBK \xi^i(t-h) \\ & + \xi^i(t)^T Q \xi^i(t) - \xi^i(t-h)^T Q \xi^i(t-h) \\ & + \gamma \bar{h} [\xi^i(t)^T \xi^i(t-h)^T] \begin{bmatrix} A^T P A & -\lambda_i P B K \\ -\lambda_i K^T B^T P & \lambda_i^2 K^T B^T P B K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^i(t) \\ \xi^i(t-h) \end{bmatrix} \\ & - \gamma \bar{h}^{-1} [\xi^i(t)^T \xi^i(t-h)^T] \begin{bmatrix} P & -P \\ -P & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^i(t) \\ \xi^i(t-h) \end{bmatrix} \\ & = \sum_{i=2}^N [\xi^i(t)^T \xi^i(t-h)^T] \Psi_i \begin{bmatrix} \xi^i(t) \\ \xi^i(t-h) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

여기서

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} A^T P + PA + Q + \gamma \bar{h} A^T P A - \gamma \bar{h}^{-1} P & * \\ -\lambda_i K^T B^T P - \gamma \bar{h} \lambda_i K^T B^T P A + \gamma \bar{h}^{-1} P & \gamma \bar{h} \lambda_i^2 K^T B^T P B K - \gamma \bar{h}^{-1} P \end{bmatrix}$$

이다. 따라서  $i=2, \dots, N$ 에 대해  $\Psi_i < 0$ 을 만족하는 행렬들  $P > 0, Q > 0, K$ 가 존재하면 시스템 (9)는 동시에 점근적으로 안정하게 된다.  $\text{blockdiag}(P^{-1}, P^{-1})$ 에 의한 합동변환과 변수치환  $X = P^{-1}, Y = KP^{-1}, Z = P^{-1}QP^{-1}$ 을  $\Psi_i < 0$ 에 적용하고 결과 식에 다시 Schur 보수법[4]을 적용하면  $\Psi_i < 0$ 와 동치인 식 (8)을 얻을 수 있다. ■

위의 정리에서 식 (8)을 선형부등식으로 만들기 위해 양의 스칼라  $\gamma$ 를 주어진 것으로 가정하였다. 실제 식 (8)의 해를 구하려면  $\gamma$ 의 값을 찾아야 한다. 이 논문에서는  $\gamma$ 가 스칼라이므로  $\gamma$ 에 대한 선형탐색을 통해 LMI (8)의 해를 구한다.

## 5. 예제

다음 식으로 표현되는, 4개의 동일한 2자유도 스프링-질량 시스템을 고려하자. (감쇠율이 0이라 시스템 극점이 모두 허수축 상에 존재한다.)

$$\dot{x}^i(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -10 & 0 \end{bmatrix} x^i(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u^i(t), \quad i=1, \dots, 4$$

Laplacian 행렬과 그 고유값은 각각 다음과 같이 주어진다.

$$L = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 & -2 \\ -4 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -5 \\ -2 & 0 & -5 & 7 \end{bmatrix}, \quad \{\lambda_1(L), \dots, \lambda_4(L)\} = \{0, 4.8873, 8.8164, 14.2964\}$$

통신지연은 0.3초라 가정하고 각 개체의 초기값은 무작위로 부여하였다. MATLAB LMI Control Toolbox를 이용하여,  $\bar{h}=0.3$  및  $\gamma=0.2$ 일 때의 LMI 식 (8)의 해를 구하면 다음과 같다.

$$X = \begin{bmatrix} 2332.0 & 2291.4 & -113.3 & -107.8 \\ 2291.4 & 2304.7 & -117.0 & -115.0 \\ -113.3 & -117.0 & 70.6 & 16.4 \\ -107.8 & -115.0 & 16.4 & 71.5 \end{bmatrix}$$

$$Y = [3.4858 \quad 3.2394 \quad -0.5171 \quad 4.0875]$$

$$Z = \begin{bmatrix} 117.4596 & 117.1589 & -11.5313 & -10.1098 \\ 117.1589 & 118.0336 & -11.7007 & -10.2646 \\ -11.5313 & -11.7007 & 3.1472 & 1.5087 \\ -10.1098 & -10.2646 & 1.5087 & 1.2099 \end{bmatrix}$$

이에 해당하는 제어기 이득은 다음과 같다.

$$K = [-0.0029 \quad 0.0068 \quad -0.0163 \quad 0.0676]$$

그림 1에, 주어진 다개체 시스템의 상태일치 결과를 나타내었다. 이로부터, 임의의 초기값을 갖는 모든 상태들이 램프(ramp) 및 정현파와 궤적으로 일치되어 가는 것을 확인할 수 있다. 성능 비교를 위해, Moon 부등식 기반의 조건[6]을 통해 이 시스템을 안정화하는 제어이득을 구하려 하였으나 그 조건은 이 문제의 해를 내어주지 못하였다.

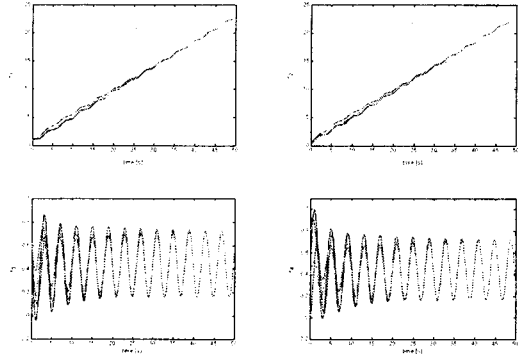


그림 1. 4개의 2자유도 스프링-질량 시스템의 상태일치

## 6. 결론

이 논문에서는 통신지연이 있는 고차 다개체 시스템의 상태일치 문제가 어느 특정한 다중 시간지연 시스템의 동시 점근안정화 문제 해법에 의해 풀릴 수 있음을 보였고, 선형행렬 부등식(LMI) 기법을 이용하여 시간지연 시스템의 동시 점근안정화 문제 해법을 제시함으로써 통신지연을 갖는 고차 다개체 시스템의 상태일치 문제 해법을 제시하였다.

## 참고문헌

- [1] W. Ren, W. Beard, *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control*, Springer, 2008.
- [2] J.H. Seo, H. Shim, J. Back, "Consensus of high-order linear systems using dynamic output feedback compensator: low gain approach," submitted, 2009.
- [3] N. Chopra, W. Spong, "Output synchronization of nonlinear systems with relative degree one," *Recent Advances in Learning and Control, LNCIS 371*, pp. 51-64, 2008.
- [4] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, 1994.
- [5] Y.S. Moon, P. Park, W.H. Kwon, Y.S. Lee, "Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems," *Int. J. Control*, vol. 74, no. 14, pp. 1447-1455, 2001.
- [6] H. Du, N. Zhang, " $H_\infty$  control of active vehicle suspensions with actuator time delay," *J. Sound Vibration*, vol. 301, pp. 236-252, 2007.
- [7] Q.-L. Han, D. Yue, "Absolute stability of Lur'e systems with time-varying delay," *IET Control Theory Appl.*, vol. 1, no. 3, pp. 854-859, 2007.