유한요소법을 이용한 원형 평판의 면내 고유진동 해석
In-plane Natural Vibration Analysis of a Circular Plate by Using Finite Element Method

김창부† 곽동희*
Kim, Chang-Boo Kwak, Dong-Hee

ABSTRACT

We present an 1-dimensional annular disk element with which natural vibration of a circular plate can be analyzed accurately and facilely. The natural vibration characteristics of a circular plate with free outer boundary are analyzed by using the presented 1-dimensional element. Its results are compared with the results obtained by utilizing 2-dimensional 8-node quadrilateral plane element and cyclic symmetry of the circular plate. And also, by comparing with the theoretical results of previous researchers, the accuracy and facility of the presented 1-dimensional element are verified.

1. 서 론

공학 구조물에서 중요한 요소 중에 하나인 원형 평판의 고유진동에 관한 연구는 주로 굽힘 진동인 면외진동에 대하여 오래 전부터 많은 연구자에 의해서 수행되어 왔으나 면내진동에 대한 연구는 면외진동에 비해서 많은 편은 아니지만 최근에 활발히 수행되었으며 대표적인 연구 논문은 참고문헌(1−9)과 같다.

본 논문에서는 원형 평판의 면내 변위를 원주각에 대하여 Fourier 급수로 표현하고 Fourier 급수의 지수인 절 직경 수에 따르는 반경방향 1차원 2절점 환상 디스크 요소를 사용하여 유한요소 진동방정식을 구축하여 면내 고유진동을 해석한다. 반경방향 1차원 유한요소의 보간 함수로는 환상 디스크의 면내 정적 변형모드가 사용된다. 제시된 1차원 유한요소 모델의 정밀성을 검증하기 위해서 경계가 자유인 평판의 고유진동을 제시된 1차원 유한요소 모델 및 순환대칭성을 이용하는 2차원 8절점 사변형 평면요소 모델을 사용하여 해석하고, 그 결과를 이론적 결과와 비교하고 검토한다.

2. 운동방정식

2.1 원형 평판의 운동방정식

반경 방향으로 r, 원주 방향으로 θ에 위치하면서 외경이 a, 내경이 b인 원형 평판의 중간 면에 수직한 단선(cross line)의 면내 변위인 반경방향 변위 $u_r(r,\theta)$ 및 원주방향 변위 $u_\theta(r,\theta)$에 대한 운동 방정식은 응력과 변형도의 관계를 평면응력으로 가정하면 다음과 같다.

† 책임저자 : 정회원, 인하대학교, 기계공학부, 교수
E-mail : kimcb@inha.ac.kr
TEL : (032)860-7383 FAX : (032)868-1716
* 비회원, 인하대학교, 기계공학과, 석사과정

$$\rho h r \ddot{u}_r = (rN_{rr})_{,r} + N_{\theta r,\theta} - N_{\theta\theta},$$
$$\rho h r \ddot{u}_\theta = (rN_{r\theta})_{,r} + N_{\theta\theta,\theta} + N_{\theta r} \qquad (1)$$

여기서

$$N_{rr} = \overline{E}h\left\{u_{r,r} + \nu\frac{1}{r}(u_{\theta,\theta} + u_r)\right\},$$
$$N_{\theta\theta} = \overline{E}h\left\{\nu u_{r,r} + \frac{1}{r}(u_{\theta,\theta} + u_r)\right\},$$
$$N_{r\theta} = N_{\theta r} = Gh\left\{u_{\theta,r} + \frac{1}{r}(u_{r,\theta} - u_\theta)\right\},$$
$$\overline{E} = E/(1-\nu^2),\ G = E/2(1+\nu),$$

ρ는 밀도, h는 축 방향 두께, E는 Young 계수, ν는 Poisson 비이다.

또한 경계 $r=a$ 혹은 b에서의 경계조건은 경계가 고정인 경우 및 자유인 경우에는 각각 다음과 같다.

$$u_r = u_\theta = 0 \quad \text{for clamped edge,}$$
$$N_{rr} = N_{r\theta} = 0 \quad \text{for free edge} \qquad (2)$$

2.2 원형 평판의 고유진동 방정식

원형 평판의 면내변위 $u_r(r,\theta)$ 및 $u_\theta(r,\theta)$는 z－축에 대한 축 대칭성을 고려하면 다음과 같이 Fourier 급수로 표현된다.

$$u_r = u_{rC0} + \sum_{n=1}^{\infty}(u_{rCn}\cos n\theta + u_{rSn}\sin n\theta),$$
$$u_\theta = u_{\theta C0} + \sum_{n=1}^{\infty}(u_{\theta Cn}\cos n\theta + u_{\theta Sn}\sin n\theta) \qquad (3)$$

r만의 함수인 변위 u_{rC0} 및 $u_{\theta S0}$을 다음과 같이 절점변위벡터 u_{C0}와 보간 함수 $N_{r0}(r)$ 및 $N_{\theta 0}(r)$을 사용하여 다음과 같이 표현하고,

$$u_{rC0} = N_{r0}(r)^T u_{C0},\ u_{\theta C0} = N_{\theta 0}(r)^T u_{C0} \qquad (4)$$

또한, $n \geqq 1$에 대하여 r만의 함수인 변위 u_{rCn}, u_{rSn}, $u_{\theta Cn}$ 및 $u_{\theta Sn}$을 다음과 같이 절점변위벡터 u_{Cn} 및 u_{Dn}과 보간 함수 $N_{rn}(r)$ 및 $N_{\theta n}(r)$을 사용하여 다음과 같이 표현하면,

$$u_{rCn} = N_{rn}(r)^T u_{Cn},\ u_{rSn} = N_{rn}(r)^T u_{Dn},\ u_{\theta Cn} = -N_{\theta n}(r)^T u_{Dn},\ u_{\theta Sn} = N_{\theta n}(r)^T u_{Cn} \qquad (5)$$

식(1)의 약형(weak form)인 가상일의 원리 식으로부터 Fourier 급수의 지수인 절 직경 수(number of nodal diameters) n에 대한 운동방정식이 다음과 같이 얻어진다.

For $n=0$
$$[M_0]\{\ddot{u}_{C0}\} + [K_0]\{u_{C0}\} = 0 \qquad (6)$$

For $n \geqq 1$

$$\begin{bmatrix} M_n & 0 \\ 0 & M_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{Cn} \\ \ddot{u}_{Dn} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_n & 0 \\ 0 & K_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{Cn} \\ u_{Dn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{7}$$

여기서

$u_{C0} = (u_{rC01}, u_{\theta C01}, u_{rC02}, u_{\theta C02}, \cdot\cdot, u_{rC0m}, u_{\theta C0m})^T,$
$u_{Cn} = (u_{rCn1}, u_{\theta Sn1}, u_{rCn2}, u_{\theta Sn2}, \cdot\cdot, u_{rCnm}, u_{\theta Snm})^T,$
$u_{Dn} = (u_{rSn1}, -u_{\theta Cn1}, u_{rSn2}, -u_{\theta Cn2}, \cdot\cdot, u_{rSnm}, -u_{\theta Cnm})^T,$
m = Number of free nodes

고유진동수 ω, 절 직경 수 n의 순환대칭 모드로 진동하는 디스크의 절점 변위를 다음과 같이 표현하면,

$$u_{Cn} = U_{Cn}\cos\omega t,\ u_{Dn} = U_{Dn}\cos\omega t \tag{8}$$

식(6)과 (7)로부터 다음과 같은 고유진동 방정식이 얻어진다.

For $n=0$
$$[K_0 - \omega^2 M_0]\{U_{C0}\} = 0 \tag{9}$$

For $n \geqq 1$
$$\begin{bmatrix} K_n - \omega^2 M_n & 0 \\ 0 & K_n - \omega^2 M_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{Cn} \\ U_{Dn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{10}$$

$n \geqq 1$에 대하여 식(10)으로부터 얻어지는 고유진동수 $\omega \geqq 0$는 항상 이중이고, 이중인 고유진동수에 대응하는 고유벡터 $(U_{Cn}^T \ \ U_{Dn}^T)$는 $(U_n^T \ \ 0^T)$ 또는 $(0^T \ \ U_n^T)$이 되므로 고유벡터 $(0^T \ \ U_n^T)$에 대한 모드형상은 고유벡터 $(U_n^T \ \ 0^T)$에 대한 모드형상에 대하여 z-축 방향으로 $\pi/2n$만큼 회전된다.

두께가 일정한 1차원 2절점 환상 디스크 요소의 보간 함수는 식(3)을 식(1)에 대입하여 각각의 절 직경 수 n에 대하여 유도된 운동방정식에서 운동 효과를 무시한 정적 평형방정식으로부터 구해지는 면내 변위의 일반해(9)를 사용하여 얻어진다.

3. 원형 평판의 고유진동

수치해석에서 사용된 원형 평판의 물성치 및 크기는 다음과 같다.

$\rho = 7850$ kg/m3, $E = 207$ GPa, $\nu = 0.3$, $a = 1.0$ m

도표 1에는 외부경계가 자유인 원형 평판의 고유진동 수를 1차원 유한요소 모델(1-D FE model) 및 2차원 유한요소 모델(2-D FE model)을 사용하여 절 직경 수 $n = 0,1,2,3,9$에 대하여 각각 계산하고, 절 직경 수 각각에 대한 최저차 4개의 탄성 모드에 관한 고유진동수 파라미터를 이론적 결과와 비교하여 제시하였다. 1차원 유한요소 모델에서는 $b/a = 0.001$의 환상 평판을 반경방향으로 512등분하여 1차원 2절점 환상 디스크 요소를 사용하였으며, 2차원 유한요소 모델에서는 원형 평판을 원주방향으로 72등분하고 등분된 부채꼴 평판 단편을 반경방향으로 64등분, 원주방향으로 2등분하여 분할하고, 평판의 중심점을 포함하는 요소(요소의 반경방향 길이는 $a \times 0.1/64$)를 추가하여 2차원 8절점 4변형 평면요소(10)를 사용하면서 부채꼴 평판 단편의 순환대칭성을 이용하는 해석 기법(11)을 사용하였다. 도표 2에는 사

용된 1차원 유한요소 모델 및 2차원 유한요소 모델의 기본 데이터가 제시되어 있고, 두 개의 유한요소 모델의 자유도 수는 거의 같다.

절 직경 수 $n=0$에 대한 1차 모드는 강체 회전 모드이고, 절 직경 수 $n=1$에 대한 1 및 2차 모드는 강체 병진모드이다. 모델링이 단순하고 용이한 1차원 유한요소 모델을 사용하여 해석한 결과는 모델링이 어느 정도 어려운 2차원 유한요소 모델을 사용하여 해석한 결과 및 계산이 복잡한 이론적 결과와 매우 일치하고 있음을 알 수 있다.

4. 결론

원형 평판의 면내 고유진동을 해석하기 위하여 제시된 1차원 유한요소를 사용함으로서 모델링을 단순하고 용이하게 할 수 있고 해석 결과를 정밀하게 도출할 수 있음을 본 연구를 통하여 확인할 수 있었다.

참고문헌

1. M. Onoe(1956), "Contour Vibration of Isotropic Circular Plates", Journal of the Acoustical Society of America, Vol.28, No.6, pp.1158-1162.
2. R. Holland(1966), "Numerical Studies of Elastic-Disk Contour Modes Lacking Axial Symmetry", Journal of the Acoustical Society of America, Vol.40, No.5, pp.1051-1057.
3. V. Srinivasan, V. Ramamurti(1980), "In-plane Vibrations of Annular Disk Using Finite Elements", Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, Vol.102, pp.585-588.
4. T.Irie, G. Yamada, Y. Muramoto(1984), "Natural Frequencies of In-plane Vibration of Annular Plates," Journal of Sound and Vibration, Vol.97, No.1, pp.171-174.
5. J. So, A.W. Leissa(1998), "Three-dimensional Vibrations of Thick Circular and Annular Plates", Journal of Sound and Vibration, Vol.209, No.1, pp.15-41.
6. C.F. Liu, Y.T. Lee(2000), "Finite Element Analysis of Three-dimensional Vibrations of Thick Circular and Annular Plates", Journal of Sound and Vibration, Vol.233, No.1, pp.63-80.
7. N.H. Farag, J. Pan(2003), "Modal Characteristics of In-plane Vibration of Circular Plates Clamped at the Outer Edge", Journal of the Acoustical Society of America, Vol.113, No.4, pp.1935-1946.
8. C.I. Park(2008), "Frequency Equation for the In-plane Vibration of a Clamped Circular Plate", Journal of Sound and Vibration, Vol.313, No.1-2, pp.325-333.
9. 송승관, 곽동희, 김창부(2009), "회전하는 환상 디스크의 면내 고유진동 해석법", 한국소음진동공학회지, 제19권 2호, pp.208-216.
10. G. Dhatt, G. Touzot(1984), "The Finite Element Method Displayed", John Wiley & Sons, Chichester.
11. 김창부, 심수섭(1998), "회전하는 순환대칭 구조물의 유한요소 진동해석 기법", 한국소음진동공학회지, 제8권 6호, pp.1150-1157.

도표 1. Natural frequency parameters $\lambda = \omega a / \sqrt{E/\rho(1-\nu^2)}$ of in-plane natural vibration of a circular plate with free outer edge for $\nu = 0.3$

n	Mode Order	1-D FE Model	2-D FE Model	Theory*
0	1	0.	0.	0.
	2	2.0488	2.0489	2.0489
	3	3.0383	3.0383	3.0383
	4	4.9798	4.9797	4.9797
	5	5.3893	5.3894	5.3894
1	1, 2	0.	0.	0.
	3, 4	1.6176	1.6176	1.6176
	5, 6	3.5291	3.5291	3.5291
	7, 8	4.0475	4.0474	4.0474
	9, 10	5.8862	5.8861	5.8861
2	1, 2	1.3876	1.3877	1.3877
	3, 4	2.5112	2.5112	2.5112
	5, 6	4.5207	4.5208	4.5208
	7, 8	5.2030	5.2029	5.2029
3	1, 2	2.1304	2.1304	2.1304
	3, 4	3.4517	3.4517	3.4517
	5, 6	5.3493	5.3492	5.3492
	7, 8	6.3696	6.3695	6.3695
9	1, 2	5.6607	5.6608	5.6606
	3, 4	8.7428	8.7427	8.7426
	5, 6	10.148	10.148	10.148
	7, 8	11.834	11.833	11.833

* calculated from the frequency equations in reference 1 for $n = 0$, and taken from reference 2 for $n \geqq 1$

도표 2. Fundamental data of FE models

	1-D FE Model		2-D FE Model	
	$n = 0$	$n \geqq 1$	$n = 0$	$n \geqq 1$
No. of elements	512	512	129	258
No. of nodes	513	513	520	1040
No. of freedoms	1026	2052	1040	2080
No. of constraints*	0	0	260	520

* one point and multi point kinematic constraints