

2차원 수치해석을 위한 범용 Mesh Generator의 개발(V)

Development of Mesh Generator for 2D Hydraulic Analysis(V)

김유진*, 이승현**, 오정환***, 김홍식****

Eugene Kim, Seung Hyun Lee, Chung Whan Oh, Hong Sik Kim

요 지

하천의 2차원 흐름 및 하상변동, 오염확산 해석을 위한 유체의 수치해석법에는 유한요소법, 유한차분법, 유한차분법의 변형인 유한체적법, 경계적분법 등이 있으며, 국내의 경우 비구조적 요소망(unstructured mesh)을 이용하여 복잡한 형상을 표현하기가 상대적으로 용이한 유한요소법이 널리 사용되고 있다. 하천을 유한 요소화 하는 전처리 과정은 전체 해석 과정을 자동화 하는데 있어 필수적인 요소이며, 주로 삼각 요소망 또는 사각 요소망을 이용하여 해석을 수행하게 된다. 삼각 요소망의 경우 상대적으로 자동화하기 쉬운 반면 사각 요소망의 생성은 점점 생성 자체가 삼각 요소망 보다 더 많은 기하학적 제한 요소를 가지고 있기 때문에 상대적으로 완성도 높은 알고리즘을 구현하기가 어렵다 할 수 있다.

이에 따라 본 연구에서는 2차원 상에서 사각 요소망(quadrilateral elements)을 생성할 수 있는 Paving method를 중심으로 한 요소망 생성 알고리즘에 대해 고찰하고, 국내 최초의 범용 수치해석 모형인 RAMS(River Analysis and Modeling System)에 적용하였다. Paving method는 1990년에 Blacker and Stephenson에 의해 제안되었으며, Sandia National Laboratories에 의해 완성되었다. Paving Method는 advancing front style의 요소망을 생성하게 되고, 바깥쪽에서 안쪽으로 element layer를 생성하면서 채워나간다. 본 연구에서는 기존의 요소망 생성 프로세스에서 element 삽입 전의 검증 기능을 강화한 새로운 버전의 paving method를 적용하였다.

핵심용어 : 유한요소해석, Mesh, Paving method, 수치해석

1. 서론

하천의 2차원 흐름 해석, 유사이동 해석, 오염확산 해석을 위한 유체의 수치해석법은 다양한 방법이 존재하지만 보통 사용되는 방법들은 유한요소법, 유한차분법, 유한차분법의 변형인 유한체적법, 경계적분법등이 있다. 유한차분법은 구조적 요소망(structured mesh)을 구성하여야 한다는 전제조건으로 인하여 복잡한 형상의 하천의 경우 요소망 구성에 많은 시간을 소모하게 된다. 이에 비하여 유한요소법은 복잡한 형상을 표현하기가 상대적으로 매우 간단하여 다양한 하천의 해석에 쉽게 이용할 수 있으며, 비구조적 요소망(unstructured mesh)을 이용하여 적응적 요소망을 간단하게 생성할 수 있다.

* 정회원 · (주)웹솔루스 시스템사업부 과장 · E-mail : tjgoh@websolus.co.kr
** 정회원 · (주)웹솔루스 시스템사업부 부장 · E-mail : icepc@websolus.co.kr
*** 정회원 · (주)웹솔루스 시스템사업부 과장 · E-mail : hsjang@websolus.co.kr
**** 정회원 · (주)웹솔루스 이사 공학박사 · E-mail : hotae@websolus.co.kr

본 연구에서는 비구조적 요소망 생성을 위해 해석하고자 하는 형상의 외곽 경계를 따라 사각 요소를 순차적으로 채워나가는 기법인 Advancing front method의 일종인 paving method를 적용하였으며, 형상의 외곽 경계 절점을 내부각에 따라 7가지로 분류하여 사각 요소를 생성하도록 하였다.

2. 경계에서의 절점 생성 및 분할

2.1 절점의 생성 순서

절점을 생성하고 사각형 요소망을 생성시키기 위한 최소한의 조건은 형상을 이루는 경계의 꼭지점 위치와 생성하고자 하는 요소의 크기이다. 이때, 경계의 꼭지점의 위치 입력은 외부 경계일 때는 반시계 방향으로, 내부 경계일 때는 시계 방향으로 정의하여 주어야 한다. 이 때 외부 경계에 짝수개의 절점을 가진 임의의 블록 형상은 자체의 외부 경계에 절점의 추가 없이 사각 요소망을 구성할 수 있다. 이에 따라 블록 형상에 사각 요소망을 구성하기 위해서 먼저 형상의 경계를 짝수개의 절점으로 분할하여야 한다. 형상의 경계를 짝수개의 절점으로 분할하는 방법은 블록 형상과 오목 형상에 관계없이 다음과 같은 방법으로 이루어진다. 식(1)과 같이 경계를 이루는 한 선분의 길이(L)를 요소의 크기의 두 배로 나눈 값을 정수화한 다음 이 값의 두 배를 취하여 분할할 개수(m)를 구한다. 이 분할개수의 두 배로 선분을 나누어 식(2)와 같이 경계를 분할할 크기(d')를 정하고 이 크기로 경계를 분할하여 형상의 경계에 절점을 생성시킨다.

$$m = 2 \times \text{정수화} \left(\frac{L}{2 \times d} \right) \quad (1)$$

$$d' = \frac{L}{m} \quad (2)$$

여기서, m : 분할개수
 L : 한 외부경계의 길이
 d : 요소의 크기
 d' : 분할크기

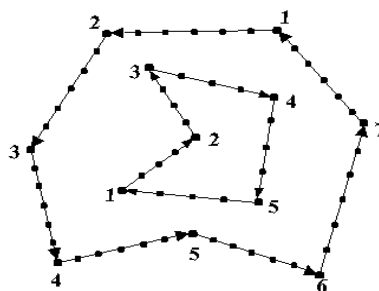


그림 1. Boundary division

2.2 블록 형상으로서의 분할

해석 영역의 경계에서 절점의 내부각이 180도 보다 큰 각을 가지고 있으면 이 해석 영역은 오목 형상(concave)라 할 수 있다. 이러한 오목 형상은 180도 보다 큰 내부각을 가지는 절점(key node)을 기준으로 분할되어 블록 형상의 하위 영역으로 전체 해석 영역을 다시 나누게 된다. 오목 형상을 블록 형상으로 분할함에 있어서 분할선이 날카로운 모서리를 만들게 되면 형질이 좋지 않

은 사각 요소가 생성될 수 있으므로 본 연구에서는 분할각($\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$)이 70도 보다 크게 하여 이점을 방지하였다. 70도는 여러 분할각을 실험한 결과 가장 적절하다고 판단되어 결정되었다. 이렇게 적절한 분할선을 찾는 방법은 180도 보다 큰 내부각을 가지는 절점에서 외부 경계의 절점으로 분할선을 만들어 이 분할선으로 만들어지는 분할각이 70도 보다 크도록 하는 외부 경계의 절점을 먼저 찾은 후에 $\sin(\alpha_1 - \beta_1)$ 의 값이 최소가 되는 절점을 취하여 분할선을 최종 선택하게 된다. 단, 여기서 주의해야 할 사항은 분할선이 해석 영역에 존재해야 한다는 것이며 분할선상에 위치하게 될 절점은 하위 영역의 절점이 짝수개가 되도록 조정되어야 한다는 것이다. 이와 같은 과정을 반복하여 해석 영역은 여러 개의 볼록 형상으로 나누어지게 된다.

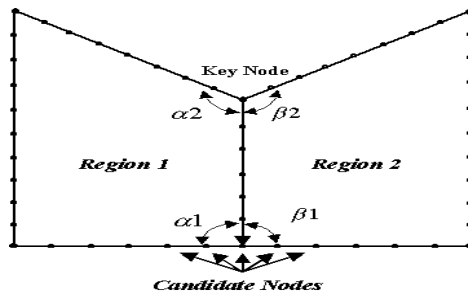


그림 2. Boundary decomposition

해석 영역 내부에 홀이 있는 경우는 내부 홀의 모서리에서 가장 가까운 외부 경계의 절점을 찾아 연결선을 만든 후 전체의 해석 영역을 하나의 외부 경계를 가진 영역으로 만들게 되면 식(3)에 의해 외부 경계와 내부 경계는 하나의 경계로 구성되게 된다. 이러한 외부 경계는 볼록 형상로의 분할법을 통하여 여러 개의 볼록 형상으로 나누어지게 된다.

$$bR = bR_E \cup bR_I \quad (3)$$

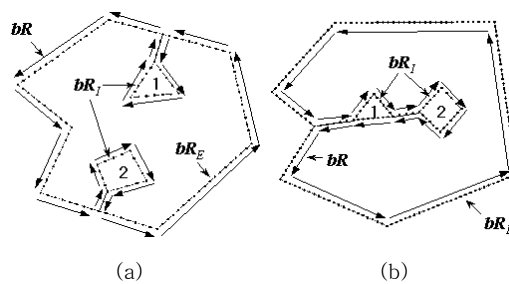


그림 3. Boundary extension

3. 내부 절점 생성

3.1 절점 오프셋팅(offsetting)

초기 절점 오프셋은 외부 경계의 절점으로부터 이루어지며 오프셋 된 절점들의 위치가 조정되

고 사각 요소가 구성되어지면 이후 외부 경계는 조정되어진 오프셋 절점으로 이루어지게 된다. 이러한 과정을 반복하여 형상의 내부로 사각 요소를 구성해 나가게 된다. 절점 오프셋은 식(4) 및 식(5)와 같이 절점(N_i)에 이웃하는 두 절점(N_{i-1}, N_{i+1})과의 내부각을 이등분하는 각으로 절점(N_{i+1})을 회전변환한 다음, 요소크기(d)에 $\sin(\frac{\angle N_{i-1}, N_i, N_{i+1}}{2})$ 을 곱한 크기로 길이를 조정하여 절점(N_i)를 오프셋하게 된다. 오프셋 각도와 크기를 정리하면 식(4) 및 식(5)와 같고 오프셋 된 절점은 외부 경계와 같은 짝수 개수이다.

$$OffsetAngle(\theta) = \frac{\angle N_{i-1}, N_i, N_{i+1}}{2} \quad (4)$$

$$d_Offset = d \times \sin\left(\frac{\angle N_{i-1}, N_i, N_{i+1}}{2}\right) \quad (5)$$

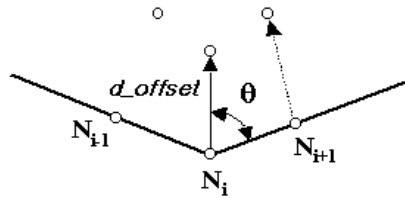


그림 4. Node offsetting

3.2 오프셋 절점들의 각도 검사

오프셋 된 절점들은 대부분 외부 경계의 절점들과 평행하게 구성되어 마치 새로운 내부 절점들을 구성해 가는 것과 같다. 그러나 모서리에서 오프셋 된 절점들은 새로운 경계 절점들 구성과는 다르므로 모서리에서 오프셋 된 절점들을 제거하고 모서리 절점과 이웃하는 두 절점의 중간점으로 새로운 경계의 모서리 절점을 취하기 위해 내부각 검사를 수행하여야 한다. 이는 세 절점(N_{i-1}, N_i, N_{i+1})의 내부각이 80도 이하이면 두 절점(N_{i-1}, N_{i+1})의 중간에 새로운 절점을 생성하고 이 세 절점(N_{i-1}, N_i, N_{i+1})을 제거함으로써 수행된다. 80도는 여러 내부각에 대한 실험을 통하여 가장 적절한 결과를 내는 각도로서 선택되었다. 따라서, 세 절점을 하나의 절점(N^*)으로 통합화시킴으로써 오프셋 된 절점은 짝수개를 유지하게 된다.

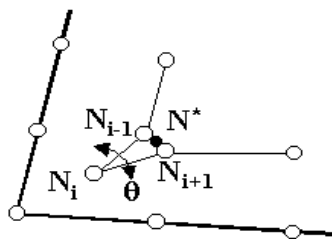


그림 5. Angle checking

3.3 오프셋 절점들의 거리 검사

블록 형상에서 외부 경계 위의 절점들을 안쪽으로 오프셋하게 되면 오프셋된 점들은 서로 가까워지기 때문에 거리 검사에서는 내부각 검사와 유사하게 일정 거리 안에 있는 세 절점 (N_{i-1}, N_i, N_{i+1})을 하나의 절점(N^*)으로 합치게 된다. 본 연구에서는 세 절점(N_{i-1}, N_i, N_{i+1})의 거리 합이 요소크기의 1.2배 보다 작다면 하나의 절점으로 합치게 하였다.

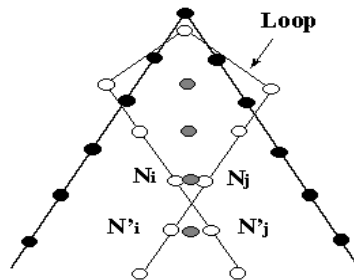


그림 6. Loop intersection checking

4. 사각 요소 생성

4.1 사각 요소 생성

외부 경계로부터 절점이 오프셋 되어 내부각 검사, 거리 검사, 교차 검사를 통해서 절점이 제거되거나 추가되었던 후에 외부 경계를 따라 절점들을 연결하여 사각 요소를 생성하게 되며, 다시 이 절점들은 새로운 외부 경계의 절점들이 되어 내부로 절점을 오프셋하게 되는 과정을 반복함으로써 전체 해석 영역을 사각 요소화 하게 된다.

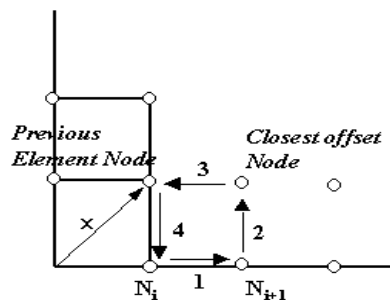


그림 7. Element generation

4.2 요소 재구성

사각 요소의 재구성은 사각 요소를 생성한 후에 사각 요소 사이의 각이 60도(α) 보다 작을 경우 두 사각 요소를 재구성하여 다음에 절점을 오프셋 하기 쉽도록 만드는 과정이다. 여기서 60도는 요소 사이의 각에 대한 많은 실험을 통하여 가장 적절한 결과를 내는 각도로써 선택되었다.

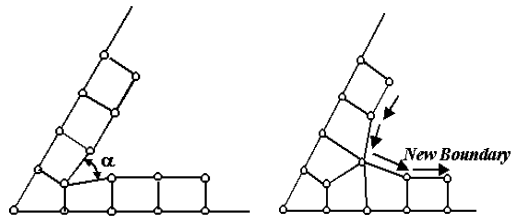


그림 8. Element reconstruction

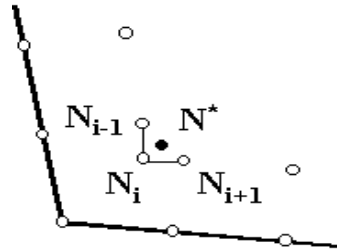


그림 9. Distance checking

4.3 오프셋 절점들의 교차 검사

해석 영역의 모서리 절점이 이루는 각이 작은 경우 오프셋 된 절점들을 있는 루프(Loop)는 서로 교차하게 되는데 이렇게 교차하는 부분에서 정형화된 사각 요소를 생성하기 위해서는 오프셋 된 절점으로 요소를 생성하지 않고 교차되어지는 루프의 중점에 새로운 절점을 생성하여 요소를 생성해야 한다. 여기서 주의해야 할 것은 교차되는 루프의 절점 개수가 짝수개가 아니라 홀수개가 되는 경우 전체 절점의 개수는 홀수가 되므로 이를 조정하여 짝수개의 절점을 갖도록 해야 한다는 것이다.

4.4 RAMS 적용

앞서 설명한 paving 알고리즘을 이용하여 외부 경계에서의 절점 생성과 블록 형상으로서의 분할, 절점 오프 세팅을 통한 내부 절점 생성을 통해 사각 요소망을 생성함으로써 다음 그림 10과 같이 RAMS에 paving 기법을 적용할 수 있었다.

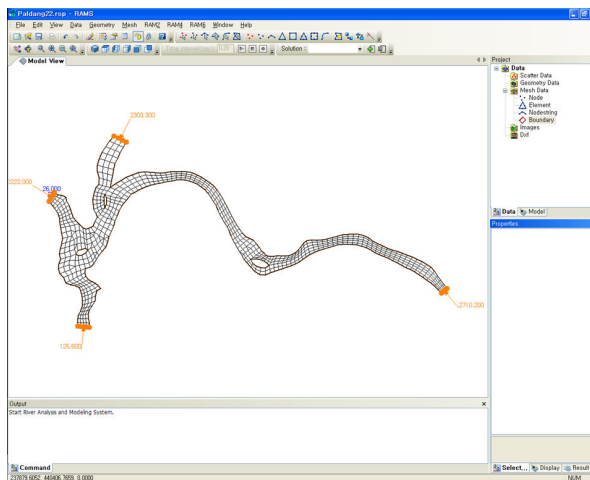


그림 10. RAMS에서의 사각망 생성결과

5. 결론

형질이 우수한 비구조적 사각 요소망을 생성하기 위해 Advanced Front Method의 한 방법인 Paving method를 이용한 Mesh Generator를 개발하였다. Paving 기법을 이용한 사각 요소망 생성 알고리즘은 절점을 생성하는 것으로부터 시작하였으며, 사각 요소망을 생성시키기 위한 최소한의 조건은 형상을 이루는 경계의 꼭지점 위치와 생성하고자 하는 요소의 크기가 중요하다. 이때 경계의 꼭지점의 위치 입력은 외부 경계일 때는 반시계 방향으로, 내부 경계일 때는 시계 방향으로 정의해 주어야 한다. 블록형상에 사각 요소망을 구성하기 위해서 먼저 형상의 경계를 짝수개의 절점으로 분할하여야 하고, 해석영역의 경계에서 절점의 내부각이 180도 보다 큰 각을 가지고 있으면 이 영역을 분할하도록 하였다. 분할 후 각각의 폴리곤에 내부절점을 생성하게 되는데, 절점 오프세팅, 오프셋 절점들의 각도검사, 오프셋 절점들의 거리검사를 통해 적절히 생성한 후 절점을 연결하여 사각요소를 생성하였다. 이러한 Paving 기법을 이용한 mesh generator는 국내 최초의 범용 하천 수리해석 소프트웨어인 RAMS에 탑재하여 활용성을 높일 수 있도록 하였다.

감 사 의 글

본 연구는 21세기 프론티어 연구개발사업인 수자원의 지속적 확보기술개발사업단의 연구비지원 (과제번호 : 2-3-3)에 의해 수행 되었습니다.

참 고 문 헌

1. EMRL (2003). Surface-water modeling system : Tutorials Version 8.1. Brigham Young University.
2. Thompson, J.F., Warsi, Z.U.Z., Mastin, C.W. (1985). Numerical grid generation, Foundation and applications, Elsevier Science Publishing Co.
3. Lo, S.H. (1985). "A New Mesh Generation Scheme For Arbitrary Planar Domains", International Journal For Numerical Methods in Engineering, John Wiley, Num 21, pp.1403-1426