다각형 내부에 있는 두 점 사이의 최단 경로를 구하는 빠른 알고리즘

김수환[*] · 임인택[*]· 최진오[*]· 최진호[*]

[*]부산외국어대학교

Fast Algorithms for Computing the Shortest Path between Two Points inside a Simple Polygon

Soo-Hwan Kim[*] · Intaek Lim[*]· Jinoh Choi[*]· Jinho Choi[*]

[*]Pusan University of Foreign Studies

E-mail : {shkim, itlim, jochoi, jhchoi}@pufs.ac.kr

요 약

본 논문에서는 단순 다각형 내부에서 발생하는 최단 경로 문제를 다룬다. 다각형 내부에 위치한 두 점 사이의 최단 경로는 다각형의 외부를 지나지 않는 경로 중에서 길이가 가장 짧은 경로를 말한다. 일반적인 다각형에서 최단 경로를 구하는 선형 시간 알고리즘은 매우 복잡한 과정으로 알려진 삼각분할을 전처리과정으로 수행해야 한다. 따라서 이론적으로는 최적인 시간복잡도를 갖지만, 실제적으로는 구현이 어려울 뿐만 아니라 입력의 크기가 매우 크지 않은 한 수행 시간이 효율적이지 못하다.

본 논문에서는 특정한 다각형의 부류들에 대해서 각 대상에 적합한 최단 경로 알고리즘을 설계하는 것을 고려한다. 연구 결과로서 다각형의 부류로 널리 알려진 별형 다각형, 에지 가시 다각형, 단조 다각형 등에 대해서 효율적이면서 간단한 구현으로 최단 경로를 구하는 알고리즘들을 제시한다.

ABSTRACT

In this paper, we consider the shortest path problems in a simple polygon. The shortest path between two points inside a polygon P is a minimum-length path among all paths connecting them which don't pass by the exterior of P. A linear time algorithm for computing the shortest path in a general simple polygon requires triangulating a polygon as preprocessing. The linear time triangulating is known to very complex to understand and implement it. It is also inefficient in cases without very large input size.

In this paper, we present the customized shortest path algorithms for specific polygon classes such as star-shaped polygons, edge-visible polygons, and monotone polygons. These algorithms need not triangulating as preprocessing, so they are simple and run very fast in linear time.

키워드

계산기하학, 최단 경로, 별형 다각형, 에지가시 다각형, 단조 다각형

Ⅰ. 서　론

유클리디언 최단 경로 문제는 매우 기본적인 기하학적 문제로서 그 결과가 컴퓨터 그래픽스, 로보틱스, 센서 네트워크 등의 응용 분야에 많이 활용된다. 본 논문에서는 단순 다각형 내부에서 발생하는 최단 경로 문제를 다룬다. 다각형 내부에 위치한 두 점 사이의 최단 경로는 다각형의 외부를 지나지 않는 경로 중에서 길이가 가장 짧은 경로를 말한다. Guibas 등[2]은 삼각분할된 다각형에서 최단 경로를 구하는 선형 시간 알고리즘을 제시했다. 다각형을 선형 시간에 삼각분할하는 것은 매우 복잡한 과정으로 알려져 있다[1]. 따라서 구현이 어려울 뿐만 아니라 입력의 크기가 매우 크지 않은 한 수행 시간이 효율적이지 못하다.

본 논문에서는 특정한 다각형의 부류들에 대해서 각 대상에 적합한 최단 경로 알고리즘을 설계하는 것을 고려한다. 연구 결과로서 다각형의 부류로 널리 알려진 별형 다각형, 에지 가시 다각형, 단조 다각형 등에 대해서 효율적이면서 간단한 구현으로 최단 경로를 구하는 알고리즘들을 제시한다.

Ⅱ. 용어 정의 및 기본 성질

먼저, 몇 가지 용어를 정의한다. 평면 상의 두 점 p와 q를 연결하는 선분을 L(p, q)로 나타낸다. 다각형 P는 경계선 상의 정점들을 반시계방향으로 주어진 정점 리스트 (v_0, v_1, ⋯ , v_{n-1})로 나타낸다. 두 인접한 정점 v, w에 의해 생성되는 L(v, w)를 P의 에지 e = (v, w)라고 부른다.

P는 경계선과 그 내부를 합한 영역을 말한다. P의 경계선 상의 두 점 p, q에 대해, p에서부터 q까지 반시계방향으로 따라간 경계선을 체인 ch(p, q)라고 부른다. ch(p, q)의 각 정점의 내부각도가 모두 180˚미만이면 ch(p, q)를 볼록 체인이라고 부르고, 180˚보다 크면 오목 체인이라고 부른다.

P의 두 점 p, q가 서로 가시적이라는 것은 L(p, q)가 P에 완전히 포함되는 것을 말한다. P의 두 점 s, t에 대한 최단 경로 π(p, q)는 p와 q를 연결하고 P에 포함되는 경로 중에서 길이가 가장 짧은 경로를 말한다.

P의 체인 ch(p, q)에 대해 tidy 체인을 다음과 같이 정의한다[3].

정의 1: P의 체인 ch(p, q)의 모든 부분 체인 ch(a, b)에 대해, ch(a, b)와 연결되어 단순 다각형 P′을 이루는 체인 ch′(b, a)이 존재하면 ch(p, q)를 tidy 체인이라고 부른다, 여기서 ch′(b, a)는 ch(a, b)를 대체한 임의의 체인으로 P′에서 볼록 체인이다.

소정리 1: P의 tidy 체인 ch(p, q)에 대해, ch(q, p)를 임의의 볼록 체인 ch′(q, p)로 대체한 다각형을 P′이라고 하자. P′에서 p와 q 사이의 최단 경로 π(p, q)는 P′에서 오목 체인이며 선형 시간에 구해진다.

(증명) 만일 L(p, q) ⊂ P′이면, π(p, q) = L(p, q)이다. 그렇지 않으면 π(p, q)는 L(p, q)와 볼록 체인 ch′(q, p)로 둘러싸인 영역에 포함된다.

만일 π(p, q)가 P′에서 오목 체인이 아니라면 반드시 π(p, q)와 만나는 ch′(q, p)의 정점이 존재하고, 그 정점의 내각은 180˚보다 크다. 따라서 ch′(q, p)가 볼록 체인이라는 사실에 위배된다. 그러므로 π(p, q)는 P′에서의 오목 체인이다.

tidy 체인 ch(p, q)에서 π(p, q)를 찾는 것은 볼록 외피를 구하는 graham′s scan과 유사한 방식으로 선형 시간에 수행된다[3]. 따라서 π(p, q)는 선형시간에 구해진다. (증명 끝)

π(p, q)는 P′의 내부에서 볼 때는 오목 체인이지만 외부에서 볼 때는 볼록 체인이다. 앞으로 tidy 체인에 의해 정의되는 최단 경로를 볼록 체인이라고 부른다. 그림 1은 tidy 체인 ch(p, q)와 최단 경로 π(p, q)의 예를 보여준다.

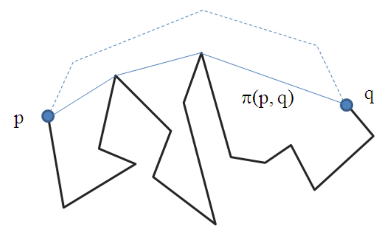

그림 1: tidy 체인 ch(p, q)와 최단 경로

Ⅱ. 별형 다각형

별형 다각형(star-shaped polygon)은 내부의 모든 점에 가시적인 점이 존재하는 다각형이다. 그러한 점들의 집합을 커널(kernel)이라고 부른다.

두 점 s와 t를 별형 다각형 P의 내부의 두 점이라고 하자. s와 t를 연결하는 선분 L(s, t)이 P에 포함되면, 최단 경로 π(s, t) = L(s, t)이다. 그렇지 않은 경우, L(s, t)와 P의 경계선과의 교차점들 중에서 s에 가장 가까운 점을 a, t에 가장 가까운 점을 b라고하자. P의 커널의 한 점을 z라고 하자. 그러면 L(z, s), L(z, t)는 모두 P에 포함된다. 따라서 π(s, t)는 삼각형 (z, s, t)에 포함한다 (그림 2 참조).

다음의 정리 1은 별형 다각형에서 최단 경로를 삼각분할을 수행하지 않고도 선형 시간에 구할 수 있음을 보인다.

정리 1: 별형 다각형 P의 두 점 s와 t 사이의 최단 경로 π(s, t)는 삼각분할없이 선형 시간에 구해진다.

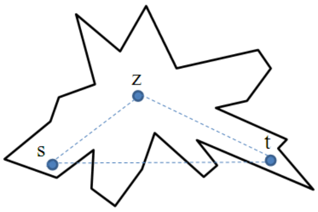

그림 2: 별형 다각형의 예

(증명) 커널의 점 z는 ch(a, b)의 모든 점들을 볼 수 있다. 모든 $u \in ch(a, b)$에 대해, $L(z, u) \subset P$이므로, ch(a, b)는 tidy 체인이다. 따라서 소정리 1에 의해 최단 경로 π(a, b)는 볼록 체인이고 선형 시간에 구해지므로, π(s, t)도 선형 시간에 구할 수 있다. (증명 끝)

III. 에지 가시 다각형

에지 가시 다각형(edge-visible polygon)은 내부의 모든 점에 약 가시적인(weakly visible) 에지가 존재하는 다각형이다. 그러한 에지를 가시 에지 또는 경비 에지(guard edge)라고 부른다.

두 점 s와 t를 에지 가시 다각형 P의 내부의 두 점이라고 하자. 일반성을 잃지 않고 P의 가시 에지 e = (v, w)는 수평 선분이라고 하자(그림 3). P는 e를 양쪽으로 P의 경계선을 만날 때까지 연장한 선분에 의해 그림 3과 같이 최대 3개의 영역 S_L, S_R, S_U로 분할된다. 여기서 S_L과 S_R은 공집합일 수 있다. S_L은 v로부터 가시적이고, S_R은 w로부터 가시적이다. S_U의 각 점은 가시 에지 e의 어떤 점에서 가시적이다.

s와 t를 연결하는 선분 L(s, t)이 P에 포함되면, 최단 경로 π(s, t) = L(s, t)이다. 그렇지 않은 경우, s와 t의 위치를 다음과 같이 4가지 경우로 구분할 수 있다. 나머지 경우들은 이 4가지 경우와 대칭적이기 때문에 같은 방식으로 설명될 수 있다.

Case 1: $s, t \in S_L$
Case 2: $s \in S_L$, $t \in S_R$
Case 3: $s \in S_L$, $t \in S_U$
Case 4: $s, t \in S_U$

다음의 소정리 2~5은 각 경우 별로 최단 경로 π(s, t)가 선형 시간 또는 상수 시간에 구해짐을 보인다.

소정리 2 [Case 1]: $s, t \in S_L$일 때, 최단 경로 π(s, t)를 선형 시간에 구할 수 있다.
(증명) S_L은 a의 모든 점에서 가시적이다. 따라서 S_L은 별형 다각형이므로 정리 1에 의해 최단 경로 π(s, t)는 선형 시간에 구해진다. (증명 끝)

소정리 3 [Case 2]: $s \in S_L$, $t \in S_R$일 때, 최단 경로 π(s, t)를 상수 시간에 구할 수 있다.
(증명) s는 v에서 가시적이고, t는 w에서 가시적이므로, 경로 T = L(s, v)∪e(v, w)∪L(w, t) ⊂ P 이다. s와 t를 연결하는 어떠한 경로도 T의 바깥쪽으로 둘러가야 하므로, T가 바로 최단 경로 π(s, t)이다. 따라서 이 경우 π(s, t)는 상수 시간에 구해진다. (증명 끝)

Case 3은 다시 다음과 같이 3가지 경우로 구분할 수 있다. 여기서 q를 t를 볼 수 있는 e의 점이다. 세 점 p, q, r을 차례대로 따라갈 때, 우회전을 해야 하는 경우 (p, q, r)은 CW 순서라고 하고, 좌회전을 해야 하는 경우는 CCW 순서라고 하자.

Case 3-1: (s, v, t)가 CCW 순서이거나 일직선 상에 위치하는 경우
Case 3-2: (s, v, t)가 CW 순서이고 (s, t, q)가 CW 순서인 경우
Case 3-3: (s, v, t)가 CW 순서이고 (s, t, q)가 CCW 순서인 경우

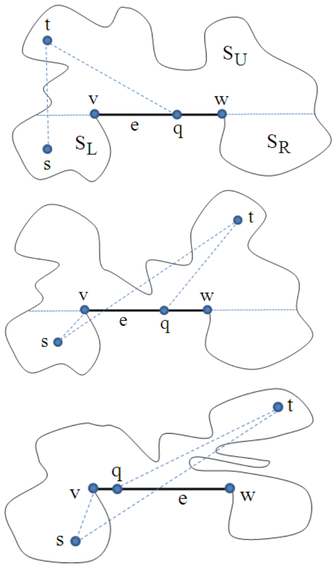

그림 3: 에지 가시 다각형과 Case 3

소정리 4 [Case 3]: $s \in S_L$, $t \in S_U$일 때, 최단 경로 π(s, t)를 선형 시간에 구할 수 있다.
(증명) L(s, t)와 P의 경계선과의 교차점들 중에서 s에 가장 가까운 점을 a, t에 가장 가까운 점을 b라고하자. P의 경계선 상의 모든 점이 e에 가시적이므로 P의 모든 체인은 tidy 체인이다.
Case 3-1의 경우, L(s, v), L(t, q)가 P에 포함되므로, 최단 경로 π(s, t)는 사각형 (s, v, q, t)에 완전히 포함된다(만일, v = q이면 π(s, t)는 삼각형 (s, v, t)에 포함된다). 따라서 최단 경로 π(s, t)는 ch(b, a), s, t로 구성되는 볼록 체인이다. ch(b, a)는 tidy 체인이므로 π(s, t)는 선형 시간에 구해진다.

Case 3-2의 경우, L(s, t)는 e 그리고 S_L의 경계선과 교차한다. L(s, v) ⊂ P 이므로 π(s, t)는 L(s, v) ∪ π(v, t)이다. π(v, t)는 삼각형 (v, q, t)에 완전히 포함되므로 π(v, t)는 볼록 체인이다. 따라서 Case 3-1의 경우와 같은 방식으로 π(v, t)를 선형 시간에 구할 수 있다. 그러므로 π(s, t)는 선형 시간에 구해진다.

Case 3-3의 경우, π(s, t)는 L(s, v) ∪ π(v, t)이다. L(q, t) ⊂ P 이므로 π(v, t)는 삼각형 (v, q, t)에 완전히 포함된다. 따라서 Case 3-2와 같은 조건이므로 π(s, t)는 선형 시간에 구해진다.

그러므로 Case 3의 경우 최단 경로 π(s, t)는 선형 시간에 수행된다. (증명 끝)

Case 4에서 s와 t를 볼 수 있는 e 상의 점을 각각 p, q라고 하자. Case 4는 다음과 같이 2가지 경우로 구분할 수 있다. *x*(p)는 p의 *x*좌표를 의미한다.

Case 4-1: *x*(p) <= *x*(q)인 경우
Case 4-2: *x*(p) > *x*(q)인 경우

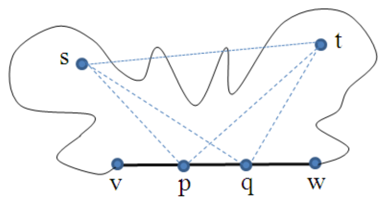

그림 4: Case 4

소정리 5 [Case 4]: s, t ∈ S_U일 때, 최단 경로 π(s, t)를 선형 시간에 구할 수 있다.

(증명) L(s, t)와 P의 경계선과의 교차점들 중에서 s에 가장 가까운 점을 a, t에 가장 가까운 점을 b라고하자.

Case 4-1의 경우, L(s, p)와 L(t, q)는 P에 포함되므로, π(s, t)는 사각형 (s, p, q, t)(만일 p = q이면 삼각형 (s, p, t))에 완전히 포함된다. 따라서 π(s, t)는 s, t, ch(a, b)에 의해서 결정되는 볼록 체인이다. ch(a, b)는 tidy 체인이므로 π(s, t)는 선형 시간에 구해진다.

Case 4-2의 경우, L(s, p)와 L(t, q)의 교차점을 r이라고 하자. π(s, t)는 삼각형 (s, r, t)에 완전히 포함되고, ch(a, b)는 tidy이므로 π(s, t)는 선형 시간에 구해진다.

그러므로 Case 4의 경우 최단 경로 π(s, t)는 선형 시간에 수행된다. (증명 끝)

소정리 2~5의 결과를 바탕으로 삼각분할없이 최단 경로를 구하는 알고리즘을 설계할 수 있다.

정리 2: 에지 가시 다각형 P의 두 점 s와 t 사이의 최단 경로 π(s, t)는 삼각분할없이 선형 시간에 구해진다.

Ⅳ. 단조 다각형

*x*축을 기준으로 한 단조 다각형 (monotone polygon) P는 다음과 같이 정의된다. P의 가장 왼쪽의 정점 p와 가장 오른쪽 정점 q라고 하자. ch(p, q)를 따라갈 때 방문한 순서대로 각 정점의 *x*-좌표가 항상 같거나 증가하며 ch(q, p)를 따라갈 때, 각 정점의 *x*-좌표가 항상 같거나 감소한다면 P를 단조 다각형이라고 부른다.

단조 다각형 P와 각 정점을 지나는 수직선과의 교차는 항상 하나의 수직 선분이다. 이러한 수직 선분들을 *x*-좌표에 따라 정렬하는 것은 선형 시간에 수행된다. 단조 다각형 P의 두 정점 s와 t 사이의 최단 경로 π(s, t)는 s와 t 사이에 있는 수직 선분들을 모두 지나는 경로이다. 최단 경로를 구하는 과정은 삼각분할된 다각형에서 최단 경로를 찾는 깔대기 방식[2]을 이용한다면 선형 시간에 수행된다. 단조 다각형에서 삼각분할을 수행하는 것은 수직 선분들을 구하는 것에 비해 수행 시간이 더욱 많이 걸리거나 훨씬 더 복잡한 것은 아니지만 삼각분할을 필수적으로 수행할 필요가 없다는 면에서 의의가 있다.

Ⅴ. 결 론

본 논문에서는 다각형의 특정한 부류, 별형 다각형, 에지 가시 다각형, 단조 다각형에 대해 삼각분할 등 복잡한 전처리 과정없이 두 점 사이의 최단 경로를 구하는 알고리즘을 제시했다.

차후의 연구 과제로서 선분가시 다각형, L-가시 다각형 등의 더 복잡한 다각형 부류에 대해서 삼각분할없이 간단하면서 최적인 최단 경로 알고리즘을 개발하는 것이다.

참고문헌

[1] B. Chazelle, "Triangulating a simple polygon in linear time," Discrete Comput. Geom., vol. 6, 485-524, 1991.

[2] L. Guibas, J. Hershberger, d. Leven, M. Shrir, and R.E. Tarjan, "Linear time algorithm for visibility and shortest path problems inside triangulated simple polygons," Algorithmica, Vol. 2, 209-233, 1987.

[3] S. H. Kim, S. Y. Shin, and K. Y. Chwa, "Efficient algorithms for solving diagonal visibility problems in a simple polygon," IJCGA, Vol. 5, No. 4, 433-458, 1995.