저주파 필터를 이용한 수치등각사상에 관한 연구

송 은 지*

*남서울대학교 컴퓨터학과

A Study on Numerical Conformal Mapping by Low Frequency pass Filter

Eun-jee Song

*Dept of Computer Science, Namseoul University

E-mail : sej@nsu.ac.kr

요 약

등각사상은 함수론의 기본적인 문제의 하나로 물리학, 공학 등에 응용되고 있다. 예를 들어 선박이나 비행기의 모양을 고려할 때 나타나는 유체의 문제등에 유용하게 쓰이고 있다. 본 논문에서는 단위원 내부로부터 Jordan 영역 내부에로의 수치등각사상을 구하는 문제를 다루는데 이것은 비선형 적분방정식인 Theodorsen방정식을 푸는 것으로 귀착된다. Theodorsen방정식을 구하는 해법 중 Wegmann의 방법은 계산량에 있어서 가장 유효하다고 알려져 있다. 그러나 수치실험을 통하여 난이도가 높은 문제에 있어 수렴하지 않는 문제점을 발견하게 되었다. 본 논문에서는 수렴하지 않는 불안정의 원인을 이론적으로 분석하고 저주파필터에 의하여 개선한 방법을 제안한다. 개선한 방법에 의한 수치 실험결과를 보고한다.

ABSTRACT

Conformal mapping is useful to solve problems in physics, engineering and so on. This paper is to discuss the numerical conformal mapping from the unit disk onto Jordan region, which can be solved by Theodorsen equation. Wegmann's method has been known as the most efficient one for the Theodorsen equation. However, we found divergence through numerical experiments by the iterative method of Wegmann. The divergence occurs especially when some degree of difficulty is high. We analyze the cause of divergence and propose an improved method by applying a low frequency pass filter to Wegmann's method. By this proposed method we can get a stable convergence for all the problems which was unstable with the Wegmann's method.

키워드

수치등각사상, Theodorsen 방정식, Wegmann 방법, 저주파 필터

Ⅰ. 서 론

등각사상은 함수론의 기본적인 문제의 하나로 물리학, 공학등에 응용되고 있다. 일반적으로 등각사상은 수치계산법에 의해 구할 수 있으며 여기에는 표준영역에서 문제영역에로의 사상과 표준영역에서 문제영역에로의 사상을 구하는 것으로 대별되어 각각 독립된 분야로서 연구되고 있다. 그것은 표준영역에서 문제영역에로의 사상결정은 비선형방정식을 풀어야 하며 문제영역에서 표준영역에로의 사상결정은 선형방정식을 풀어야 하기 때문이다. 그러나 같은 해법으로 양방향에로의 등각사상을 구하는 방법도 시도되고 있다. 여기서는 표준영역인 단위원의 내부에서 문제영역인 Jordan영역 내부에로의 수치등각사상을 다루는데 이사상의 결정은 경계대응함수에 관한 비선형 적분방정식인 Theodorsen방정식을 푸는 것으로 귀착된다. Theodorsen 방정식의 해법중 Wegmann의 방법이 가장 유효하다고 알려져 있다. 그러나 Wegmann의 방법으로 수치실험을 한 결과 난이도가 높다고 예상되는 문제에 있어 수렴했다가 발산을 하는 불안정현상이 나타났다. 본 논문에서는 수

렴하지 않는 불안정현상의 원인을 이론적으로 분석하여 반복법의 안정화를 위해 저주파필터를 적용한 새로운 반복법을 제안하며 수치 실험한 결과 수렴하지 않는 문제에 있어서 수렴한 결과를 보고한다.

II. Wegmann 의 방법

Φ는 단위원 D에서 Jordan 영역 Δ에로의 등각사상으로 다음과 같은 정규화 조건을 만족하는 사상이라 하자.

$$\Phi(0)=0, \Phi'(0)>0 \tag{1}$$

여기서는 문제영역이 $\eta(t)=\rho(t)e^{it}$로 극좌표 표현되는 영역만을 취급하기로 한다. Φ 는

$$\Psi\tau(t)=\tau(t)-K\log\rho(\tau(t)+t)=0 \tag{2}$$

과 같은 Thedorsen방정식을 통해 얻을 수 있으며 여기서 K는 공역작용소(共役作用素)라 불리운다. 자세한 Theodorsen 방정식의 유도과정은 논문1에 서술되어 있으므로 여기서는 생략하기로 한다. Wegmann은 원래의 비선형 방정식 (2)을 다음과 같은 Newton법으로 풀었다.

$$\begin{aligned}&\Psi\tau_m(t)+\Psi_{\tau_m}\delta_m(t)=0\\&\tau_{m+1}(t)=\tau_m(t)+\delta_m(t)\end{aligned} \tag{3}$$

$m=0,1,2,\cdots$(반복횟수)

수치계산을 하기 위해 이산화를 하는데 편의상 짝수 표본점 $N=2n$을 사용하여

$$t_j=2\pi j/N, \quad \boldsymbol{t}=(t_0,t_1,\cdots,t_{N-1})^T$$

로 하고 t의 함수인 f를 t_j상에서 표본화한 것을

$$f_j:=f(t_j)\ , \boldsymbol{f}=(f_0,f_1,\cdots,f_{N-1})^T$$

로 한다. 또한 어떤 스칼라 함수 $\sigma(y)$와 벡터 $\boldsymbol{y}=(y_0,y_1,\cdots,y_{N-1})^T$에 대하여

$\sigma(\boldsymbol{y})=(\sigma(y_0),\sigma(y_1),\cdots,\sigma(y_{N-1}))^T$로 정의한다.

공역작용소(共役作用素)K는 다음과 같이 이산화한다.

F_N : 이산형 Fourier변환

F_N^{-1} : 이산형 Fourier 역변환,

$\widehat{K}_N$: 공역작용소에 의한 Fourier계수 변환 즉, 이산화된 공역작용소는

$$\boldsymbol{K}_N := F_N^{-1}\widehat{K}_N F_N$$

이 된다. Wegmann의 Newton 반복법 (3)의 수정량을 구하기 위한 구체적인 반복법은 다음과 같다. 여기서 (3)의 해인 τ에 대하여 $s=\tau+t$이다.

<반복법>

$\boldsymbol{s}_0\in R^N$: 초기치 $m\geq 0$에 대하여

$\Theta(\boldsymbol{s}_m):=\arg\dot{\eta}(\boldsymbol{s}_m)$

$\boldsymbol{v}:=\Theta(\boldsymbol{s}_m)-\boldsymbol{t}$

$\boldsymbol{w}:=K_N\boldsymbol{v}$

$\alpha:=\frac{1}{N}\sum_{\mu=0}^{N-1}v_\mu$, $\beta:=\frac{1}{N}\sum_{\mu=0}^{N-1}(-1)^\mu v_\mu$

$\boldsymbol{q}:=Im(\exp(\boldsymbol{w}-i\Theta(\boldsymbol{s}_m))\cdot\eta(\boldsymbol{s}_m))$

$\boldsymbol{p}:=K_N\boldsymbol{q}$

$\hat{q}:=\frac{1}{N}\sum_{\mu=0}^{N-1}q_\mu$

$$\boldsymbol{s}_{m+1}:=\boldsymbol{s}_m-Re\frac{\eta(\boldsymbol{s}_m)}{\dot{\eta}(\boldsymbol{s}_m)}-\frac{\boldsymbol{p}+\hat{q}\cot\alpha+\beta\cos n\boldsymbol{t}}{r(\boldsymbol{s}_m)\exp(\boldsymbol{w})}$$

위의 Wegmann 반복법에 의해 수치실험을 한 결과 난이도가 높아짐에 따라 수렴을 한 후 발산을 거나 수렴하지 않는 경우가 있다는 문제점이 발견되었다((그림 1) 참조).

III. Wegmann 법의 수렴성 분석

Wegmann의 반복법을 간단히

$$\boldsymbol{s}_{m+1}=W(\boldsymbol{s}_m),\ m\geq 0 \tag{4}$$

로 하고 분석하기로 한다.

$\delta_m=\boldsymbol{s}_{m+1}-\boldsymbol{s}_m$로 하면

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}_{m+1}&=\boldsymbol{s}_{m+2}-\boldsymbol{s}_{m+1}=W(\boldsymbol{s}_{m+1})-\boldsymbol{s}_{m+1}\\&=W(\boldsymbol{s}_m+\boldsymbol{\delta}_m)-\boldsymbol{s}_{m+1}\approx W(\boldsymbol{s}_m)+W_{s_m}\boldsymbol{\delta}_m-\boldsymbol{s}_{m+1}\\&=W_{s_m}\boldsymbol{\delta}_m\approx W_s\boldsymbol{\delta}_m\end{aligned} \tag{5}$$

로 근사한다. 여기서 W_{s_m}는 W의 $\boldsymbol{s}_m$에서의 미분이며 W_s는 참값 $\boldsymbol{s}$에서의 미분이다. 결국 반복횟수 m이 커짐에 따라 $\|\delta_{m+1}\|/\|\delta_m\|$는 W_s의 스펙트럼 반경에 근접해 간다. 그러므로 이 스펙트럼반경이 1보다 크면 수정량이 점점 증가하여 수렴하지 않게 된다. 여기서 문제영역이

단위원에 가까울 경우에 W_s의 스펙트럼 반경을 실제로 평가해 보기로 한다. 문제영역의 경계가

$$\eta(t)=(1+\xi(t))e^{it} \qquad (6)$$

로 표현되는 영역이라 하자. 노름(norm)은

$$\|\xi\| := \|\xi\|_\infty + \|\xi'\|_\infty + \|\xi''\|_\infty$$

로 정의하고 식 (6)에서의 $\|\xi(t)\|$은 충분히 작다고 가정한다. 이때 W_s를 계산하면

$$W_s(\boldsymbol{u}) = -Y(\xi, \boldsymbol{u}) + O(\xi^2) \approx -Y(\xi, \boldsymbol{u}) \qquad (7)$$

로 된다. $\|\xi\|$가 충분히 작으면 식 (6)의 $\|Y(\boldsymbol{u})\|$은 1보다 작아져서 수렴성이 보장된다.

$\xi(s)=R\cos ls \quad (0\le R<1,\ 1\le l<n)$

의 경우 Y를 계산하면 다음과 같다.

Y의 스펙트럼 반경을 계산하면

$$\|Y\|_{sp}=\begin{cases}\sqrt{2}R & : l=1\\ 2Rl & : l=2,3,\cdots,n-1\end{cases}$$

이다. 이것은 이산화한 반복법이 1차 수렴한다는 것을 말해준다. 따라서 이론적으로 2차 수렴 하는 것으로 알려진 Newton법인 Wegmann 방법이 선형 수렴하는 것은 이산화 때문이라는 것을 알 수 있다.

IV. 저주파 필터에 의한 안정화

식 (5)에서 알 수 있었듯이 W의 $\boldsymbol{s}$에서의 미분 W_s의 스펙트럼 반경은 반복법의 점근적 수렴비율이다. 문제를 간단히 하기 위해 식 (7)의 $O(\xi^2)$ 항을 무시하면 W_s은 주파수 $n-l$ 미만의 성분에 대하여는 영작용소(零作用素)이 되어 반복법이 수렴하지 않는 원인은 주파수 $n-l$ 이상의 고주파 성분 때문임을 알 수 있다. 이것은 다음에 정의하는 저주파 필터(low frequency pass filter)에 의해 반복법의 근사치 $\boldsymbol{s}_m$가 움직이는 공간을 제한하면 수렴성을 개선할 수 있음을 암시하는 것이다.

저주파 필터 $L_k(e^{im\boldsymbol{t}})$를

$$L_k(e^{im\boldsymbol{t}})=\begin{cases}e^{im\boldsymbol{t}} & : 0\le|m|\le n-k\\ 0 & : n-k<|m|\le n\end{cases} \qquad (8)$$

로 정의한다. 여기서 k는 뒤에서부터 몇 개의 고주파 성분을 제거할까를 나타내는 파라메터이다.

식 (8)에서 정의한 저주파 필타 L_k를 위의 Wegmann의 반복법 (4)에 적용시켜 새로운 근사값 $\boldsymbol{s}_{m+1}$을

$$\boldsymbol{s}_{m+1}=L_k(W(\boldsymbol{s}_m)),\ m=0,1,2,... \qquad (9)$$

로 정의하면

$$(L_kW)_s(\boldsymbol{u})=-L_kY(\boldsymbol{u})+O(\xi^2)$$

이 되며 $(L_kW)_s$의 주요부 L_kY은 영작용소(零作用素)가 되어 수렴성이 개선된다. 실제로 식 (9)에서 정의한 저주파필터에 의한 새로운 반복법으로 수치실험을 한 결과 반복법이 안정이 되어 Wegmann에 의한 반복법으로는 수렴하지 않는 모든 문제에 있어서 수렴하였기에 그 결과를 5장에 제시한다.

V. 수치 실험 및 결론

계산 예로서는 등각사상의 문제영역을 편심원(偏心圓)으로 하였는데 이것은 등각사상이 알려져 있어 오차의 평가가 용이한 고전적인 예이기 때문이다. 주어진 조건과 구하고자 하는 해는 다음과 같다. 경계가 $\eta(s)=\rho(s)e^{is}$로 극좌표 표현되었을 때 주어진 조건은

$\rho(s)=\dfrac{r\cos s+\sqrt{1-r^2\sin^2 s}}{r+1}$, $0\le r<1$ 이고

구하고자 하는 해는 $s(t)=\arctan\dfrac{r\sin t}{1-r\cos t}$ 이다.

수치실험의 예인 편심원은 형상 파라메터 r이 1에 가까울수록 영역의 모양이 복잡해져서 난이도가 높아지는 영역이다. 초기치로서는

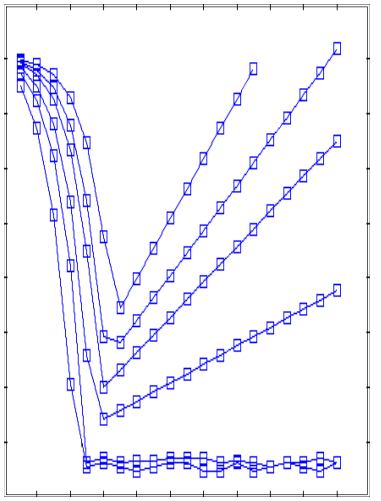
$\boldsymbol{s}_0=(t_0,t_1,\cdots,t_{N-1})^T$, $t_j=2\pi j/N$로 하고 실험 결과를 나타내는 표에서 기호의 의미는 다음과 같다. m :반복횟수 , r : 문제영역

N :이산화한 표본수 이며 수정량은

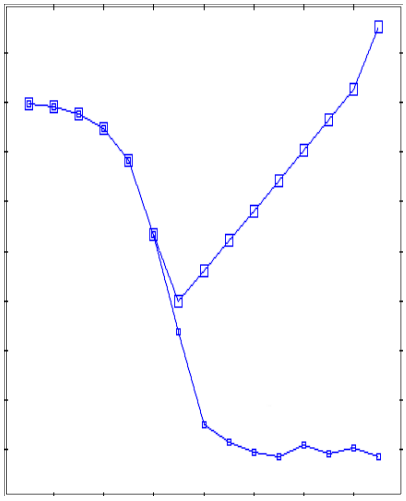
$\|\delta_m\|_2 := \|\boldsymbol{s}_m - \boldsymbol{s}_{m+1}\|_2$

그림 1,2 의 세로는 $\log_{10}\|\delta_m\|$를 나타낸다.

.



(그림 1) Wegmann 방법에 의한 수정량



(그림 2) r=0.75일 때 Wegmann과 저주파필터 방법에 의한 수정량 비교

(그림 1)은 Wegmann이 제안한 반복법으로 수치실험을한 결과로서 반복횟수에 따른 수정량을 나타낸 것이다. 그림1에서 알 수 있듯이 편심원의 형상 파라메터 r이 약 0.5 이상이 되면 일단 수렴했다가 발산하는 현상이 나타났다. 그러나 본 연구에서 제안한 저주파필터를 적용한 반복법에 의해 수치실험을 한 결과 이러한 발산하는 현상을 막을 수 있었다. (그림 2)에서 처럼 r = 0.75일 때 Wegmann이 제안한 방법으로는 6회 반복 후부터 수정량이 커져서 발산하는 반면 저주파필터를 적용한 방법으로는 7회에 수렴하고 그 이후도 반복법의 안정성을 보이고 있다. Wegmann의 방법으로는 발산하는 다른 문제도 저주파필터를 적용한 방법에 의하면 반복법이 안정이 되어 발산하는 현상을 막을 수 있었다.

본 연구에서는 발산하는 문제점을 갖고 있는 Wegmann의 반복법을 이론적으로 분석하여 저주파필터의 유효성을 밝혔다는 점에서 그 의의가 크다고 사료된다. 또한 여기서 제안한 저주파필터가 Wegmann 방법r이외의 Thedorsen방정식의 해법에 유효할 것이 예상된다.

참 고 문 헌

[1] 송은지, “등각사상에 있어 Theodorsen방정식의 고속해법”, 한국정보처리학회논문집, 제5권 제2호, pp.372-379, 1998.

[2] 天野 要, “代用電荷法に基づく双方向的な數値等角寫像の方法”, 日本情報處理學會論文集, Vol.31, No.5, pp.623-632, 1990.

[3] 양현규,“등각사상에 의한 대칭 스트립 전송선의 고차모드 차단 주파수의 변분적 계산”, 한국전자파학회논문지, 제13권 제2호, 2002.

[4] Gutknecht, M. H. “Numerical conformal Mapping Methods Based on Function Conjugation,” J. Comput. Appl. Math. 14, No.1,2, pp.31-77, 1986.

[5] Wegmann, R., “Discretized versions of Newton type iterative methods for conformal mapping,” J. Comput. Appl. Math.29, No.2, pp.207-224 ,1990.

[6] Gutknecht, M. H. “Fast Algorithm for the conjugate Periodic Function,” J. Computing No.22, pp.79-91, 1979.

[7] Wegert, E. “An iterative method for solving nonlinear Rimann-Hilbert problems,” J. Comput. Appl. Math.29, No.29, pp.311-327, 1990.

[8] Wegmann, R., “Convergence proofs and error estimates for an iteration method for conformal mapping,” Numer. Math. 44, pp.435-461, 1984.