

고차 창함수 기반의 디지털필터 설계에 관한 연구

배 상 범* · 김 남 호*

*부경대학교 공과대학 전기제어공학부

A Study on Digital Filter Design based on High-order Window Function

Sang-Bum Bae* · Nam-Ho Kim*

*School of Electrical and Control Eng., Pukyong National Univ.

E-mail : nhk@pknu.ac.kr

요 약

디지털 신호처리 기술은 통신을 비롯한 다양한 분야에서 이용되고 있으며, 이러한 신호처리를 위해 사용되는 대표적인 필터에는 FIR 디지털 필터가 있다. 그리고 FIR 디지털 필터를 설계함에 있어서, 이상적인 필터에 대한 계수 절단 과정에서 발생하는 깁스현상(Gibbs phenomenon)을 감소시키기 위해, 창함수를 사용한다. 따라서, 본 논문에서는 디지털 필터의 성능을 향상시키기 위해, 고차의 창함수를 적용하였으며, 시뮬레이션에서 최대부엽의 크기와 천이 특성을 이용하여 기존의 창함수와 비교하였다.

ABSTRACT

Digital signal processing technique use to variety fields including communication. For these signal processing, FIR digital filter is representative. And for FIR digital filter designing, the window function is used to reduce the Gibbs phenomenon which occurs in the coefficient cutting process of the ideal filter. Therefore, in this paper to improve performance of digital filter, a high-order window function was applied. In this simulation, we compared a peak side-lobe and a transient characteristics with the existing window function.

키워드

FIR digital filter, Gibbs phenomenon, window function

I. 서 론

디지털 신호처리 기술은 통신을 비롯한 다양한 분야에서 이용되고 있으며, 이러한 신호처리를 위해 사용되고 있는 디지털 필터는 일반적으로 IIR (infinite impulse response) 필터와 FIR (finite impulse response) 필터로 구분된다[1].

FIR 디지털 필터는 IIR 필터와 동일한 진폭특성을 얻기 위해 높은 차수의 필터가 요구되지만, 안정성이 보장되며 구현이 용이하다.

FIR 디지털 필터의 설계 방법 중, 창함수 설계 기법은 이상적인 필터의 무한 임펄스 응답을 유한 임펄스 응답으로 근사화하는 방법이다. 즉, 이상적인 필터의 푸리에급수 전개로부터 인과성을 만족시키기 위해 계수를 절단하게 되며, 이때 주파수 특성상 불연속점 부근에서 발생하는 깁스현상(Gibbs phenomenon)을 감소시키기 위해 창함

수를 적용한다.

본 논문에서는 FIR 디지털 필터의 성능을 향상시키기 위해 고차의 창함수를 사용하여 디지털 필터를 설계하였다. 그리고 시뮬레이션에서 최대부엽의 크기와 천이 특성을 이용하여 기존의 창함수와 비교하였으며, girl 영상을 이용하여 설계된 2-D 디지털 필터의 특성을 살펴보았다.

II. FIR 디지털 필터

선형시불변시스템에 식 (1)과 같은 이산신호 $x[n]$ 이 입력되었을 경우의 출력 $y[n]$ 은 식 (2)와 같이 표현된다.

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n] \delta[n-k] \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_k[n] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n] h[n-k]
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

식으로부터, $\delta[n]$ 은 단위임펄스 신호를 나타내며, $h_k[n]$ 은 $n=k$ 에서 단위 임펄스가 인가될 때의 임펄스 응답(impulse response)이다. 그리고 일반적으로 FIR 디지털 필터는 식 (3)과 같이 표현된다.

$$y[n] = \sum_{k=0}^M a_k x[n-k]
 \tag{3}$$

위의 식으로부터, a_k 는 필터계수로서 시스템의 특성을 결정짓는 파라메타이다. 그리고 출력 $y[n]$ 은 현재 또는 과거의 입력에 의해서만 결정되며, 과거 출력에 대한 피드백 성분이 존재하지 않는다. 따라서 이러한 형태의 필터를 비재귀형 디지털 필터라고도 한다.

선형시불변시스템에 복소지수신호 $e^{j\omega n}$ 이 입력될 경우, 출력 $y[n]$ 은 식 (4)와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} \\
 &= H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

식으로부터, $H(e^{j\omega})$ 는 시스템의 주파수 응답으로서, 크기응답 $|H(e^{j\omega})|$ 와 위상응답 $\angle H(e^{j\omega})$ 을 이용하여 식 (5)와 같이 표현된다.

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \angle H(e^{j\omega})
 \tag{5}$$

III. 창함수를 이용한 필터 설계

임펄스 응답과 필터 계수의 관계가 $h[n] = a_n$ 이므로, 임펄스 응답이 주어질 경우 FIR 필터의 계수를 얻을 수 있다. 이때, 식 (4)의 시스템 주파수 응답 $H(e^{j\omega})$ 이 무한개의 임펄스 응답으로 구성되어 있으므로, 인과성을 만족시키는 유한차수의 임펄스 응답을 얻기 위해, 필터 계수에 대한 절단이 필요하다. 그러나 이러한 계수 절단에 의해, 주파수 특성상 불연속점 부근에서 깃스현상이 발생한다[3].

이와 같은 깃스현상은 창함수 $w[n]$ 을 적용하여 완화할 수 있으며, 창함수 연산이 수행된 후의 임펄스 응답 $h_w[n]$ 을 식 (6)과 같이 정의한다[4].

$$h_w[n] = h[n] w[n]
 \tag{6}$$

이때, 인과성을 만족하는 차수 M 의 1차원 창함수 $W(e^{j\omega})$ 는 아래의 식 (7)과 같다.

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M w[n] e^{-j\omega n}
 \tag{7}$$

주파수 영역에서 인과적 FIR 디지털 필터의 응답 $H_w(e^{j\omega})$ 는 식 (8)과 같이, 이상적인 필터의 주파수 응답 $H(e^{j\omega})$ 와 창함수의 주파수 응답 $W(e^{j\omega})$ 의 주기적 컨벌루션으로 표현된다.

$$\begin{aligned}
 H_w(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega}) \otimes W(e^{j\omega}) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{j\phi}) H(e^{j(\omega-\phi)}) d\phi
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

그리고 위의 식 (8)에 상응하는 FIR 디지털 필터의 전달함수는 식 (9)와 같이, $w[n]$ 과 $h[n]$ 의 곱으로부터 얻어진다.

$$H_w(z) = \sum_{n=0}^M (h[n] w[n]) z^{-n}
 \tag{9}$$

영상처리를 위해, 필터의 전달함수는 식 (10)과 같이 2차원으로 확장된다.

$$\begin{aligned}
 H_w(z_u, z_v) &= \sum_{u=0}^M (h[u] w[u]) z^{-u} \sum_{v=0}^N (h[v] w[v]) z^{-v}
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

여기서, $w[u]$ 와 $w[v]$ 가 환상대칭이라면, 2차원 창함수는 Huang의 방법에 의해, 1차원 창함수의 사양으로부터, 식 (11)과 같이 얻을 수 있다[5].

$$w[m, n] = w[\gamma] \Big|_{\gamma = \sqrt{m^2+n^2}} = w[\sqrt{m^2+n^2}]
 \tag{11}$$

현재 아래의 식들과 같이 표현되는 창함수들이 가장 일반적으로 사용되고 있으며, 이러한 창함수를 설계함에 있어서 주엽폭과 최대부엽의 크기를 최소화할 수 있도록 해야 한다.

$$w_{hn}[n] = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right), & -\frac{M}{2} \leq n \leq \frac{M}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}
 \tag{12}$$

$$w_{hm}[n] = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right), & -\frac{M}{2} \leq n \leq \frac{M}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}
 \tag{13}$$

$$w_{bt}[n] = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right), & -\frac{M}{2} \leq n \leq \frac{M}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}
 \tag{14}$$

위의 식으로부터, $w_{hn}[n]$ 은 Hanning, $w_{hm}[n]$ 은 Hamming, 그리고 $w_{bl}[n]$ 은 Blackman window를 나타낸다.

본 논문에서는 천이대역폭과 최대부엽의 크기특성을 향상시키기 위해, 아래의 두 식과 같은 고차의 창함수 모델 $w_{p1}[n]$ 과 $w_{p2}[n]$ 을 제안하였다.

$$w_{p1}[n] = \begin{cases} 0.586 + 0.429 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) - 0.023 \cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right) \\ \quad + 0.008 \cos\left(\frac{6\pi n}{M}\right), & -\frac{M}{2} \leq n \leq \frac{M}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (15)$$

$$w_{p2}[n] = \begin{cases} 0.591 + 0.425 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) - 0.025 \cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right) \\ \quad + 0.009 \cos\left(\frac{6\pi n}{M}\right), & -\frac{M}{2} \leq n \leq \frac{M}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (16)$$

IV. 시뮬레이션 및 결과

본 논문에서는 FIR 디지털 필터의 성능을 향상시키기 위해 고차의 창함수를 제안하였으며, 기존의 창함수를 이용한 디지털 필터와 비교하였다. 이때, 성능평가의 기준으로는 천이대역폭과 최대부엽의 크기특성을 사용하였으며, 창함수의 차수를 $M = 48$ 로 설정하여 차단주파수 $\omega_c = 0.2$ 인 저역통과필터를 설계하였다.

그림 1은 기존의 창함수와 본 논문에서 제안한 창함수의 모양을 함께 나타낸 것이다. 그리고 그림 2는 각 창함수들을 비교하기 위해, 차단주파수 $\omega_c = 0.2$, 차수 $M = 48$ 인 저역통과필터를 설계하여, 주파수특성을 시뮬레이션한 것이다. 또한 그림 3은 저역통과필터에 대한 최대부엽의 크기특성을 분석하기 위해, 그림 2의 일부를 확대한 것이다.

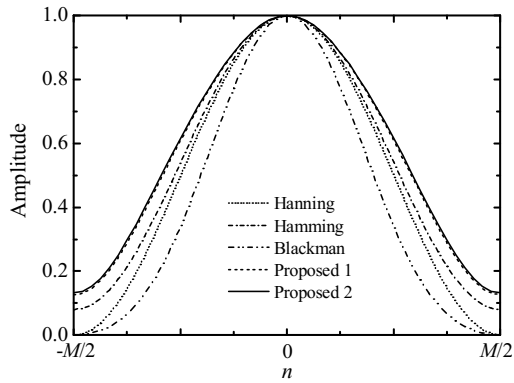


Fig. 1. Profiles of each window function.

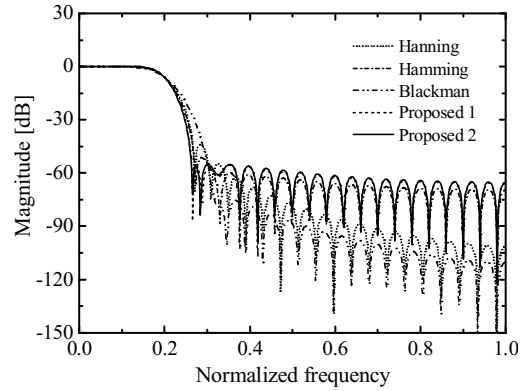


Fig. 2. Frequency characteristics of designed lowpass filter by window functions.

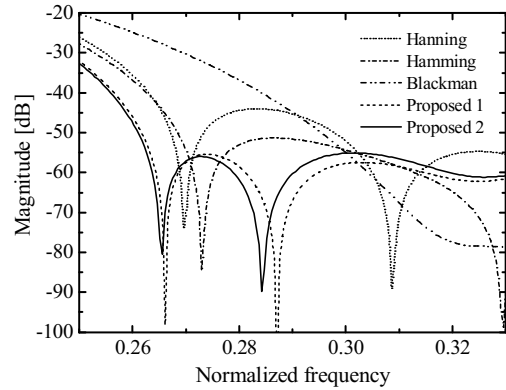


Fig. 3. Peak side-lobe characteristics.

표 1은 창함수에 의해 설계된 필터의 특성을 최대부엽의 크기와 천이대역폭으로 비교한 것이다. 표로부터, ps 는 최대부엽의 크기를 나타내며, ΔF 는 -3 [dB]인 주파수로부터 천이대역 상에서 ps 와 동일한 크기를 갖는 주파수까지의 폭을 나타낸다.

Table 1. Characteristics of each window function

	Hanning	Hamming	Blackman	Proposed 1	Proposed 2
ps [dB]	44.0238	51.3234	75.3684	55.3809	55.0885
ΔF	0.0831	0.0856	0.1383	0.0787	0.0778

표의 결과로부터, 본 논문에서 제안한 두 가지 형태의 고차 창함수 모델에 의한 결과는 ΔF 와 ps 모두에서 기존의 창함수에 의한 결과보다 우수한 특성을 나타내었으며, 특히 ps 에서는 Proposed 1, ΔF 에서는 Proposed 2가 더욱 개선된 결과를 나타내었다.

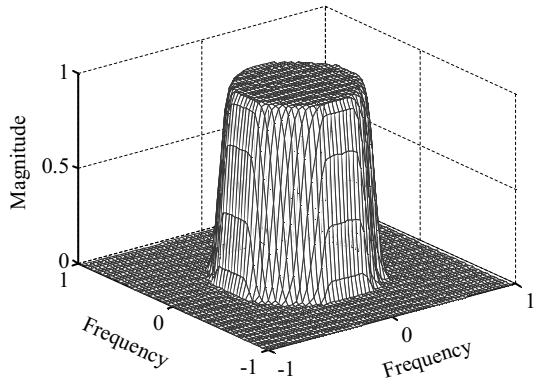


Fig. 4. Frequency response of 2D-LPF.



Fig. 5. Noisy image ($\sigma = 20$).



Fig. 6. Filtered image.

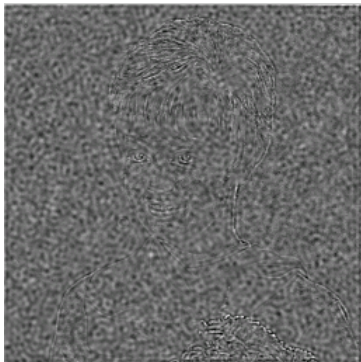


Fig. 7. Difference image.

그림 4에서 그림 7은 제안한 창함수 $w_{p1}[n]$ 의 특성을 살펴보기 위해, $M=48$ 과 $\omega_c=0.5$ 로 설정하여, 2D 저역통과 필터를 설계하고, girl 영상을 이용하여 시뮬레이션 한 것이다.

그림 4는 설계된 2D 저역통과 필터의 주파수 응답이며, 그림 5는 $\sigma=20$ 의 AWGN이 중첩된 noisy 영상이다. 그리고 그림 6은 설계된 저역통과 필터에 의해 처리된 영상이며, 그림 7은 원영상과 필터링된 영상 사이의 차영상이다. 처리결과로부터, 제안한 창함수 모델을 사용한 2D 디지털 필터는 대역 분리특성이 양호함을 알 수 있다.

V. 결 론

본 논문에서는 FIR 디지털 필터의 성능을 향상시키기 위해, 고차의 창함수를 사용하여 필터를 설계하였으며, 시뮬레이션에서 천이대역폭과 최대부엽의 크기를 이용하여 기존의 창함수와 비교하였다.

시뮬레이션 결과로부터, 본 논문에서 제안한 두 종류의 창함수 모델에 의한 필터특성이 기존의 창함수 모델을 사용한 경우보다 모두 우수한 결과를 나타내었다. 또한 제안한 두 모델은 천이대역폭과 최대부엽의 크기특성 중, 하나의 특성에서 좀 더 개선된 결과를 나타내므로 응용 분야에 따라 선택적으로 적용되리라 사료된다.

참 고 문 헌

- [1] A. Peled and B. Liu, Digital Signal Processing, John Wiley & Sons, 1976.
- [2] V. K. Ingle and J. G. Proakis, Digital Signal Processing Using MATLAB, PWS Publishing Company, 1998.
- [3] L. R. Rabiner and B. Gold, Theory and Application of Digital Signal Processing, Prentice-Hall, New Jersey, 1975.
- [4] T. Saramaki, "A class of window functions with nearly minimum sidelobe energy for designing FIR filters", *IEEE Int. Symp. Circuits and Systems*, vol. 1, pp. 359-362, May 1989.
- [5] T. S. Huang, "Two-dimensional windows", *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, vol. 20, pp. 88-89, March 1972.
- [6] T. S. Huang, J. W. Burnett, and A. G. Deczky, "The importance of phase in image processing filters", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 23, pp. 529-542, Dec. 1975.
- [7] R. W. Hamming, Digital Filters, Prentice-Hall, 1989.