위상최적화를 이용한 기하 비선형 구조물의 고유진동수 최적화

Maximizing Eigenfrequency of Geometrical Nonlinear Structure using Topology Optimization

윤 길 호*
Yoon, Gil Ho

요 약

본 논문에서는 비선형구조물의 위상최적화를 위하여 개발된 요소 연결 매개법 (Element Connectivity Parameterization Method)을 이용하여 기하비선형 구조물의 고유진동수(Eigenfrequency)를 최적화하는 연구를 소개한다. 기존의 밀도를 기반으로 한 위상최적화기법은 비선형 구조물의 위상최적화를 수행할 때 약한 탄성계수를 가지는 요소가 대변형을 일으켜 전체 강성행렬(Tangent Stiffness Matrix)이 양정정성(Positive definiteness)를 잃어버리는 문제점이 있어서 위상최적화를 수행하기 어렵다. 이 문제점을 해결하기 위하여 최근에 요소 연결 매개법(Element Connectivity Parameterization Method)이 개발되었다. 이 요소 연결 매개법은 요소의 강성을 설계하는 것이 아니라 요소의 연결성을 설계하는 기법으로 이를 이용하여 비선형 구조물의 위상최적화를 효과적으로 수행할 수 있다. 이 연구에서는 요소 연결 매개법을 동적인 문제에 적용하기 위한 연구를 수행하며 이를 이용하여 비선형 구조물의 고유진동수를 최적화 하는 위상최적화 문제에 적용하였다. 비선형 수치 예제를 통하여 기하 비선형 구조물의 고유진동수를 최대화를 통하여 기하 비선형 구조물의 강성최대화 문제와 같은 결과를 얻을 수 있었다.

keywords : 위상최적화, 비선형 해석, 요소 연결 매개법, 고유진동수

1. 서 론

위상최적화(Topology optimization)는 구조물의 설계 영역(Design domain)에 주어진 제한 조건(Constraint)를 만족시키며 목적함수(Objective function)을 최대화하거나 최소화하는 최적의 위상(Topology; layout)을 수치적인 방법을 통하여 구하는 구조최적화(Structural optimization) 기법 중의 하나이다. 이 위상최적설계는 기존의 구조최적화 방법인 치수최적화(Size optimization)나 형상최적화(Shape optimization)와 대비하여 더 뛰어난 성능을 가지는 위상을 설계할 수 있다는 강점이 있다(Bendsoe M.P., Sigmund O., 2003). 예를 들어 아래 Fig. 1 (a)와 같은 경계조건과 하중이 존재할 때 Fig. 1 (b-c)와 같이 설계 영역의 한계가 있는 기존의 치수최적화나 형상최적화와 다르게 위상최적화는 Fig. 1 (d)에서 볼 수 있듯이 초기 위상과는 많이 다른 구조물을 얻을 수 있다.

* 정회원 • 경북대학교 기계공학부 교수 ghy@knu.ac.kr

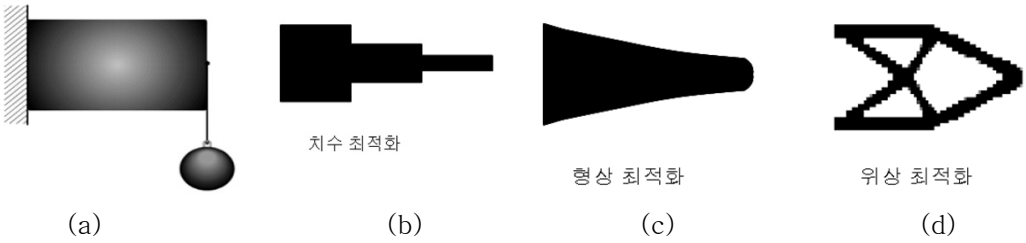


그림 1 Structural optimization (a) problem definition, (b) size optimization, (c) shape optimization, and (d) topology optimization.

기존의 위상최적화 기법은 선형 구조물에 많이 이용되어 왔고 연구되어 왔지만 비선형 구조물과 멀티 피직스 시스템에서 여러 가지 문제가 발생되는 것으로 알려져 있다 (Yoon and Kim, 2005; Cho and Jung, 2003). 대표적인 문제점으로 구조물의 탄성계수와 비교하여 아주 약한 강성을 가지는 부분의 요소가 비선형 해석 중 외부에서 가해지는 힘으로 인하여 찌그러지는 현상을 발생하고 이 때문에 뉴톤랩손(Newton-Raphson)방법을 통하여 해를 구하지 못한다는 문제점이 알려져 있다(Yoon and Kim, 2005; Cho and Jung, 2003). 이를 해결하기 위하여 때문에 그림 2에서와 같이 요소의 연결성을 고려한 위상최적화 기법이 최근에 개발되어 비선형 구조물의 위상최적화에 사용되고 있다 (Yoon and Kim, 2005).

이 새로운 기법은 기존의 위상최적설계 기법과 다르게 설계 영역을 분할하는 요소를 서로 물리적으로 분리하고 그 요소 사이를 길이가 0인 링크(link)요소로 연결한다. 이 방법에서는 설계영역을 분할 하는 요소 자체의 강성이 변화하지 않기 때문에 각 요소의 강성을 바꾸는 기존의 위상최적화기법과 비교하여 요소가 찌그러지는 현상이 적게 일어나고 강성행렬이 양정성(Positive definiteness)가 유지되기에 비선형 구조물에서 해석이 안정되는 이점이 보고되었다 (Yoon and Kim, 2005).

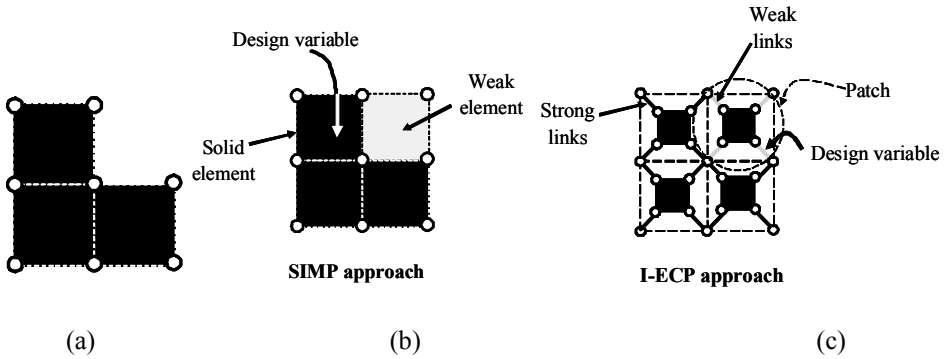


그림 2 Modeling approach for the SIMP (Solid Isotropic Material with the Penalization) approach and the ECP (Element Connectivity Parameterization) method.

2. 기하비선형 구조물의 고유진동수 해석

비선형 고유진동수는 선형 구조물의 고유진동수 해석과 다르게 구조물이 하중에 의해 변화하는 강성행렬(Tangent Stiffness Matrix)를 이용하여 해석을 하는 것이다. 그렇기 때문에 제일 먼저 뉴톤랩손(Newton-Raphson)방법으로 비선형 구조해석을 수행하고 수렴한 상태에서 변위의 함수인 접선 강성도 행렬(Tangent Stiffness Matrix)를 구하고 이를 이용하여 고유진동수 해석을 수행한다. 그렇기 때문에 결과적으로 선형 구조물에서와는 다르게 구조물의 가해지는 힘과 고유진동수가 비선형 관계를 가지게 된다.

이 비선형 구조물의 고유진동수를 구하기 위해서 다음과 같이 제일 먼저 비선형 구조 해석을 수행한다.

$$^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(k-1)} + \Delta\mathbf{U}^{(k)}, \qquad {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(0)} = {}^{t}\mathbf{U} \tag{1}$$

$$^{t}\mathbf{K}_{\mathrm{T}}^{(k-1)}\Delta\mathbf{U}^{(k)} = \mathbf{R}({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(k-1)}) \tag{2}$$

여기서 접선강성도 행렬은 $^{t}\mathbf{K}_{\mathrm{T}}^{(k-1)}$이고 변위의 증분률과 불평형력은 각각 $\Delta\mathbf{U}^{(k)}$과 $\mathbf{R}({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(k-1)})$이다. 뉴톤랩손반복 방법으로 변위의 증분률이 한도 내에서 수렴할 때까지 위의 계산을 반복한다. 비선형 구조물의 고유진동수를 구하기 위해서 위에서 수렴한 상태의 접선강성도 행렬과 질량행렬을 이용하여 다음의 고유치 문제를 풀어 고유진동수를 구하게 된다.

$$({}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\mathrm{T}} - w^2\mathbf{M})\boldsymbol{\Phi} = 0, \;\; \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I} \tag{3}$$

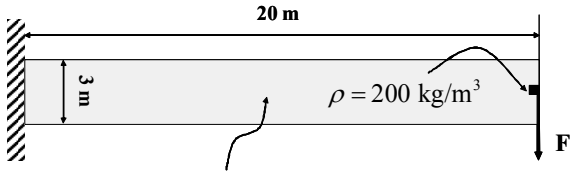
여기서 질량 행렬과 고유벡터와 고유진동수는 각각 $\mathbf{M}$, $\boldsymbol{\Phi}, w$로 나타난다. 이로 인하여 비선형 구조물에선 외부에서 가해지는 힘의 크기에 따라 고유진동수가 다르게 변한다 (Yoon, 2009).

3. 요소 연결 매개법을 이용한 기하비선형 구조물의 고유진동수 최적화

이 절에서는 위에서 살펴본 요소 연결 매개법을 이용하여 고유진동수를 최적화하기 위한 기하비선형 구조물의 위상최적화를 수행한다. 위상최적화를 위하여 다음과 같은 최적화 문제를 정식화 하였다.

$$\begin{aligned} &\underset{\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{Max}}\left\{\underset{j=1,\ldots,J}{\mathrm{Min}}\left\{\omega_j\right\}\right\} \\ &\text{s.t.} \quad \sum_{e=1}^{N_p}\rho_e(\gamma_e)\mathrm{v}_e \le V^* \end{aligned} \tag{4}$$

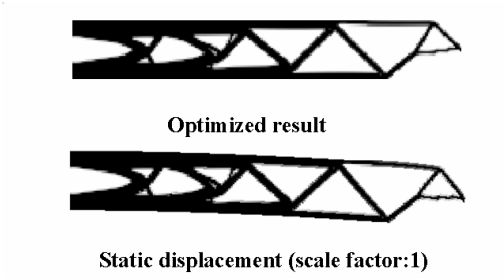
여기서 설계 변수는 설계 변수는 $\boldsymbol{\gamma}$이고 j 번째 고유진동수는 w_j로 표현되어 있다. 요소 연결 매개법을 위한 패치(Patch)의 개수는 N_p로 그리고, 각 요소의 볼륨은 $\mathrm{v_e}$로 표현되어 있고 제한된 재료의 한계값은 V^*로 표현되어 있다. 그림 2에서는 끝단에 집중질량이 있는 평면 구조물에서 중앙에서 힘을 가하지 않는 경우와 힘이 있는 경우의 최적화 결과를 보여주고 있다. 여기에서 하중이 가해지는 경우와 가해지지 않은 경우에 다른 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있었다(Yoon, 2009). 또한, 이 특정한 문제에서는 1차 고유진동수를 최대화하기 때문에 주어진 끝단 하중에 대한 전체강성이 증가하며 이로 인하여 비선형 컴플라이언스 최소화와 같은 결과를 얻을 수 있었다.



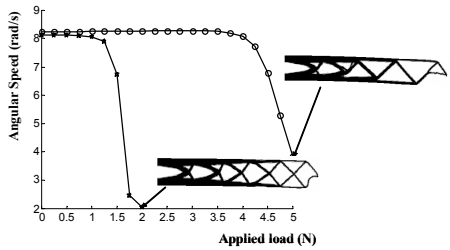
$E = 1.0\times10^4$ N/m^2, $\nu = 0.3$, $\rho = 0.1$ kg/m^3

(a)

(b) F=0 N



(c) F=1.5 N



(d)

그림 2 Modeling approach (b) for the SIMP (Solid Isotropic Material with the Penalization) approach, (c) the ECP (Element Connectivity Parameterization) method and (d) the load and frequency curve.

4. 결론

이 논문에서는 요소연결매개법이라는 방법을 사용하여 비선형 구조물의 고유진동수를 최적화하였다. 이 논문에서 알아낸 사실은 비선형을 고려하여 제 1차 고유진동수를 최적화하면 선형과 마찬가지로 컴플라이언스 최소화 결과를 얻을 수 있다는 것이다.

감사의 글

본 연구는 2008년 경북대학교 신임교수지원사업으로 이루어진 것으로, 본 연구를 가능케 한 학교당국에 감사드립니다.

참고문헌

Bendsoe M.P., Sigmund O. (2003) Topology Optimization Theory, Methods and Applications. Springer-Verlag, New York

Yoon G.H. (2009) Maximizing the fundamental eigenfrequency of geometrically nonlinear structures using the element connectivity based topology optimization, in review.

Cho S.H. and Jung H.S. (2003) Design sensitivity analysis and topology optimization of displacement-loaded nonlinear structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192, pp. 2539-2553.

Yoon G.H. and Kim Y.Y. (2005) Element connectivity parameterization for topology optimization of geometrically nonlinear structures, *International journal of solids and structures*, 42(7), pp. 1983~2009