

학교수학에서 경험적 일반화와 이론적 일반화의 고찰

윤 대 원 (경상대학교)

김 동 근 (대구청구고등학교)

수학적인 사고에는 여러 가지 유형이 있는데 그 중에서 가장 기본이 되는 사고유형 중의 하나가 일반화이다. 수학에서 일반화는 지식을 발견 및 발명할 뿐만 아니라 새로운 수학 이론을 확립해 나가는 데 중요한 역할을 한다. 본 연구에서는 이러한 일반화를 경험적 일반화와 이론적 일반화로 구분하였고, 일반화에 대한 선행연구를 바탕으로 이 두 유형의 일반화에 대해 고찰한다. 또한, 두 유형의 일반화에 대한 학교수학에서의 다양한 예를 찾아 제시할 뿐 아니라 새로운 예를 제시함으로써 경험적 일반화와 이론적 일반화의 개념이 정립될 수 있도록 한다. 마지막으로 중학교 및 고등학교에서 다루는 한 가지 학습내용을 통해 경험적 일반화와 이론적 일반화에 대한 체계적인 분석을 실시하고 교육적인 시사점을 제시한다.

I. 서 론

따라서 본 연구에서는 이러한 필요성에 따라 첫째, 수학적인 사고에서 가장 기본이 되는 사고유형 중의 하나인 일반화가 무엇인지와 일반화의 두 가지 큰 유형인 경험적 일반화와 이론적 일반화에 대한 개념을 확립하는 것, 둘째, 두 유형의 일반화에 대한 이해를 바탕으로 현재 중등학교에서 다루는 학습 내용을 바탕으로 경험적 일반화와 이론적 일반화가 어떻게 이루어질 수 있는지 구체적인 예를 통해 고찰하는 것을 본 연구의 목적으로 설정한다.

II. 일반화의 유형

본 장에서는 일반화에 대한 다양한 견해를 바탕으로 일반화를 경험적 일반화와 이론적 일반화로 분류한다. 또한 각각의 일반화에 대한 개념을 구체적으로 고찰하도록 한다.

1. 일반화에 대한 생각

일반화는 교육심리학과 교육방법론에서 자주 마주치게 된다. 특히 분석이 종합과 대비된다고 한다면, 일반화는 추상화와 비교하면서 언급되어지고 있다. 일반적으로 추상화의 작용이 '외연을 일단 고정시키고 내포를 명확히 하는 것'인데 비해, 일반화의 작용은 '내포를 일단 고정시키고 이에 해당하는 외연을 한층 더 명확히 하는 것'으로 본다(편동중남, 1993).

구체적으로 Krutetskii가 언급한 일반화에 대해 서보익(2008)은 다음과 같이 주장하고 있다. 일반화는 주어진 문제에 대한 적용 가능한 알고리즘을 찾거나 새로운 알고리즘을 만드는 것과 관련된다. 실제로, 수학교육에서 효과적인 일반화는 두 가지 측면으로 나누어 생각할 수 있다. 하나는 '주어진 문제 상황을 우리가 이미 알고 있는 내용 중에서 어디에 적용할 것인지 정확하게 결정하는 것', 다른 하나는 '구체적이고 특별한 내용들로부터 추상화하여, 주어진 내용들 사이의 관계, 유사성 등을 찾아 본질적인 것이 무엇인지 결정하는 것'이다.

또한 Krutetskii는 일반화의 네 가지 수준을 제시하고 있다. 제1수준은 교사의 도움과 많은 수의 동일 유형의 문제들을 해결한 후에도 본질적인 특성에 따라 수학적 자료를 일반화시키지 못하는 수준이다. 제2수준은 교사의 도움을 받으면 상당수의 동일 유형의 문제를 해결하고, 틀리고 실수를 해 가면서 본질적인 특성에 따라 수학적 자료를 일반화하는 수준이다. 제3수준은 혼자서 본질적인 특성에 따라 수학적 자료를 일반화하는 수준이다. 제4수준은 교사의 도움이나 동일 유형의 문제를 푸는 특별한 교육 없이 수학적 자료를 옳게 또한 즉각적으로 어려움 없이 일반화하는 수준이다.

2. 일반화의 두 가지 유형

지금까지 일반화에 대한 여러 학자들의 주장에 대해 고찰해 보았다. 수학교육에서 일반화를 보는 다양한 시각과 일반화의 중요성에 대한 다양한 견해를 살펴보고, 본 절에서는 이를 바탕으로 일반화에 대한 서로 다른 두 유형에 대해 살펴본다.

일반화를 보는 관점에 따라 크게 두 유형으로 분류하는 전통은 오래 전부터 수학교육자들에 의해 이루어졌다. 그 대표적인 수학교육학자는 러시아의 심리학자이자 교육학자인 Davydov이다. 그가 쓴 'Types of Generalization in instruction'에서 일반화를 경험적 일반화(empirical generalization)와 이론적 일반화(theoretical generalization)로 분류하였다. 본 절에서는 일반화의 두 유형에 대한 여러 학자들의 주장을 문헌을 통해 살펴보고, 우리 학교교육에 적합한 경험적 일반화 및 이론적 일반화의 개념 정의를 구체화시키려고 한다.

가. 경험적 일반화에 대한 고찰

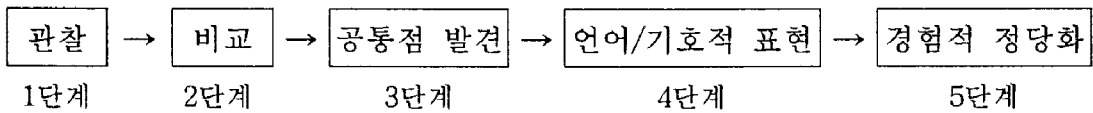
한인기(2006, p.19)는 어떤 범주의 대상들을 비교하면서, 사람은 대상들의 외적으로 동일한, 공통의 성질들(이들 대상에 대한 개념의 내용이 될 수 있는)을 찾아내고, 추출하며, 이들을 언어적으로 표현하게 되는데 이러한 과정을 통해 이루어지는 일반화를 경험적 일반화라고 제시하고 있다.

또한, 김남희(1997)는 경험적 일반화의 기본 절차에 대해 첫째, 여러 대상이나 상황 사이의 공통성을 찾아 인식하고 그 공통성질을 이러한 여러 대상이나 상황에 공통적이고 일반적인 것이라고 기억하는 것이며, 둘째, 이런 공통성의 발견은 여러 대상이나 상황의 외곽과 상징적인 모습을 비교함으로써 이루어지며, 셋째, 그 후 공통성은 정신적으로 분리되어 여러 대상이나 상황으로부터 떨어져 나오

게 된다¹⁾라고 밝히고 있다. 예를 들면, 인식의 초기 단계에서 공통성의 발견은 여러 수학적 대상을 비교·분석함으로써 ‘~와 공통점(유사성)이 있다’, ‘~한 성질을 가지고 있다’, ‘~와 구조적으로 같다’ 등과 같이 관계를 발견하고 추출하고 이를 통한 일반화를 경험적 일반화라 볼 수 있다.

<문제4> 사각형의 네 변의 중점을 연결하여 얻은 도형은 어떤 도형이 되는가?

<표 1> 경험적 일반화의 과정

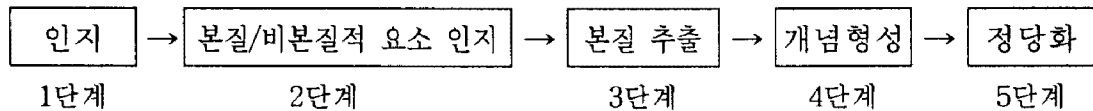


나. 이론적 일반화에 대한 고찰

한인기(2006)는 현상이나 대상(객체)의 본질적인 것의 추출에 관련된 개념이 이론적 일반화이며, 이런 일반화는 현상이나 대상들의 공통의 성질들 또는 유사한 성질이 아니라, 객체의 본질적인 성질에 관련된다고 제시하고 있다. 이것은 하나의 문제에서 그 문제의 본질적인 것을 추출하면 일반화시킬 수 있음을 의미한다. 즉, 하나의 문제라는 것은 일반화에 상반되는 특수한 경우로 다시 말하면 수학의 본질을 찾는 것이라고 할 수 있다.

서보익(2008)에 따르면, 일반화에 관한 Kruteskii의 연구는 주어진 대상, 관계 등과 같은 구체적 자료로부터 추상하고 본질적인 것을 찾는 것과 관련된다고 제시하고 있다. 이것은 알려지지 않은 본질적인 것을 찾는 일반화를 이론적 일반화라고 볼 수 있다.

<표 2> 이론적 일반화의 과정



3. 중등학교에서 경험적 일반화와 이론적 일반화

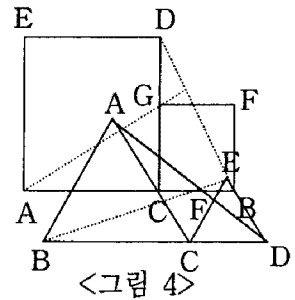
이번 장에서는 중학교와 고등학교 학교수학에서 다루어지는 한 가지 학습내용을 경험적 일반화 및 이론적 일반화로 나누어 분석하고자 한다.

1) 이러한 과정을 경험적 추상화 또는 아리스토텔레스식 추상화라고 부른다(Dörfler, 1991, p.65).

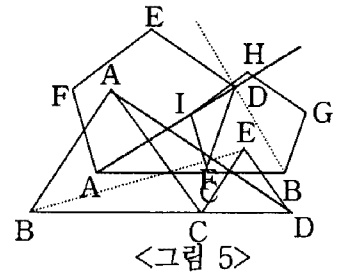
1) 중학교에서의 한 가지 학습내용

<문제4> 선분 AB 위에 임의의 한 점 C를 잡고, AC와 BC를 각각 한 변으로 하는 두 정 n각형을 그릴 때, 직선 AB₁과 직선 BA₁이 이루는 각의 크기는 어떻게 될 것인지 생각해 보시오.

- 가. 경험적 일반화를 통한 [문제4]에 대한 접근
 - 첫째, 관찰 단계이다.
 - 둘째, 비교 단계이다.
 - 셋째, 공통성 발견 단계이다.
 - 넷째, 언어적 혹은 기호적 표현 단계이다.
 - 다섯째, 경험적 정당화 단계이다.



- 나. 이론적 일반화를 통한 [문제4]에 대한 접근
 - 첫째, 인지 단계이다. [
 - 둘째, 본질 및 비본질적 요소 인지 단계이다.
 - 셋째, 본질을 추출하는 단계이다. 문제의 풀이과정에서 합동인 두 도형을 통해 임의의 정다각형에 대해 그 각의 크기를 구할 수 있음을 본질적인 요소로 발견한다.
 - 넷째, 개념형성 단계이다.
 - 다섯째, 정당화 단계이다.



III. 결론