

# 세차운동을 고려한 유니버설 조인트 시스템의 동역학적 정식화

## Dynamics Formulations of the Universal-joint System Under Effect on Precession

윤 성 호\*  
Yun, Seong-Ho

### 요 약

본 논문에서는 유니버설 조인트의 동역학적인 해석을 위하여 오일러 각 순서에 의한 방법과 4원수에 의한 방법으로 운동방정식을 유도하였다. 원동축과 종동축의 회전은 물론 세차운동을 하는 회전축을 포함할 때 각 방법의 상이점을 발견하였다. 이러한 시스템의 동역학적 정식화를 바탕으로 한 수치 예제를 통하여 기존의 오일러 각 방법과 제시한 4원수 방법의 해석 결과를 비교하였다.

**keywords** : 유니버설 조인트, 4원수, 세차운동, 오일러 각

### 1. 서 론

유니버설 조인트는 오랫동안 자동차의 구동계, 항공기의 제어기, 공작기계의 전동축에, 최근에는 의공학용으로도 사용되고 있다. 특히 차량에서 고장의 25% 가량이 동력전달 계통에서 일어나고 있으며, 이는 제작 및 설계의 오차, 정비 불량, 재료의 피로에 의하여 야기되는 것으로 보고되고 있다 (Bayrackceken 등, 2007). 이와 관련된 회전운동을 기구학적으로 기술하기 위하여 기존에는 오일러 각이 사용되었으며 근래에는 4원수(quaternion)가 적용되고 있다(윤성호, 2008). 본 논문에서는 세차운동을 포함하는 유니버설 조인트의 동역학적인 해석을 위하여 오일러 각에 의한 방법과 4원수에 의한 방법으로 운동방정식을 유도하였으며, 이를 바탕으로 한 수치 예제를 통하여 두 가지 방법의 해석 결과를 비교하였다.

### 2. 유니버설 조인트의 운동

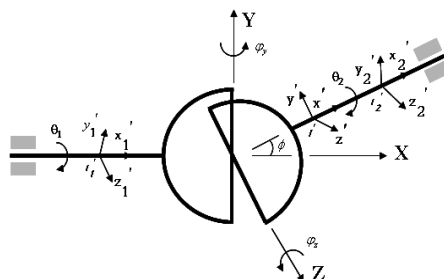


그림 1 유니버설 조인트의 기준좌표계와 회전좌표계

\* 정회원 • 금오공과대학교 기계공학부 교수 shyun@kumoh.ac.kr

그림 1에서 유니버설 조인트 시스템의 기준좌표계  $I(X, Y, Z)$ 를 설정한다. 원동축 1과 종동축 2의 회전축이  $(X, Y)$  평면 내에 존재하지 않고 십자형 부재의 길이 방향인  $Y$ 축에 대하여  $\psi_y$ 만큼 회전하는 경우를 생각해 본다. 본 논문에서는 이러한  $Y$ 축에 대한 미세한 세차운동(precession)의 경우를 다룰 것이다. 즉, 오일러 각의 순서가  $\theta_1 \rightarrow \varphi_y$ 인 경우에 대하여 생각한다. 축 1에서 기본좌표계  $I(X, Y, Z)$ 가  $X$ 축에 대하여  $\theta_1$ 만큼 회전한 후  $I_1'(x_1', y_1', z_1')$ 에서  $y_1'$ 축에 대하여  $\psi_y$ 만큼 회전하여  $I_1''(x_1'', y_1'', z_1'')$ 변할 때 다음 식 (1)이 성립한다. 여기서  $c$ 는 여현을,  $s$ 는 정현을,  $\mathbf{R}$ 은 회전텐서를, 윗 첨자  $T$ 는 전치행렬을 나타낸다.

$$\begin{Bmatrix} x_1'' \\ y_1'' \\ z_1'' \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_{\psi_y}^T \mathbf{R}_{\theta_1}^T \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c\psi_y & -s\psi_y s\theta_1 & s\psi_y c\theta_1 \\ 0 & c\theta_1 & s\theta_1 \\ -s\psi_y & -c\psi_y s\theta_1 & c\psi_y c\theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (1)$$

축 2에서는 기본좌표계  $I(X, Y, Z)$ 가  $Z$ 축에 대하여 일정한 각  $\phi$ 만큼 회전하여  $I'(x', y', z')$ 로 변하고 축  $x'$ 에 대하여  $\theta_2$ 만큼 회전한 후 최종적으로  $I_2'(x_2', y_2', z_2')$ 로 변하여 식 (2)를 만족한다.

$$\begin{Bmatrix} x_2' \\ y_2' \\ z_2' \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_{\theta_2}^T \mathbf{R}_{\phi}^T \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c\phi & s\phi & 0 \\ s\phi c\theta_2 & c\phi c\theta_2 & s\theta_2 \\ s\phi s\theta_2 & -c\phi s\theta_2 & c\theta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (2)$$

조인트가 회전 중에 어느 순간에서도 십자형 부재는 기하학적인 직교조건  $y_1'' \perp z_2'$ 으로부터 구속 조건식이 (3a)와 같이 구해지며, 이 식을 시간  $t$ 에 대하여 미분을 하면 원동축과 종동축의 각속도  $\omega_1$ 과  $\omega_2$ 의 관계식은 (3b)와 같이 구해진다.

$$-c\phi c\theta_1 s\theta_2 + c\theta_2 s\theta_1 = 0; \quad \omega_2 = \frac{c\phi\omega_1}{1 - c^2\theta_1 s^2\phi} \quad (3a,b)$$

축에 설정된 회전좌표계에서 각속도  $\omega_1^*$ 과  $\omega_2^*$ 에 관한 반대칭행렬(skew-symmetric matrix)  $\tilde{\omega}_1^*$ 과  $\tilde{\omega}_2^*$ 는 식 (4a,b)와 같이 표현되고, 이로부터 각속도를 식 (5a,b)와 같이 구할 수 있다. 이에 따른 운동에너지  $K_{\theta\varphi}$ 는 식 (6a,b)와 (7)로 표현된다.

$$\tilde{\omega}_1^* = (\mathbf{R}_{\theta_1} \mathbf{R}_{\psi_y})^T (\mathbf{R}_{\theta_1} \dot{\mathbf{R}}_{\psi_y}) = \mathbf{R}_{\psi_y}^T \dot{\theta}_1 \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{R}_{\psi_y} + \mathbf{R}_{\psi_y}^T \dot{\mathbf{R}}_{\psi_y}; \quad \tilde{\omega}_2^* = (\mathbf{R}_{\phi} \mathbf{R}_{\theta_2})^T (\mathbf{R}_{\phi} \dot{\mathbf{R}}_{\theta_2}) = \mathbf{R}_{\theta_2}^T \dot{\phi} \tilde{\mathbf{Z}} \mathbf{R}_{\theta_2} + \mathbf{R}_{\theta_2}^T \dot{\mathbf{R}}_{\theta_2} \quad (4a,b)$$

$$\omega_1^* = \mathbf{R}_{\psi_y}^T \dot{\theta}_1 \mathbf{X} + \dot{\psi}_y \mathbf{y}_1' = \begin{bmatrix} c\psi_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s\psi_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\psi}_y \end{Bmatrix}; \quad \omega_2^* = \mathbf{R}_{\theta_2}^T \dot{\phi} \mathbf{Z} + \dot{\theta}_2 \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s\theta_2 \\ 0 & 0 & c\theta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} \quad (5a,b)$$

$$K_{\theta\psi} = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \omega_i^{*T} J_i \omega_i^*; \quad J_i = \begin{bmatrix} I_{ix} & 0 & 0 \\ 0 & I_{iy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{iz} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2) \quad (6a,b)$$

$$K_{\theta\psi} = \frac{1}{2}(I_{1x}\dot{\theta}_1^2 c^2\psi_y + I_{1y}\dot{\psi}_y^2 + I_{1z}\dot{\theta}_1^2 s^2\psi_y + I_{2x}\dot{\theta}_2^2) \quad (7)$$

그림 2와 같이 원동축은 벡터  $\mathbf{n}_1$  방향, 종동축은  $\mathbf{n}_2$  방향으로 평면 외에서 회전을 할 때 각각의 4원수  $\hat{e}_1$  과  $\hat{e}_2$ 를 표현하면 식 (8a,b)와 같으며, 회전중 어느 때라도 만족하는 십자부재의 직교조건  $\mathbf{y} \perp \mathbf{z}$ 로부터 다음의 구속식 (9)가 유도된다.

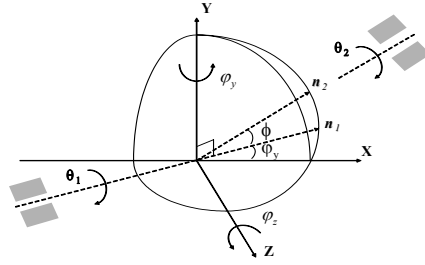


그림 2 4원수 적용을 위한 회전축 정의와 Y축에 대한 세차운동

$$\hat{e}_1 = [c\frac{\theta_1}{2} \quad s\frac{\theta_1}{2}c\psi_y \quad 0 \quad -s\frac{\theta_1}{2}s\psi_y]^T; \quad \hat{e}_2 = [c\frac{\theta_2}{2} \quad s\frac{\theta_2}{2}c\phi c\psi_y \quad s\frac{\theta_2}{2}s\phi \quad -s\frac{\theta_2}{2}c\phi s\psi_y]^T \quad (8a,b)$$

$$\theta_{2q} = \sin^{-1} \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - \tan^{-1} \frac{\beta}{\alpha} \quad (9)$$

$$\alpha(\phi, \theta_1, \psi_y) = s\phi s\theta_1 s\psi_y - c\phi s\theta_1 c\psi_y; \quad \beta(\phi, \theta_1, \psi_y) = s\phi c\phi c\theta_1 s\psi_y + s\theta_1 c\psi_y; \quad \gamma(\phi, \theta_1, \psi_y) = s\phi c\phi c\theta_1 s\psi_y \quad (10a,b,c)$$

기준좌표계와 회전좌표계에서 각각  $\hat{\omega}^*$ 와  $\hat{\omega}$ 에 대한 4원소에서 각속도 성분은 식 (11a,b) 같이 얻어지며,  $4 \times 4$  행렬  $A, B, C$ 는 식 (12a,b,c)와 같이 정의된다. 축  $i$ 에 해당하는 운동에너지  $K_{qi}$ 와 질량관성모멘트 행렬  $J_{qi}$ 는 식 (13a,b)와 같이 표현된다. 또한 원동축 1의 X축과 Y축의 4원수를 각각  $\hat{e}_X, \hat{e}_Y$  라고 하고 종동축 2의 경우를  $\hat{e}_x$  라고 할 때, 이를 식 (13a,b)를 적용하여 운동에너지를 나타내면 식 (15a,b)와 같다.

$$\hat{\omega}^* = 2A^T(\hat{e})\hat{e} = 2C^T(\hat{e})\hat{e}; \quad \hat{\omega} = 2B^T(\hat{e})\hat{e} = 2C(\hat{e})\hat{e} \quad (11a,b)$$

$$A(\hat{e}) = \begin{bmatrix} e_o & -\mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & e_o I + \tilde{\mathbf{e}} \end{bmatrix}; \quad B(\hat{e}) = \begin{bmatrix} e_o & -\mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & e_o I - \tilde{\mathbf{e}} \end{bmatrix}; \quad C(\hat{e}) = \begin{bmatrix} e_o & \mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & -e_o I - \tilde{\mathbf{e}} \end{bmatrix} \quad (12a,b,c)$$

$$K_{qi} = 2\hat{e}^T A(\hat{e})J_{qi}A^T(\hat{e})\hat{e}; \quad J_{qi} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & J_i \end{bmatrix}, (i = 1, 2) \quad (13a,b)$$

$$\hat{e}_X = [c\frac{\theta_1}{2} \quad s\frac{\theta_1}{2} \quad 0 \quad 0]^T; \quad \hat{e}_2 = [c\frac{\psi_y}{2} \quad 0 \quad s\frac{\psi_y}{2} \quad 0]^T; \quad \hat{e}_x = [c\frac{\theta_2}{2} \quad s\frac{\theta_2}{2} \quad 0 \quad 0]^T \quad (14a,b,c)$$

$$K_{q1} = 2J_1 \{ (-\dot{e}_{X0}e_{X1} + \dot{e}_{X1}e_{X0})^2 + (-\dot{e}_{Y0}e_{Y1} + \dot{e}_{Y1}e_{Y0})^2 \} = \frac{1}{2}(I_{1x}\dot{\theta}_1^2 + I_{1y}\dot{\psi}_y^2) \quad (15a)$$

$$K_{q2} = 2J_2(-\dot{e}_{x0}e_{x1} + e_{x1}\dot{e}_{x0})^2 = \frac{1}{2}I_{2x}\dot{\theta}_2^2 \quad (15b)$$

따라서 4원수를 적용한 시스템의 전체 운동에너지  $K_q (= K_{q1} + K_{q2})$ 를 구할 수 있으며, 오일러-라그랑지식을 이용하여  $\theta_1 \rightarrow \varphi_y$ 인 경우의 운동방정식 (16a)와 4원수인 경우의 운동방정식 (16b)를 유도할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} I_{1x}c^2\psi_y + I_{1z}s^2c\psi_y & 0 & 0 \\ 0 & I_{2x} & 0 \\ 0 & 0 & I_{1y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\psi}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1\dot{\psi}_y s 2\psi_y (I_{1x} - I_{1z}) \\ 0 \\ \dot{\theta}_1^2 s 2\psi_y (I_{1z} - I_{1x}) \end{Bmatrix} \quad (16a)$$

$$\begin{bmatrix} I_{1x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2x} & 0 \\ 0 & 0 & I_{1y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\psi}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16b)$$

### 3. 해석결과 및 결론

본 연구에서 수치 해석을 위하여  $I_{ix} = 1.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $I_{iy} = I_{iz}/2 = 0.3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $i = 1, 2$  이고, 외부 모멘트  $\mathbf{q} = [5 \ 0 \ 0.5]^T \sin \frac{2\pi t}{5} \text{ N} \cdot \text{m}$ 으로, 오프셋 각도  $\phi = \pi/12$ 로 정하였다. 그림 3에 종동축 2의 각속도  $\omega_2$ 를 나타냈고, 그림 4에는 세차운동축의 회전 순서가  $\theta_1 \rightarrow \psi_y$ 인 경우와 4원수를 적용한 결과는 서로 상이함을 알 수 있다. 향후 오일러 각을 적용한 동역학 해석의 일관성을 확보하는데 4원수법이 더욱 유리함을 암시하고 있다.

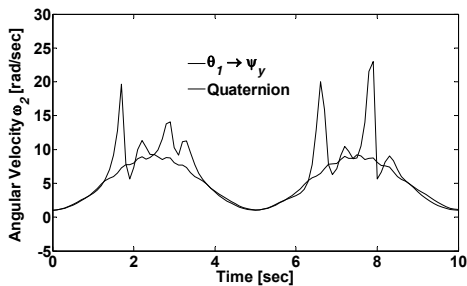


그림 3 종동축의 회전 각속도

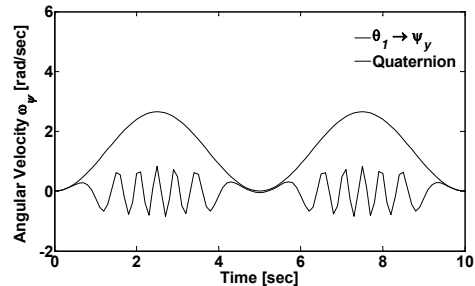


그림 4 세차운동축의 회전 각속도

### 참고문헌

- Bayrakceken H., Tasgetiren S., Yavuz I. (2007) Two cases of failure in the power transmission system on vehicles: A universal joint yoke and a drive shaft, *Engineering Failure Analysis*, Vol. 14, pp.716~724.
- 윤성호, 임리민 (2008) 로터 시스템 회전운동의 정식화 및 해석, *한국전산구조공학회 논문집*, 21(5), pp.475~482.